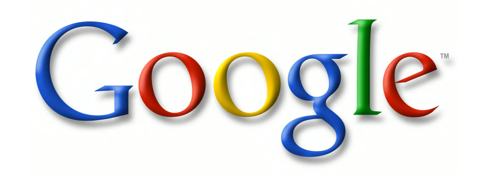
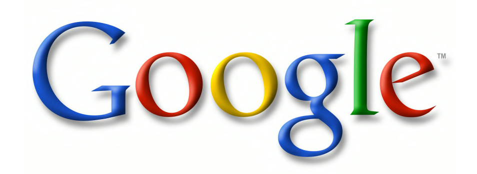





3 3433 06907825 5







B. G. TEUBNERS SAMMLUNG VON LEHRBÜCHERN
AUF DEM GEBIETE DER
MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN
MIT EINSCHLUSS IHRER ANWENDUNGEN
BAND XXVII,1.

DIE LEHRE VON DEN GEOMETRISCHEN VERWANDTSCHAFTEN

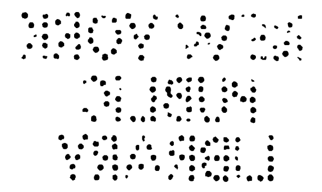
VON

RUDOLF STURM

ERSTER BAND

DIE VERWANDTSCHAFTEN ZWISCHEN GEBILDEN ERSTER STUFE

LEIPZIG UND BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1908



Vorrede.

Die Grundlage meiner geometrischen Vorlesungen an der Universität Breslau bildet eine über zwei Semester sich erstreckende Vorlesung: Theorie der geometrischen Verwandtschaften. Nun, wo meine akademische Tätigkeit wohl sich ihrem Ende zuneigt, habe ich diese Vorlesung, vervollständigt durch manche Abschnitte, welche in ihr nicht haben Platz finden können, zu einem Lehrbuche über diesen Zweig der Geometrie, dem bisweilen etwas Vernachlässigung zu teil geworden ist — in Pascals Repertorium, Bd. II z. B. hat er kaum Berücksichtigung gefunden —, ausgearbeitet. Es handelt sich also um die Darstellung und Zusammenstellung der reichen Wissensschätze auf diesem Gebiete, welche das vergangene Jahrhundert gewonnen hat und das neue gewissermaßen berufen ist, zu kodifizieren und sicher zu stellen.

Um über den Inhalt des ganzen, nach neuerlicher Übereinkunft mit der Verlagsbuchhandlung, auf vier Bände berechneten Werkes zu orientieren, werden in diesem ersten Bande auch schon die Inhaltsverzeichnisse der andern Bände mitgeteilt.

Der Umfang des Werkes zeigt, daß möglichste Vollständigkeit erstrebt werden sollte; wenn sie wohl doch nicht ganz erreicht ist, so liegt es daran, daß der Umfang doch nicht zu groß werden durfte und daß ich, in anbetracht meines Alters, zu einem Abschlusse gelangen mußte.

Ich habe mich bemüht, den Beweisen die einfachste Gestalt zu geben, sie kurz zu machen, aber doch, im allgemeinen, vollständig mitzuteilen. Ich bin da zunächst dem Beispiele meines Vorgängers Schröter gefolgt, dessen Tradition ich ja in Breslau übernommen habe, aber auch dem der großen Geometer Poncelet, Steiner (wenigstens in seinen älteren Schriften), Möbius, Chasles.

Die zahlreichen zu knapp gehaltenenen Schriften, welche die letzte Zeit gebracht hat, muten — es muß das doch wohl einmal ausgesprochen werden — dem Leser zu viel Zwischenarbeit zu; das nicht Mitgeteilte zu ergänzen, kostet viel Zeit und gelingt wohl auch nicht immer. Ich glaube, der dauernde Wert solcher zu knapp gehaltenen Schriften ist etwas fraglich; und sie verleiten vielleicht zu oberflächlichem Lesen. Werden wohl unsere heutigen Bücher noch gründlich, Satz für Satz, Schluß für Schluß, studiert? Zu dieser Frage veranlaßt die Beobachtung, daß Fehler, selbst in angesehenen Schriften, lange Zeit unbemerkt bleiben und womöglich aus einer Schrift in die andere sich fortpflanzen. Ich schreibe dies unter dem Eindrucke eines Fehlers, den ich neuerdings in einer vor 40 Jahren erschienenen bekannten Schrift gefunden habe. Da und dort habe ich im vorliegenden Werke auf solche

Fehler aufmerksam gemacht, was nicht angenehm, aber schließlich eben notwendig ist.

In diesem Buche handelt es sich nicht um eine Geometrie der Lage im Staudtschen Sinne oder um projektive Geometrie, sondern nur um eine synthetisch gehaltene Darstellung dessen, was wir über geometrische Verwandtschaften wissen. Aber dieser synthetische Charakter der Darstellung soll die Anwendung der Algebra nicht ausschließen; daß die Algebra der Geometrie helfen soll, ist ja die Errungenschaft der neueren Zeit seit Descartes. Die Projektivität definiere ich algebraisch: durch die bilineare Parameterrelation, und die algebraische Behandlung führt zu den imaginären Elementen. Wenn ich doch dann und wann Freiheit von Maßbeziehungen erstrebe, so geschieht es wegen des Reizes und der Anschaulichkeit, den solche Betrachtungen gewähren, und ich erlaube mir, auf § 7, 15, 16 dieses Bandes aufmerksam zu machen, insbesondere auf die im Raume, vermittelst der Regelschar, geführten Beweise von Sätzen der Ebene (oder im Bündel). Aber es geschieht nicht prinzipiell; ich habe sogar ein Kapitel: Elemente der Invariantentheorie für angezeigt gehalten. Und bei mehrdeutigen Verwandtschaften läßt sich, im allgemeinen, ohne eine algebraische Relation und ohne das auf ihr beruhende so wertvolle Korrespondenzprinzip nicht auskommen. Was dies Prinzip anlangt, so ist wiederholt, besonders bei wichtigen Ergebnissen, die früher oft nur mangelhaft begründete Vielfachheit eines sich selbst entsprechenden Elements, eines Koinzidenzelementes, wie ich es nenne, sorgfältig, nach Zeuthens Regel, bestimmt.

Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie soll das Buch nicht enthalten; ich habe mich auf das Fundament gestellt, auf dem, vor unserer kritischen Zeit, Möbius, Steiner und Staudt, Poncelet, Chasles und Cremona gearbeitet haben.

Im Anfange konnte das Buch ziemlich selbständig gehalten werden; weiterhin ließ sich diese Unabhängigkeit nicht mehr ganz festhalten. Wenn auch die Kurven und Flächen 2. Grades ziemlich eingehende Besprechung finden, so handelt es sich dabei um solche Eigenschaften, die eben mit den geometrischen Verwandtschaften zusammenhängen. Einigermaßen bekannt mit diesen Kurven und Flächen setze ich den Leser doch voraus; und auch die allgemeinsten Sätze insbesondere der Kurven höherer Ordnung: Anzahl der bestimmenden Punkte und damit zusammenhängende Dinge, werden vorausgesetzt. Einige kleine Unebenheiten sind dadurch entstanden, daß bisweilen eine Eigenschaft zunächst als bekannt vorausgesetzt, später aber doch noch abgeleitet wird.

Im vierten Bande, bei den Flächenabbildungen und den Cremonaschen Transformationen im Raume, wird einige Bekanntschaft mit höheren Flächen angenommen, worüber dann gesprochen werden soll.

Aus der Algebra ist nur ein beschränktes Maß von Kenntnissen notwendig: die Sätze über lineare Gleichungen, Determinanten, der Fundamentalsatz, die Beziehungen zwischen den Wurzeln und Koeffizienten einer Gleichung, die Diskriminante und ihr Grad in den Koeffizienten, Bedingungen für eine m-fache Wurzel, einige einfache Eliminationen.

Als Gegenstände, die in einem Lehrbuche wohl als neu zu bezeichnen sind, mögen erwähnt werden: die Ausartungen, die Abzählungsmethoden

(nach Hirst), die Reyeschen linearen Systeme von projektiven oder kollinearen Gebilden (in etwas anderer Anordnung), die so wesentlich verschiedenen Korrespondenzen auf Trägern vom Geschlechte 1 (nach Em. Weyr), die Fokaleigenschaften der Kollineation (nach Smith und Reye), aber auch die Cremonaschen Transformationen, insbesondere im Raume, und die zwei- und dreidimensionalen mehrdeutigen Verwandtschaften.

Einige ältere eigene Arbeiten durfte ich, zum Teil umgearbeitet, dem Werke einfügen.

Die vierte Auflage der zweiten Abteilung der Geometrie der Lage meines Freundes Reye erschien, als mein Manuskript schon fertig vorlag; mein Buch enthält ältere technische Ausdrücke, teilweise von ihm selbst herstammend, die Reye in der neuen Auflage verändert hat; ihm darin, wenigstens bei einigen, zu folgen, hätte eine nochmalige vollständige Durchsicht des Manuskripts erfordert.

Breslau, Februar 1908.

R. Sturm.

Inhaltsverzeichnis des ersten Bandes.

Inhaltsverzeichnis der weiteren Bände.

Band II.

Dritter Teil.

Eindeutige lineare Verwandtschaften zwischen zweistufigen Gebilden.

Vierter Teil.

Ausartungen der Korrelation und Kollineation, Abzählungen, lineare Systeme.

Band III.

Fünfter Teil.

Eindeutige lineare Verwandtschaften zwischen Gebilden dritter Stufe.

Sechster Teil.

Lineare Systeme von Kurven und Flächen, ihre kollineare Beziehung, Polarentheorie. Ausartungen und Abzählungen. Lineare Systeme von linearen Verwandtschaften und von Gebilden, die in solchen sich befinden.

Band IV.

Siebenter Teil.

Eindeutige (Cremonasche) Verwandtschaften höheren Grades zwischen zweistufigen Gebilden.

Achter Teil.

Korrespondenzen auf Trägern vom Geschlechte 1.

Neunter Teil.

Mehrdeutige Verwandtschaften zwischen Feldern.

Zehnter Teil.

Eindeutige Flächenabbildungen.

Elfter Teil.

Eindeutige Cremonasche Verwandtschaften im Raume.

Zwölfter Teil.

Mehrdeutige Verwandtschaften im Raume.

Technische Ausdrücke.

(Die Zahl bezeichnet die Seite.)

Erster Teil.

Eindeutige Verwandtschaften zwischen einstufigen[1]) Gebilden.

§ 1. Die (gerade) Punktreihe.

Wir beschränken unsere Betrachtung zunächst auf eine feste 1
Gerade und ihre Punkte, deren Inbegriff eine Punktreihe genannt wird, für welche die Gerade der Träger ist. Den einen der beiden Sinne, in denen die Punktreihe durchlaufen werden kann, nehmen wir als positiven an. Eine auf u befindliche Strecke AB denken wir stets vom Anfangspunkt A nach dem Endpunkte B durchlaufen; dadurch erhält sie einen Sinn und ein Vorzeichen. Es ist demnach

$$BA = -AB$$

oder:

$$AB + BA = 0.$$

Für drei Punkte A, B, C von u gilt, wie auch ihre gegenseitige Lage sei:

$$AB + BC + CA = 0,$$

also:

$$AB + BC = -CA = AC.$$

Diese Formel ist nicht in allen Fällen richtig, wenn die Strecken, wie in der elementaren Geometrie, ohne Vorzeichen oder „absolut" genommen werden. Es ist aber von großem Werte, immer, ohne jedesmal die gegenseitige Lage der Punkte berücksichtigen zu müssen, $AB + BC$ durch AC oder umgekehrt ersetzen zu können. Dies wird durch das Prinzip der Vorzeichen ermöglicht. Möbius war es, der zuerst konsequent die geometrischen Größen mit Vorzeichen behaftet annahm (1827 in seinem Barycentrischen Calcül[2])). Von neuem betonte Chasles das Prinzip der Vorzeichen in seinem Traité de Géométrie supérieure (1852). Sporadisch sind schon vor

1) Die Terminologie, nach welcher die Punktreihe, der Strahlen- und der Ebenenbüschel Gebilde 1. Stufe, das Feld und der Bündel solche 2. Stufe sind und der Punkt- und der Ebenenraum 3. Stufe, rührt von Staudt her: Geometrie der Lage (1847) Nr. 78. — In Graßmanns Ausdehnungslehre (von 1844 oder 1862) ist die Stufe um 1 höher, und die homogenen Koordinaten machen manche Analytiker geneigt, Graßmann zu folgen.

2) Nunmehr Bd. I der Gesammelten Werke.

Möbius Strecken mit Vorzeichen behaftet worden, vor allem die Koordinaten der analytischen Geometrie; aber z. B. Steiner arbeitet in seiner 1832 erschienenen Systematischen Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander¹) noch nicht mit Vorzeichen.

Wir folgern weiter:

$$AB = AC - BC$$

oder:

$$AB = CB - CA.$$

Bei n Punkten $A_1, A_2, \ldots A_n$ haben wir ebenso:

$$A_1A_2 + A_2A_3 + A_3A_4 + \cdots + A_nA_1 = 0.$$

Für vier Punkte A, B, C, D besteht die Beziehung:

$$BC \cdot AD + CA \cdot BD + AB \cdot CD = 0,$$

deren Richtigkeit sich sofort ergibt, wenn BC, CA, AB durch die Differenzen $BD - CD$, $CD - AD$, $AD - BD$ ersetzt werden.

Sie war schon Euler (1747) bekannt, mußte aber damals für verschiedene gegenseitige Lagen der vier Punkte in verschiedener Weise in absoluten Strecken geschrieben und bewiesen werden.

Man studiere die Veränderung der Formel, wenn man bloß A, B, C „zyklisch" vertauscht, d. h. A mit B, B mit C, C mit A, oder wenn der Zyklus über alle vier Punkte ausgedehnt wird und diese in B, C, D, A übergehen.

Es ist immer wichtig, den Bau der Formeln zu beachten.

In derselben einfachen Weise wird die auch aus dem 18. Jahrhundert stammende, von Simson gefundene, aber gewöhnlich nach Stewart benannte Formel bewiesen, die jetzt einheitlich geschrieben werden kann:

$$AD^2 \cdot BC + BD^2 \cdot CA + CD^2 \cdot AB + BC \cdot CA \cdot AB = 0$$ ²).

2 Es handelt sich nun um die Festlegung eines Punktes X auf u. Er wird am einfachsten durch seine Abszisse $x = OX$ bestimmt, die mit einem Vorzeichen behaftete Entfernung von einem festen Anfangspunkte O, und wegen des Vorzeichens ist die Bestimmung eindeutig, was von wesentlicher Bedeutung ist, hingegen zweideutig, wenn die Strecke absolut genommen wird.

Es ist

$$AB = OB - OA = b - a;$$

---

1) Gesammelte Werke, 1881—82, Bd. I, S. 229; Klassiker der exakten Wissenschaften Nr. 82, 83.

2) Spezialfälle finden wir schon in der Collectio von Pappus (vermutlich 3. Jahrhundert n. Chr.).

also ist jede Strecke gleich der Abszisse des Endpunktes, vermindert um die des Anfangspunktes. Jede solche Abszissendifferenz ist unabhängig von O.

Wenn M die Mitte von AB ist, so daß $AM = MB = -BM$, so ist:

$$OM - OA = OB - OM,$$

also:

$$OM = \tfrac{1}{2}(OA + OM);$$

mithin ist die Abszisse der Mitte das arithmetische Mittel der Abszissen des Anfangs- und des Endpunktes.

Eine andere eindeutige Bestimmung eines Punktes X von u ist 3
die durch den Parameter. Es ist dann eine Grundstrecke FG gegeben; wir nennen zunächst $\frac{FX}{GX}$ das Teilverhältnis von X in bezug auf dieselbe[1]).

Den Rest der Geraden u, nach Abzug der Strecke FG, der aus zwei unendlich langen Teilen besteht, die Ergänzung von FG, bezeichnet man nach Staudts Vorschlag[2]) mit $F \cdot G$. Je nachdem X in FG oder in $F \cdot G$ liegt und zwar gleichgültig, in welchem der beiden Teile, ist das Teilverhältnis < 0 oder > 0. In F ist es 0, in G ist es ∞, und zwar $\pm \infty$, denn je nachdem sich X dem G von FG oder von $F \cdot G$ her nähert, nähert sich $\frac{FX}{GX}$ dem Werte ∞ mit sehr großen negativen bzw. positiven Werten. An beiden Stellen, F und G, wechselt also das Teilverhältnis sein Vorzeichen, durch 0, bzw. ∞ gehend.

Es ist:

$$\frac{FX}{GX} = \frac{FG + GX}{GX} = 1 + \frac{FG}{GX}.$$

Entfernt sich X in dem Teile von $F \cdot G$, der auf der Seite von G liegt, immer weiter, so nimmt $\frac{FG}{GX}$, welches > 0 ist, immer mehr ab und das Teilverhältnis strebt auf $+1$ zu von oben her, ohne jedoch diesen Wert in einem endlichen Punkte zu erreichen; geschieht die Entfernung im andern Teile von $F \cdot G$, wo $\frac{FG}{GX} < 0$ ist, so strebt es, weil $\frac{FG}{GX}$ ebenfalls absolut immer kleiner wird, auch auf $+1$ zu, von unten her, wiederum ohne diesen Wert zu erreichen. Dem Teilverhältnisse $+1$ entspricht also kein endlicher Punkt; man kann ihm

---

1) Früher meistens in der Form $\frac{FX}{XG}$ geschrieben, in der es das andere Vorzeichen hat.

2) von Staudt, Geometrie der Lage und Beiträge zur Geometrie der Lage, 1847 und 1856—60.

aber von oben her oder von unten her unbegrenzt nahe kommen. Dem Teilverhältnisse -1 entspricht die Mitte von FG.

Wir definieren nun als Parameter[1]) λ von X das Produkt des Teilverhältnisses in eine konstante Größe m; also

$$\lambda = m \frac{FX}{GX}.$$

Zu F, G gehören die Parameter 0, ∞, zur Mitte $-m$; zu m gehört kein endlicher Punkt, aber wir können diesem Werte unbegrenzt nahe kommen. In FG, $F \cdot G$ hat der Parameter das Vorzeichen von $-m$, m.

Aus:

$$\lambda = m\left(1 + \frac{FG}{GX}\right)$$

folgt:

$$GX = \frac{FG}{\frac{\lambda}{m} - 1};$$

daraus ergibt sich, daß λ zunächst GX und infolgedessen X eindeutig bestimmt.

Beachten wir, daß, während die Abszisse ihr Vorzeichen ändert, wenn der positive Sinn geändert wird, der Parameter davon nicht beeinflußt wird; ferner ist er auch von der gewählten Maßeinheit unabhängig. Dies sind Vorzüge des Parameters vor der Abszisse.

Sind f, g, x die Abszissen von F, G, X, so hat man

$$\lambda = m \frac{x - f}{x - g}, \text{ und}$$

$$x = \frac{mf - \lambda g}{m - \lambda},$$

als Beziehungsformeln zwischen Parameter und Abszisse.

4 Aus dem Begriffe des Teilverhältnisses ist ein anderer Begriff erwachsen, welcher in der modernen Geometrie eine große Bedeutung erhalten hat, weil er sich bei den sogenannten linearen Verwandtschaften (Transformationen) als unveränderlich, invariant erwiesen hat: das Doppelverhältnis; Möbius war es ebenfalls, der a. a. O. zuerst die Aufmerksamkeit auf seine Bedeutung lenkte; er gebrauchte zunächst den etwas umständlichen Namen: Doppelschnitt-Verhältnis; rapport anharmonique heißt es bei den Franzosen.

Vier Punkte A, B, C, D von u seien in bestimmter Weise zu einem Wurfe angeordnet, um Staudts Benennung zu gebrauchen; wir machen zwei von ihnen, etwa A und B, zu Grundpunkten, A zum

---

1) Zur Unterscheidung verschiedener Gebilde hat wohl Leibnitz dies Wort zum ersten Male angewandt.

ersten, B zum zweiten und die andern zu teilenden Punkten und zwar C zum ersten, D zum zweiten, so haben wir den Wurf $ABCD$, in welchem dann A und B, sowie C und D zugeordnet (oder konjugiert) heißen; die beiden Teilverhältnisse sind $\frac{AC}{BC}$ und $\frac{AD}{BD}$, und deren Quotient (oder der der zugehörigen Parameter) ist das Doppelverhältnis

$$\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}{}^{1)} = \frac{AC}{BC} \cdot \frac{BD}{AD},$$

wofür abkürzend $(ABCD)$ geschrieben wird. Haben also z. B. X und Y die Parameter ξ, η in bezug auf F, G, so ist $(FGXY) = \xi : \eta$.

Die beiden Paare zugeordneter Punkte A, B und C, D können zwei wesentlich verschiedene Lagen haben, die man als hyperbolische und elliptische Lage unterscheidet. In jener ist das Doppelverhältnis $(ABCD)$ positiv; C, D liegen zu A, B gleichartig, beide in AB oder beide in $A \cdot B$, sodaß die dividierten Teilverhältnisse das nämliche Vorzeichen haben; liegen C, D beide in AB, so wird die Strecke CD von AB eingeschlossen; liegen sie in verschiedenen Teilen von $A \cdot B$, so wird AB von CD eingeschlossen; liegen sie aber in demselben Teile von $A \cdot B$, so schließen sich AB und CD gegenseitig aus. Unter Benutzung der Ergänzungen haben wir, wenn wir wollen, in allen drei Fällen Ausschließung, nämlich im ersten Falle schließen $A \cdot B$ und CD, im zweiten AB und $C \cdot D$ sich aus. A, B liegen auch gleichartig zu C, D, im ersten wie dritten Falle beide in $C \cdot D$, im zweiten beide in CD.

Bei der elliptischen Lage ist $(ABCD)$ negativ: einer von den Punkten C, D liegt in AB, der andere in $A \cdot B$, und ebenso liegen A, B zu C, D. Die beiden Strecken AB, CD greifen ineinander über, jede trennt die Punkte der andern.

Aus vier Punkten A, B, C, D kann man dreimal zwei Paare bilden: AB, CD; AC, BD; AD, BC; zweimal ergibt sich hyperbolische Lage, das dritte Mal elliptische.

Die Zentrale zweier Kreise schneidet sie in Punktepaaren von hyperbolischer oder elliptischer Lage, je nachdem sie sich nicht schneiden (mögen sie sich ausschließen oder einer den andern einschließen) oder sich schneiden.

Nimmt man den vierten Punkt D veränderlich, so kann man 5
$(ABCD) = \frac{AC}{BC} \cdot \frac{BD}{AD}$ als Parameter auffassen mit $m = \frac{AC}{BC}$ als Konstante und B und A als erstem und zweitem Grundpunkt. Kommt also D nach B, A, so wird das Doppelverhältnis 0 oder $\pm\infty$; fällt

1) Der älteren Schreibweise des Teilverhältnisses entspricht: $\frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB}$, was völlig gleich mit dem obigen ist.

er nach C, so ergibt sich offenbar 1; dem Werte $\frac{AC}{BC}$ entspricht kein endlicher Punkt. Man verfolge den Wert von $(ABCD)$ und unterscheide die beiden Fälle, daß C in AB oder in $A \cdot B$ liegt.

D ist also eindeutig bestimmt, wenn A, B, C und der Wert von $(ABCD)$ gegeben sind, wobei der Wert $\frac{AC}{BC}$ zunächst noch ausgeschlossen werden muß.

Sind a, b, c, d die Abszissen der vier Punkte in bezug auf O, so ist:

$$(ABCD) = \frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b} = \frac{a-c}{b-c} : \frac{a-d}{b-d}.$$

Genau ebenso gebaut ist der Ausdruck des Doppelverhältnisses in den vier Parametern α, β, γ, δ. Denn es ist:

$$\alpha = m\frac{FA}{GA} = m\frac{FG}{GA} + m,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdot;$$

also:

$$\alpha - \gamma = m \cdot FG \cdot \left(\frac{1}{GA} - \frac{1}{GC}\right) = mFG \cdot \frac{GC - GA}{GA \cdot GC} = m \cdot \frac{FG . AC}{GA . GC};$$

ebenso:

$$\beta - \gamma = m\frac{FG \cdot BC}{GB \cdot GC};$$

also:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{GA}{GB} \cdot \frac{\alpha-\gamma}{\beta-\gamma}, \quad \frac{AD}{BD} = \frac{GA}{GB} \cdot \frac{\alpha-\delta}{\beta-\delta}$$

und

$$(ABCD) = \frac{\alpha-\gamma}{\beta-\gamma} : \frac{\alpha-\delta}{\beta-\delta}.$$

Daraus folgt insbesondere auch:

Ist $(FGHA) = \alpha$, $(FGHB) = \beta$, $(FGHC) = \gamma$, $(FGHD) = \delta$, so ist:

$$(ABCD) = \frac{\alpha-\gamma}{\beta-\gamma} : \frac{\alpha-\delta}{\beta-\delta}.$$

6 Vier Punkte A, B, C, D bilden 24 Würfe, aber die zugehörigen Doppelverhältnisse sind nicht alle verschieden; vielmehr sind sechsmal je vier einander gleich. So haben die Würfe

$$ABCD,\ BADC,\ CDAB,\ DCBA$$

gleiche Doppelverhältnisse („sind gleich" nach Staudts Ausdruck); denn z. B.

$$(CDAB) = \frac{CA}{DA} : \frac{CB}{DB} = \frac{CA \cdot DB}{DA \cdot CB} = \frac{AC \cdot BD}{BC \cdot AD} = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = (ABCD).$$

Also einem Doppelverhältnisse $(ABCD)$ sind gleich dasjenige, $(BADC)$, das aus ihm durch Vertauschung zweier zugeordneter

Punkte und gleichzeitige Vertauschung der beiden andern hervorgeht, ferner dasjenige, $(CDAB)$, bei dem das eine Paar mit dem andern vertauscht ist, und dasjenige, $(DCBA)$, bei dem jene Vertauschungen und diese zugleich vorgenommen sind oder auch: das mit umgekehrter Reihenfolge.

Je vier gleiche Würfe fangen also mit den vier verschiedenen Punkten an, und es genügt daher, die sechs mit A anfangenden, welche im allgemeinen voneinander verschieden sind, zu betrachten:

$$ABCD,\ ABDC,\ ACBD,\ ACDB,\ ADBC,\ ADCB.$$

Es ist unmittelbar klar, daß, wenn $(ABCD) = \lambda$ ist, dann

$$(ABDC) = \frac{1}{\lambda};$$

hier sind nur die einen zugeordneten Punkte vertauscht, und da ohne Änderung des Doppelverhältnisses die einen mit den andern vertauscht werden können, so führt auch die Vertauschung von A und B zum reziproken Werte. Die sechs ungleichen Doppelverhältnisse zerfallen also in drei Paare reziproker.

Der dritte Wert entsteht aus dem ersten durch Vertauschung der mittleren Punkte. Die Doppelverhältnisse haben zur Summe 1 und heißen deshalb komplementär.

Wir schreiben die Eulersche Formel (Nr. 1) in der Gestalt:

$$-AC \cdot BD + AB \cdot CD = CB \cdot AD$$

und dividieren mit $CB \cdot AD$ oder $-BC \cdot AD$, so ergibt sich

$$\frac{AC \cdot BD}{BC \cdot AD} + \frac{AB \cdot CD}{CB \cdot AD} = 1,$$

oder:

$$(ABCD) + (ACBD) = 1.$$

Ebenso sind $(ABDC)$ und $(ADBC)$, $(ACDB)$ und $(ADCB)$ komplementär; aber z. B. auch $(ABCD) = (BADC)$ und $(BDAC) = (DBCA)$, so daß die Vertauschung der äußeren Punkte dieselbe Wirkung hat.

Somit haben die sechs verschiedenen Doppelverhältnisse folgende Werte:

$$(ABCD) = \lambda,\ (ABDC) = \frac{1}{\lambda},\ (ACBD) = 1 - \lambda,\ (ACDB) = \frac{1}{1-\lambda},$$

$$(ADBC) = 1 - \frac{1}{\lambda} = \frac{\lambda - 1}{\lambda},\ (ADCB) = \frac{\lambda}{\lambda - 1} = 1 - \frac{1}{1-\lambda}$$ [1].

1) Die sechs Werte sind Wurzeln der reziproken Gleichung sechsten Grades (einer sogenannten Abelschen Gleichung):

$$x^3 + \frac{1}{x^3} - 3\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 3a\left(x + \frac{1}{x}\right) + 6a + 5 = 0,$$

in welcher a so bestimmt wird, daß λ ihr genügt. (Vgl. Nr. 151.)

Aus jedem dieser sechs Werte gehen die fünf übrigen in derselben Weise hervor.

Die Formel:

$$(ABCD) = \lambda$$

führt zu:

$$AC(BC - DC) = \lambda(AC - DC)BC,$$

$$(1 - \lambda)AC \cdot BC = AC \cdot DC - \lambda BC \cdot DC,$$

$$\frac{1 - \lambda}{DC} = \frac{1}{BC} - \frac{\lambda}{AC}\,[1];$$

hierin ist der Punkt C bevorzugt; wir haben daher drei analoge Formeln, welche der Leser bilden möge.

7 Der wichtigste Wert des Doppelverhältnisses ist -1.

Wenn $(ABCD) = -1$ ist, so sagt man: die einen zugeordneten A, B sind zu den andern zugeordneten C, D harmonisch, oder auch, weil die Paare in elliptischer Lage sind, die beiden Paare trennen sich harmonisch. Sind drei Punkte A, B, C gegeben, so ist, bei gegebener Zuordnung, der vierte D eindeutig bestimmt: er heißt der dem C zugeordnete (konjugierte) vierte harmonische Punkt in bezug auf A und B, kürzer: der vierte harmonische Punkt zu A, B; C.

Hier werden von den sechs im allgemeinen verschiedenen Doppelverhältnissen dreimal je zwei einander gleich:

$$\lambda = \frac{1}{\lambda} = -1, \quad 1 - \lambda = 1 - \frac{1}{\lambda} = 2, \quad \frac{1}{1-\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda - 1} = \frac{1}{2},$$

so daß dreimal acht Doppelverhältnisse gleich sind; insbesondere:

$$(ABCD) = (BADC) = (CDAB) = (DCBA)$$
$$= (ABDC) = (BACD) = (CDBA) = (DCAB) = -1;$$

es können also in jedem Paare zugeordneter Punkte dieselben vertauscht werden, ohne daß dies gleichzeitig im andern geschieht; es ist allein notwendig zu wissen, welche Punkte zugeordnet sind.

Aus $\frac{AC}{BC} = -\frac{AD}{BD}$ folgt: $\frac{CA}{DA} = -\frac{CB}{DB}$.

Die Funktion $f(\lambda) = \frac{(\lambda^2 - \lambda + 1)^3}{(\lambda^2 - \lambda)^2}$ geht in sich selbst über, wenn λ durch die fünf andern Größen ersetzt wird. In der Gruppentheorie bilden die sechs Substitutionen $\lambda' = \lambda$, $\lambda' = \frac{1}{\lambda}$, $\lambda' = 1 - \lambda$ usw. die anharmonische Gruppe.

1) Über die Verwertung dieser Formel in der Dioptrik vgl. Möbius, Gesammelte Werke, Bd. 4, S. 541.

Zwei Punkte mit entgegengesetzt gleichen Parametern sind zu den Grundpunkten harmonisch;

$$\lambda = m\frac{FX}{GX}, \quad -\lambda = m\frac{FY}{GY}, \quad \text{also: } \frac{FX}{GX} : \frac{FY}{GY} = -1.$$

Aus der obigen Formel:

$$\frac{1-\lambda}{DC} = \frac{1}{BC} - \frac{\lambda}{AC}$$

folgt für $\lambda = -1$:

$$\frac{2}{DC} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{BC}\text{ [1]}.$$

Wenn M die Mitte von AB ist, so daß $MB = -MA$; dann führt:

$$\frac{AC}{BC} = -\frac{AD}{BD}$$

zu:

$$\frac{MC - MA}{MC + MA} = -\frac{MD - MA}{MD + MA}$$

und zu:

$$MC \cdot MD = MA^2 = MB^2;$$

und umgekehrt folgt hieraus:

$$(ABCD) = \frac{MC - MA}{MC + MA} : \frac{MD - MA}{MD + MA} = \frac{MC - MA}{MC + MA} : \frac{\frac{MA^2}{MC} - MA}{\frac{MA^2}{MC} + MA} = -1.$$

Also ist bei vier harmonischen Punkten das Produkt der Entfernungen zweier zugeordneten von der Mitte zwischen den beiden andern gleich dem Quadrate der halben Entfernung dieser, und umgekehrt.

Es liegen C und D auf derselben Seite von M, weil $MC \,.\, MD$ positiv ist; und C und D laufen in entgegengesetztem Sinne. Liegt C zwischen A und M, so liegt D außerhalb jenseits A; nähert sich C dem A, so tut es auch D, in A vereinigen sie sich. Es nähere sich C dem M, so entfernt sich D immer weiter; kein endlicher Punkt entspricht dem C, wenn er in M liegt. Ähnliches gilt auf der andern Seite von M; zwei zugeordneten Punkten auf der einen Seite entsprechen, symmetrisch in bezug auf M, zwei zugeordnete auf der andern Seite. Geht C stetig durch M hindurch, so kehrt D, welcher sich auf der einen Seite immer weiter entfernt hat, auf der andern Seite zurück, in demselben Sinne laufend, wie vorher.

---

1) Daraus ergibt sich:

$$\tfrac{1}{2}(AC + BC) : \sqrt{AC \cdot BC} = \sqrt{AC \cdot BC} : DC;$$

diese vierte Proportionale DC einer stetigen Proportion, deren erstes und mittleres Glied das arithmetische und das geometrische Mittel von AC, BC sind, nannten die Griechen das harmonische Mittel.

Wir entnehmen aus dieser Betrachtung auch, daß die Vereinigung von zwei (zugeordneten oder nicht zugeordneten) von vier harmonischen Punkten bewirkt, daß noch ein dritter sich mit ihnen vereinigt.

8 Durch den Inbegriff aller Paare von Punkten, welche zu zwei festen Punkten harmonisch sind, gelangen wir zu einem Gebilde, welches in der Geometrie große Wichtigkeit erlangt hat: der Involution (von Punktepaaren); Desargues im 17. Jahrhundert hat sich zuerst mit ihr beschäftigt, falls nicht etwa Euklid (in den verloren gegangenen Porismen) sie schon gekannt hat.

Zu den Punktepaaren gehören die Paare AA, BB mit vereinigten Punkten; A, B heißen deshalb die Doppelpunkte der Involution.[1] Zu ihnen ist jedes Paar der Involution harmonisch.

Die Beziehung:

$$MC \cdot MD = MA^2$$

gibt uns die ursprüngliche Desargues'sche Definition: eine Involution entsteht durch alle Punktepaare mit konstantem Produkte der Entfernungen der beiden Punkte von einem festen Punkte. Dieser heißt der Zentralpunkt (Mittelpunkt) der Involution und das konstante Produkt die Potenz derselben. Potenz hieß bis zum Ende des 17. Jahrhunderts nur die zweite Potenz, und als eine solche tritt ja das konstante Produkt auf. Als Quadrat ist es positiv; aber die Desarguessche Definition hat einen großen Vorzug vor der ursprünglichen, indem sie sofort zu der Verallgemeinerung führt, daß man für diese Konstante auch einen negativen Wert annimmt und im Übergangsfalle auch den Wert 0. Vom positiven Sinne auf u ist das Vorzeichen der Potenz unabhängig.

Wir haben also zwei wesentlich verschiedene allgemeine Fälle der Involution: mit positiver, bezw. negativer Potenz und einen Übergangsfall: mit der Potenz 0. In diesem Falle muß ersichtlich von jedem Paare ein Punkt in den Zentralpunkt fallen.

In jedem Falle aber gehört jeder Punkt von u zu einem und nur zu einem Paare der Involution; denn der gepaarte[2]) ist eindeutig bestimmt. Ausgenommen muß vorläufig noch der Zentralpunkt selbst werden, dem kein endlicher Punkt gepaart ist.

Bei der Involution mit positiver, bezw. negativer Potenz liegen gepaarte Punkte auf derselben Seite, auf ver-

1) Andere Namen sind: Asymptotenpunkte (Steiner), Ordnungspunkte (Staudt, Reye), Focalpunkte, Brennpunkte; statt Involution hat Steiner Punktsystem gesagt.

2) Ich vermeide absichtlich das vielfach übliche Wort „konjugiert".

schiedenen Seiten des Zentralpunktes[1]). Im ersten Falle ist Vereinigung möglich: die Entfernung der Doppelpunkte vom Zentralpunkte ist die positive, bzw. negative Wurzel aus der Potenz. Im zweiten ist keine Vereinigung möglich; diese Wurzel ist imaginär.

Wenn einer von den beiden Faktoren absolut zu- oder abnimmt, so nimmt der andere ab oder zu. Deshalb bewegen sich gepaarte Punkte im ersten Falle in entgegengesetztem Sinne, wie wir es schon aus der Betrachtung harmonischer Punkte wissen, im zweiten im nämlichen.

Irgend zwei Paare CD, $C'D'$ haben im ersten Falle hyperbolische, im zweiten elliptische Lage. Denn ihr Doppelverhältnis hat dasselbe Vorzeichen wie die Potenz, welche p heiße. Es ist:

$$(CDC'D') = \frac{CC' \cdot DD'}{DC' \cdot CD'} = \frac{(MC' - MC)(MD' - MD)}{(MC' - MD)(MD' - MC)}$$

$$= \frac{(MC' - MC)\left(\frac{p}{MC'} - \frac{p}{MC}\right)}{\left(MC' - \frac{p}{MC}\right)\left(\frac{p}{MC'} - MC\right)} = p\left(\frac{MC' - MC}{MC \cdot MC' - p}\right)^2.$$

Man nennt deshalb die Involution selbst hyperbolisch, elliptisch und im Übergangsfalle parabolisch.

Bei der hyperbolischen Involution besteht, wenn D, D' je die von M entfernteren Punkte sind, die Reihenfolge $MC'CDD'$ (oder $MCC'D'D$), bzw. $D'C'MCD$, je nachdem die beiden Paare auf derselben Seite von M liegen oder auf verschiedenen, bei der elliptischen, wenn die C, C' auf der einen, die D, D' auf der andern Seite liegen, die Reihenfolge $C'CMD'D$ (oder $CC'MD'D'$).

In bezug auf den Zentralpunkt ist die Involution symmetrisch.

In der elliptischen Involution bilden die beiden gepaarten Punkte, welche von M zu beiden Seiten dieselbe Entfernung haben (gleich der Wurzel aus der absoluten Potenz), das Paar mit der kleinsten Strecke. Denn es sei $p = -q^2$, XY ein Paar, so ist: $YM \cdot MX = q^2$, ferner

$$YX^2 = (YM + MX)^2 = (YM - MX)^2 + 4q^2,$$

also am kleinsten, wenn $YM = MX$.

---

1) Zwei einfache Beispiele einer Involution erhält man folgendermaßen:

In einem Kreisbüschel, dem Systeme aller Kreise durch zwei feste Punkte, bilden die Durchmesser-Endpunkte auf der Zentrale eine Involution mit negativer Potenz.

Man konstruiere alle Dreiecke, welche eine feste Ecke C, einen festen Höhenpunkt H und eine der Lage nach gegebene Gegenseite c haben; die Ecken A, B auf dieser bilden eine Involution, welche positive oder negative Potenz hat, je nachdem C und H auf verschiedenen oder auf derselben Seite von c liegen.

9 **Zwei Punktepaare bestimmen eindeutig eine Involution.** Sie seien $X_1 Y_1$, $X_2 Y_2$; wir suchen zunächst den Zentralpunkt M; es muß sein:

$$MX_1 \cdot MY_1 = MX_2 \cdot MY_2,$$

oder wenn $x_1, y_1 \ldots, m$ die Abszissen $OX_1, \ldots$ sind:

$$(x_1 - m)(y_1 - m) = (x_2 - m)(y_2 - m),$$

woraus folgt:

$$m = \frac{x_1 y_1 - x_2 y_2}{x_1 + y_1 - x_2 - y_2}$$

oder

$$OM = \frac{OX_1 \cdot OY_1 - OX_2 \cdot OY_2}{OX_1 + OY_1 - OX_2 - OY_2};$$

der Zentralpunkt ist dadurch eindeutig bestimmt. Man kann auch ein Paar mit vereinigten Punkten, also einen Doppelpunkt geben. Daß die beiden Doppelpunkte eindeutig eine Involution festlegen, wissen wir schon.

Von den drei Involutionen (AB, CD), (AC, BD), (AD, BC), zu denen vier Punkte führen, sind (Nr. 4) zwei hyperbolisch und eine elliptisch.

Wir erhalten keinen endlichen Zentralpunkt, wenn $OX_1 + OY_1 = OX_2 + OY_2$, d. h. wenn $X_1 Y_1$ und $X_2 Y_2$ denselben Mittelpunkt haben. Diesen Fall werden wir bald besonders besprechen.

Setzt man den gefundenen Wert von m in $(x_1 - m)(y_1 - m)$ oder $(x_2 - m)(y_2 - m)$ ein, so ergibt sich die Potenz der durch $X_1 Y_1$, $X_2 Y_2$ bestimmten Involution. Sie ist:

$$p = \frac{(x_1 - x_2)(x_1 - y_2)(y_1 - x_2)(y_1 - y_2)}{(x_1 + y_1 - x_2 - y_2)^2}.$$

Die Differenzen, welche im Zähler multipliziert sind, haben durchweg im Minuend die Abszisse eines Punktes des einen Paares und im Subtrahend diejenige eines Punktes des andern. Die Potenz ist positiv oder negativ, je nachdem sie in gerader oder ungerader Anzahl negativ sind; man wird leicht konstatieren, daß dann hyperbolische oder elliptische Lage der beiden Paare vorliegt; sie ist 0, wenn eine der Differenzen verschwindet, d. h. wenn die beiden Paare einen Punkt gemeinsam haben.

Ist $p > 0$, so erhält man, wie schon bemerkt wurde, die Doppelpunkte D_1, D_2, und es ist für jedes Paar der Involution:

$$MX \cdot MY = p = MD_1^2 = MD_2^2;$$

X und Y sind zu D_1, D_2 harmonisch.

D_1, D_2 liegen auf verschiedenen Seiten von M und jeder wird von allen auf derselben Seite gelegenen Paaren eingeschlossen.

Ist aber $p < 0$ und $\sqrt{p}$ imaginär, so sagt man nicht: die Involution hat keine Doppelpunkte, sondern sie hat imaginäre Doppel-

punkte[1]), und so verfährt die moderne Geometrie jedesmal, wenn die algebraische Behandlung zu imaginären Werten führt.

Die Algebra hat durch die Aufnahme der imaginären Größen wesentliche Fortschritte gemacht und ihren Resultaten eine früher nicht erreichte Allgemeinheit verschafft. Die Geometrie hat, indem sie ihr seit den ersten Jahrzehnten des 19. Jahrhunderts darin folgte, denselben Vorteil erreicht: man erkannte, daß man im andern Falle die Untersuchung sehr erschwert und die Allgemeinheit der Sätze erheblich beeinträchtigt, indem man sie in oft zahlreiche Spezialfälle zersplittern muß.

Wie man bei einer quadratischen Gleichung in allen Fällen sagt, daß sie zwei Wurzeln hat, so *schreibt man einer Involution in allen Fällen zwei Doppelpunkte zu. Sie sind reell und getrennt bei der hyperbolischen, (im Zentralpunkt) vereinigt bei der parabolischen, konjugiert imaginär bei der elliptischen Involution.*

Die Bezeichnung imaginärer Größen und Lösungen als „unmöglicher“, die bis zum Ende des 18. Jahrhunderts (z. B. noch in *Eulers* Algebra) üblich war, ist aufgegeben.

Unmöglich heißt heutzutage eine Lösung, wenn zu viel verlangt wird, wenn daher die algebraische Behandlung zu mehr (voneinander unabhängigen) Gleichungen führt als Unbekannte vorhanden sind, wenn man z. B. im vorliegenden Falle verlangt, zu drei beliebig gegebenen Punktepaaren den Zentralpunkt und die Doppelpunkte zu finden.

Drei beliebige Punktepaare gehören im allgemeinen nicht zu der- 10
selben Involution; zwei bestimmen sie, wie wir gefunden haben; vom dritten Paare kann man nur den einen Punkt geben; der andere ist so zu konstruieren, daß das Produkt der Entfernungen beider Punkte vom aus den beiden ersten Paaren gefundenen Zentralpunkte gleich der ebenfalls durch sie gegebenen Potenz ist, und eindeutig bestimmt. Zum Zentralpunkte können wir — zunächst noch — nicht den gepaarten angeben.

Sind $X_1 Y_1$, $X_2 Y_2$, $X_3 Y_3$ die Paare, so muß, wenn sie zur nämlichen Involution gehören, sein:

---

1) Die Potenz p einer elliptischen Involution sei $-q^2$, so daß die imaginären Doppelpunkte von M die Entfernungen qi und $-qi$ haben; x, y seien die Entfernungen der gepaarten Punkte X, Y von M, also $xy = -q^2$; das Doppelverhältnis:

$$\frac{qi-x}{-qi-x} : \frac{qi-y}{-qi-y} = \frac{qi-x}{qi+x} : \frac{qi+\frac{q^2}{x}}{qi-\frac{q^2}{x}}$$

ist $= -1$.

$$(x_1 - m)(y_1 - m) = (x_2 - m)(y_2 - m), \; (x_1 - m)(y_1 - m) = (x_3 - m)(y_3 - m);$$

das sind zwei Gleichungen für die einzige Unbekannte m, die nicht zusammen bestehen, wenn die sechs Abszissen $x_1, \ldots y_3$ beliebig sind. Wir können aber die Bedingung für diese Abszissen auffinden, damit die beiden Gleichungen zugleich bestehen, also die drei Paare zu derselben Involution gehören; wir haben nur die beiden durch sie gelieferten Werte von m gleichzusetzen. Das Ergebnis:

$$(x_1 y_1 - x_2 y_2)(x_1 + y_1 - x_3 - y_3) = (x_1 y_1 - x_3 y_3)(x_1 + y_1 - x_2 - y_2)$$

bringen wir in die elegantere Gestalt:

$$\text{(I)} \quad (x_1 - y_2)(x_2 - y_3)(x_3 - y_1) + (y_1 - x_2)(y_2 - x_3)(y_3 - x_1) = 0\,[1],$$

welche, wegen des zyklischen Fortschreitens der Zeiger, sich leicht dem Gedächtnisse einprägt: sie ist also die Beziehung zwischen den Abszissen der Punkte von drei Paaren, damit diese in Involution sind.

Die Abszisse des „sechsten Punktes Y_3 in Involution" zu $X_1 Y_1$, $X_2 Y_2$, X_3, d. h. desjenigen, der dem X_3 in der durch $X_1 Y_1$, $X_2 Y_2$ bestimmten Involution gepaart ist, muß dieser Relation genügen; und da die Relation in bezug auf y_3 vom 1. Grade ist, also nur einen Punkt Y_3 liefert, so befinden sich auch umgekehrt drei Paare, deren Abszissen sie befriedigen, in Involution.

Die Linearität der Formel in bezug auf y_3 oder vielmehr in bezug auf jede der sechs Abszissen war vorauszusehen und ebenso die Symmetrie nach den drei Zeigern. Man kann, da in jedem Paare die beiden Punkte gleichartig sich verhalten, jedes x mit dem zugehörigen y vertauschen; die Formel bleibt richtig, verliert aber dadurch ihre elegante Gestalt.

11 Ersetzen wir in der Involutionsformel die Abszissendifferenzen $x_1 - y_2, \ldots$ durch die Strecken $Y_2 X_1 = - X_1 Y_2, \ldots$, so ergibt sich die Formel:

$$\text{(I')} \qquad X_1 Y_2 \cdot X_2 Y_3 \cdot X_3 Y_1 + Y_1 X_2 \cdot Y_2 X_3 \cdot Y_3 X_1 = 0,$$

welche wir die Chaslessche Formel für drei Paare $X_1 Y_1$, $X_2 Y_2$, $X_3 Y_3$ in Involution nennen wollen.

Schreiben wir sie in der Gestalt:

$$\frac{X_2 Y_1}{X_3 Y_1} \cdot \frac{X_3 Y_2}{X_1 Y_2} \cdot \frac{X_1 Y_3}{X_2 Y_3} = +1,$$

so haben wir den Satz:

Wenn die durch drei Punkte gebildeten Strecken $X_2 X_3$, $X_3 X_1$, $X_1 X_2$ in den Punkten Y_1, Y_2, Y_3 nach Verhältnissen geteilt werden,

---

1) Die ersten Spuren involutorischer Relationen finden sich schon bei Pappus.

Produkt + 1 ist, so sind die drei Paare X_1Y_1, X_2Y_2, X_3Y_3 in ...ution.

Ein besonderer Fall hiervon ist, wenn jeder der drei Punkte Y_2, Y_3 dem X_i mit demselben Zeiger harmonisch zugeordnet ist bezug auf die beiden anderen X; denn dann ist:

$$\frac{X_2Y_1}{X_3Y_1} = -\frac{X_2X_1}{X_3X_1}, \quad \frac{X_3Y_2}{X_1Y_2} = -\frac{X_3X_2}{X_1X_2}, \quad \frac{X_1Y_3}{X_2Y_3} = -\frac{X_1X_3}{X_2X_3},$$

und das Produkt der rechten Seiten ist + 1.

Es seien X_1X_1, X_2Y_2, X_3Y_3 in Involution, und Z_3 zu Y_3 harmonisch in bezug auf X_1, X_2, dann ist:

$$\frac{X_1Y_2 \cdot X_2Y_3 \cdot X_3X_1}{X_1X_2 \cdot Y_2X_3 \cdot Y_3X_1} = -1$$

und

$$\frac{X_2Y_3}{Y_3X_1} = \frac{X_2Z_3}{X_1Z_3},$$

also:

$$\frac{X_1X_3 \cdot X_2Z_3 \cdot Y_2X_1}{X_1X_2 \cdot X_3Y_2 \cdot Z_3X_1} = -1;$$

was bedeutet, daß

$$X_1X_1, \ X_2X_3, \ Y_2Z_3$$

in Involution sind.

Wir können die Relation (I′) aber auch in eine Gleichheit zweier Doppelverhältnisse verwandeln. Wir formen sie zunächst um in:

$$X_1Y_1 \cdot X_1Y_2 \cdot X_2Y_3 \cdot X_3Y_1 = Y_1X_1 \cdot Y_1X_2 \cdot Y_2X_3 \cdot Y_3X_1,$$

also:

$$\frac{X_1Y_1}{X_2Y_1} \cdot \frac{X_2Y_3}{X_1Y_3} = \frac{Y_1X_1}{Y_2X_1} \cdot \frac{Y_2X_3}{Y_1X_3}$$

oder

(I″) $$(X_1X_2Y_1Y_3) = (Y_1Y_2X_1X_3)$$

oder

$$(X_1Y_1X_2Y_3) = (Y_1X_1Y_2X_3),$$

indem die komplementären Dopperhältnisse ja gleich sein müssen, oder auch, indem wir die gepaarten Punkte X_3, Y_3 vertauschen,

$$(X_1Y_1X_2Y_3) = (Y_1X_1Y_2Y_3).$$

Die vier Punkte des einen Doppelverhältnisses sind aus den drei Paaren genommen, aus einem beide Punkte; die gepaarten stehen dann im andern an entsprechender Stelle, die des bevorzugten Paares haben also ihre Stellung vertauscht.

Gerade diese Formel wird später wichtig werden, wenn die Involution als Spezialfall einer anderen Figur erkannt sein wird.

Kehren wir zur Abszissenformel zurück und denken uns das 12
dritte Paar veränderlich, zu welchem Zwecke wir x_3, y_3 durch x, y ersetzen:

$$(x_1 - y_2)(x_2 - y)(x - y_1) + (y_1 - x_2)(y_2 - x)(y - x_1) = 0;$$

alle Paare, deren x, y dieser Beziehung genügen, bilden die Involution, die durch die beiden Paare $(x_1 y_1, x_2 y_2)$ bestimmt ist. Nach den veränderlichen Größen angeordnet, lautet sie:

$$xy(x_1 + y_1 - x_2 - y_2) - (x + y)(x_1 y_1 - x_2 y_2) \\ + (x_1 + y_1) x_2 y_2 - (x_2 + y_2) x_1 y_1 = 0$$

und stellt sich als symmetrisch nach x und y heraus, d. h. ändert sich nicht, wenn x und y vertauscht werden.

Lassen wir nun x und y in d sich vereinigen, so haben wir:

$$d^2(x_1 + y_1 - x_2 - y_2) - 2d(x_1 y_1 - x_2 y_2) + (x_1 + y_1) x_2 y_2 - (x_2 + y_2) x_1 y_1 = 0,$$

die quadratische Gleichung für die Abszissen der beiden Doppelpunkte. Die Größe[1]), die bei der Auflösung unter dem Wurzelzeichen steht und von deren Vorzeichen es abhängt, ob die Wurzeln reell oder imaginär sind, die Involution hyperbolisch oder elliptisch ist, ist das Differenzen-Produkt

$$(x_1 - x_2)(x_1 - y_2)(y_1 - x_2)(y_1 - y_2),$$

über das wir schon oben gesprochen haben.

Ferner möge nun mit Hilfe der Abszissen-Relation in x, y, als der die Involution definierenden, diejenige Involution untersucht werden, deren bestimmende Paare denselben Mittelpunkt haben; die ursprüngliche Desarguessche Definition versagte, da wir für sie keinen Zentralpunkt fanden (Nr. 9). Wir nehmen den gemeinsamen Mittelpunkt als Anfangspunkt der Abszissen, so daß $x_1 + y_1 = 0$, $x_2 + y_2 = 0$; unsere Beziehung wird:

$$(x_2^2 - x_1^2)(x + y) = 0;$$

$x_2 = \pm x_1$ bedeutet, daß einer von den Punkten des einen gegebenen Paares mit einem des andern zusammenfällt; der gemeinsame Mittelpunkt bewirkt dann auch das Zusammenfallen der andern. Aber Identität dieser beiden Paare nehmen wir nicht an, also muß sein $x + y = 0$ oder $y = -x$; jedes Paar der Involution hat jenen Punkt zum Mittelpunkt. Diese Involution besteht also aus allen Punktepaaren, die einen festen Punkt O zum Mittelpunkt haben, deren zwei Punkte also symmetrisch in bezug auf O liegen. Ersichtlich haben zwei Paare die hyperbolische Lage, indem eins vom andern eingeschlossen wird. Die Involution ist also hyperbolisch, und in O erkennen wir sofort den einen Doppelpunkt. Die Ermittlung des andern, sowie des Zentralpunktes wird später erfolgen. Diese be[illegible] lution wird die hyperbolisch-gleichseitige genannt. [illegible] alle diese mit den Namen der Kegelschnitte zusammen-

[illegible] wenn die quadratische Gleichung $ax^2 + 2bx + c = 0$ ist. Sie [illegible] minante der quadratischen Gleichung.

enden Benennungen werden wir später im Auftreten von In-tionen bei den betreffenden Kegelschnitten finden.

Die Involutions-Relation: 13

$$(X_3 Y_3 X_1 X_2) = (Y_3 X_3 Y_1 Y_2)$$

$$\frac{X_3 X_1 \cdot X_3 Y_1}{X_3 X_2 \cdot X_3 Y_2} = \frac{Y_3 X_1 \cdot Y_3 Y_1}{Y_3 X_2 \cdot Y_3 Y_2}.$$

Nennt man $X_3 X_1 \cdot X_3 Y_1$ die Potenz des Paares $X_1 Y_1$ im Punkte so hat man:

Das Verhältnis der Potenzen zweier Paare hat in den iden Punkten eines Paares der durch sie bestimmten In-lution denselben Wert.

Es sei M der Zentralpunkt einer hyperbolischen Involution, XY beliebiges Paar, $\mathfrak{M}$ dessen Mitte und D einer der Doppelpunkte, ersetze man in:

$$MX \cdot MY = MD^2$$

e Strecken $MX, \ldots$ durch die Differenzen $OX - OM, \ldots$, wo O n beliebiger Punkt ist, und erhält:

$$X \cdot OY = OD^2 + OM(OX + OY - 2OD) = OD^2 + 2OM(O\mathfrak{M} - OD)$$
$$= OD^2 + 2OM \cdot D\mathfrak{M}.$$

Betrachten wir zuerst die Paare, die auf der andern Seite von M liegen als O; sie umschließen den auf dieser Seite gelegenen Doppelpunkt D_1; der andere sei D_2. Beide liegen, weil harmonisch zu XY, auf derselben Seite von $\mathfrak{M}$, also auf der wo O liegt, und OM, $D_1\mathfrak{M}$ haben dasselbe Vorzeichen. Daher ist die positive Größe $OM \cdot D_1\mathfrak{M}$ am kleinsten, wenn $\mathfrak{M}$ in D_1, d. h. XY in D_1D_1 fällt. Dann erreicht auch $OX \cdot OY$ seinen kleinsten Wert, nämlich OD_1^2. Liegt aber XY auf der andern Seite von M, wo sich O und D_2 befinden, dann ist $OM \cdot D_2\mathfrak{M}$ negativ, und $OX \cdot OY$ durchläuft in diesem Falle alle negativen Werte, die positiven nur bis zum Maximum OD_2^2, das zum Paare D_2D_2 gehört.

Die Potenz eines veränderlichen Punktepaares einer hyperbolischen Involution in einem festen Punkte O erreicht in den beiden Doppelpunkten positive Grenzwerte und zwar ein Minimum in dem von O entfernteren, ein Maximum in dem näheren; jenes ist größer wie dieses, und die Zwischenwerte werden nicht durchlaufen.[1])

Bei den anderen Involutionen werden alle Werte durchlaufen.

Es ergab sich, daß dem Werte $+m$ des Parameters kein end- 14
licher Punkt entspricht, und daß so die sonst eindeutige Beziehung

---

[1]) Vgl. Apollonius' Schrift vom bestimmten Schnitt, und Zeuthens Geschichte der Mathematik im 16. und 17. Jahrhundert S. 317.

zwischen Punkt und Parameter eine Lücke hat; wir fanden weiter, daß wir uns mit dem Parameter diesem Werte $+m$ immer mehr und unbegrenzt nähern, je weiter sich X auf u entfernt, und zwar gleichgültig, nach welcher Seite dies geschieht, in dem einen Falle von oben, in dem andern von unten her. Führen wir einen einzigen unendlich fernen Punkt für die Gerade u ein, ihren unendlich fernen Punkt, dem dann der Parameter $+m$ (das Teilverhältnis $+1$) zukommt, so entfernen wir diese Lücke. Wir haben ihn ebenso auf der einen, als auf der anderen Seite von u liegend zu denken; er vermittelt den kontinuierlichen Übergang von der einen Seite auf die andere, und diesem kontinuierlichen Übergange entspricht der kontinuierliche Durchgang des Parameters durch $+m$. Wir werden bald über die Punktreihe einen Strahlenbüschel stellen und dadurch von neuem zu dieser Einführung des unendlich fernen Punktes der Gerade gedrängt werden, um auch für den Strahl des Büschels, der zum Träger der Punktreihe parallel ist, einen entsprechenden Schnitt zu bekommen. Diese Einführung ist nicht neu; sie geht zurück auf die Maler der Renaissance und die Mathematiker des 17. Jahrhunderts, vornehmlich Desargues und Newton; freilich hat das 19. Jahrhundert erst dauernd diesen Begriff der Geometrie einverleibt.

Ist D der unendlich ferne Punkt, so ist $\frac{AD}{BD} = +1$ und das Doppelverhältnis $(ABCD)$ geht über in das einfache $\frac{AC}{BC}$.

Der unendlich ferne Punkt füllt nun auch die Lücke aus, daß in bezug auf zwei Punkte der Mitte zwischen ihnen kein Punkt harmonisch zugeordnet ist; er ist der vierte harmonische Punkt, so daß nun die gegenseitige eindeutige Zuordnung zweier in bezug auf zwei feste Punkte harmonischen Punkte ohne Ausnahme ist. Der unendlich ferne Punkt ist der noch fehlende in einer Involution dem Zentralpunkt gepaarte Punkt.

Wir schreiben die Abszissen-Relation, mit y dividierend, in der Form:

$$(x_1 - y_2)\left(\frac{x_2}{y} - 1\right)(x - y_1) + (y_1 - x_2)(y_2 - x)\left(1 - \frac{x_1}{y}\right) = 0,$$

setzen $y = \infty$ und suchen das zugehörige x; es ergibt sich:

$$-(x_1 - y_2)(x - y_1) + (y_1 - x_2)(y_2 - x) = 0$$

und durch Auflösung nach x:

$$x = \frac{x_1 \cdot y_1 - x_2 \cdot y_2}{x_1 + y_1 - x_2 - y_2} = m;$$

d. h. dem unendlich fernen Punkt ist der Zentralpunkt gepaart.

Zu diesem ausgezeichneten Paare ist, in einer elliptischen Involution, harmonisch dasjenige Paar, dessen Mitte der Zentralpunkt ist (Nr. 8).

Bei der hyperbolisch-gleichseitigen Involution, deren Punktepaare alle dieselbe Mitte haben, erkennen wir, weil mit OX auch OY unendlich groß wird, den unendlich fernen Punkt als den zweiten Vereinigungspunkt gepaarter Punkte; ist er doch zum andern, dem gemeinsamen Mittelpunkte, harmonisch in bezug auf jedes Paar. Aber auch der Zentralpunkt liegt im unendlich fernen Punkt; er muß ja in der Mitte zwischen den beiden Doppelpunkten liegen und geht, wenn der eine im Endlichen bleibt, der andere aber ins Unendliche sich entfernt, gleichfalls dahin. Als unendlich ferner Punkt ist er eben zur Definition der Involution als System der Punktepaare mit festem Entfernungsprodukte vom Zentralpunkte ungeeignet.

Wir konnten den Parameter als Doppelverhältnis auffassen (Nr. 5); wir bestimmen den Punkt H so, daß $\frac{GH}{FH} = m$ ist, dann ist:

$$\lambda = m\frac{FX}{GX} = \frac{FX}{GX}\cdot\frac{GH}{FH} = (FGXH);$$

schreiben wir dies in der Form:

$$\lambda = \frac{HG}{XG}\cdot\frac{FX}{FH},$$

nehmen wir dann G im Unendlichen an, so daß $\frac{HG}{XG} = +1$ ist, und H in der Entfernung 1 von F, so ergibt sich:

$$\lambda = FX;$$

und wir haben die Bestimmung des Punktes einer Punktreihe durch die Abszisse als Spezialfall der Bestimmung durch den Parameter erkannt.

§ 2. Der Strahlen- und der Ebenenbüschel.

Der Punkt einer Punktreihe ist durch eine Größe bestimmt, 15
den Parameter; es ergeben sich alle Punkte (einschließlich des unendlich fernen), wenn der Parameter alle Zahlenwerte von $-\infty$ bis $+\infty$ durchläuft. Daher ist die Punktreihe ein einfach unendliches Gebilde, ein Gebilde erster Stufe, und zwar wegen seiner Einfachheit im Vergleich mit andern einstufigen Gebilden ein Grundgebilde erster Stufe. Es gibt noch zwei andere Grundgebilde erster Stufe:

1. den Strahlenbüschel, den Inbegriff aller geraden Linien (Strahlen), welche in einer festen Ebene — Trägerebene — durch einen festen Punkt — Scheitel, Grund- oder Mittelpunkt — gehen,

2. den Ebenenbüschel, den Inbegriff aller Ebenen durch eine feste Gerade — die Axe.

Die Elemente dieser drei Grundgebilde erster Stufe sind also bzw. Punkte, Strahlen, Ebenen; die Punktreihe und der Ebenen-

büschel haben einen Träger — die feste Gerade; der Strahlenbüschel hat zwei Träger, die Ebene und den Scheitel.

Wir wenden uns zunächst zum Strahlenbüschel; er hat auch zwei entgegengesetzte Sinne, in denen er durchlaufen werden kann: den einen nehmen wir als den positiven Sinn. Sind a, b zwei Strahlen des Büschels, so haben wir bekanntlich vier Winkel, welche zwei Paare Scheitelwinkel bilden. Für viele Zwecke ist es gut, die beiden Scheitelwinkel zusammen als vollen Winkel aufzufassen (Staudt); z. B. bei Lagenbeziehungen: ein weiterer Strahl des Büschels liegt entweder in dem einen oder in dem andern vollen Winkel von a und b. Wird nun noch jedem der Strahlen a, b ein positiver Sinn gegeben, so daß er dann in einen positiven und einen negativen Halbstrahl durch den Scheitel geteilt wird, so versteht man unter dem Winkel ab jeden der beiden Scheitelwinkel, welche durch die positiven bzw. die negativen Halbstrahlen eingeschlossen werden (ev. auch den vollen Winkel), mit dem Sinne von a nach b; infolgedessen ist:

$$ba = -ab.$$

Jeden der andern Winkel (bzw. den vollen) nennen wir dann $a \cdot b$. Es ist $\cos ba = \cos ab$, aber: $\sin ba = -\sin ab$, $\operatorname{tang} ba = -\operatorname{tang} ab$, $\operatorname{cotg} ba = -\operatorname{cotg} ab$. Bei drei Strahlen eines Büschels a, b, c haben wir nicht unbedingt:

$$ab + bc + ca = 0,$$

sondern nur dann, wenn die drei positiven Halbstrahlen innerhalb eines flachen Winkels sich befinden, welche Lage daher die empfehlenswerteste ist. Im andern Falle ist die Summe $\pm 2\pi$; so daß, wenn $\varepsilon = -1$ oder 0 oder $+1$ ist:

$$ab + bc + ca = \varepsilon \cdot 2\pi,$$

also:

$$ab + bc = \varepsilon \cdot 2\pi + ac,$$

$$ab = \varepsilon \cdot 2\pi + (ac - bc),$$

$$= \varepsilon \cdot 2\pi + (cb - ca).$$

Also kann man in jedem Falle unter dem Zeichen einer trigonometrischen Funktion $ab + bc$ durch ac, ab durch $ac - bc$ oder $cb - ca$ ersetzen, und umgekehrt.

Folglich ist

$$\cos ab = \cos (ac + cb) = \cos ac \cos cb - \sin ac \sin cb,$$

$$\sin ac \sin cb = \cos ac \cos cb - \cos ab$$

und

$$(1 - \cos ac^2)(1 - \cos bc^2) = \cos ac^2 \cos cb^2 - 2 \cos ac \cos cb \cos ab + \cos ab^2;$$

daher:

$$\cos ac^2 + \cos cb^2 - 2 \cos ac \cos cb \cos ab = \sin ab^2,$$

oder wenn α, β, γ die absoluten Werte von bc, ca, ab sind:

$$\cos \alpha^2 + \cos \beta^2 - 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma = \sin \gamma^2.$$

Die Strahlen a, b seien rechtwinklig zu einander und o ein dritter Strahl im Büschel, so ist:

$$\cos ab = \cos (ob - oa) = \cos ob \cos oa + \sin ob \sin oa = 0,$$

also:

$$\operatorname{cotg} oa \cdot \operatorname{cotg} ob = -1, \quad \operatorname{tang} oa \cdot \operatorname{tang} ob = -1,$$

oder auch:

$$\operatorname{cotg} ao \cdot \operatorname{cotg} bo = -1, \ldots$$

Tangente und Kotangente haben vor den andern Funktionen 16
hinsichtlich der Bestimmung eines Strahles im Büschel einen wesentlichen Vorzug. Erstens wenn bei einem der beiden Strahlen a, b der positive Sinn umgekehrt wird, geht der bisherige Winkel ab, der etwa α sei, in $-(\pi - \alpha) = \alpha - \pi$ über, was an Tangente und Kotangente nichts ändert; also sind diese Funktionen von ab von den positiven Sinnen auf den Schenkeln unabhängig; es ist nur wichtig zu wissen, welcher Anfangs- und welcher Endschenkel ist. Daraus folgt, daß, wenn o gegeben ist, durch $\operatorname{tang} ox$ oder $\operatorname{cotg} ox$ der Strahl x eindeutig bestimmt ist; denn zu der Funktion gibt es zwei zugehörige Winkel, die sich um π unterscheiden, also α und $\alpha + \pi$; von welchem Halbstrahle von o auch ausgegangen wird, der eine Winkel führt zu dem einen, der andere zu dem andern Halbstrahle eines und desselben Strahles x, so daß dieser eindeutig bestimmt ist. Hingegen $\sin ox$ (oder $\cos ox$) bestimmt nicht eindeutig; zu $\sin ox$ gehören zwei Winkel α und $\pi - \alpha$, die zu zwei Halbstrahlen führen, die nicht demselben Strahle angehören.

Im Strahlenbüschel verhalten sich daher $\operatorname{tang} ox$ oder $\operatorname{cotg} ox$ analog wie OX in der Punktreihe. Weil die Kotangente ständig fällt, wenn der Winkel von o bis π (oder von $-\pi$ bis o) wächst, also bei $\frac{\pi}{2}$ nicht unstetig ist und im ganzen Intervall aus $\operatorname{cotg} \alpha < \operatorname{cotg} \beta$ auf $\alpha > \beta$ geschlossen werden kann, auch wenn α und β durch $\frac{\pi}{2}$ getrennt werden, so erweist sich die Kotangente als der Tangente vorzuziehen. Bisweilen aber wird auch diese ihre Vorzüge haben.

Für vier Strahlen eines Büschels, a, b, c, d haben wir eine der Eulerschen Formel entsprechende:

$$\sin bc \sin ad + \sin ca \sin bd + \sin ab \sin cd = 0,$$

welche ganz ähnlich bewiesen wird.

17 Wir nennen wieder $\frac{\sin fx}{\sin gx}$ das Teilverhältnis von x in bezug auf f, g; es ist negativ oder positiv, je nachdem x in fg oder $f \cdot g$ liegt. Der Parameter eines Strahles x in bezug auf zwei Grundstrahlen f, g ist:

$$\lambda = m \frac{\sin fx}{\sin gx}.$$

Bemerken wir, daß er unabhängig von den positiven Sinnen im Büschel und auf x ist; denn deren Umkehrung bewirkt zwei sich aufhebende Vorzeichenwechsel.

Der Parameter λ bestimmt eindeutig den Strahl x; ersetzt man nämlich fx (unter dem Sinus) durch $fg + gx$, so ergibt sich:

$$m \sin fg \operatorname{cotg} gx + m \cos fg = \lambda;$$

hierdurch ist $\operatorname{cotg} gx$ eindeutig bestimmt und demnach auch x.

Je nachdem x im vollen Winkel fg oder in $f \cdot g$ liegt, hat λ das Vorzeichen von $-m$ oder das von m; den Grundstrahlen f, g kommen die Parameter $0, \pm\infty$ zu, den Halbierungsstrahlen von fg und $f \cdot g$ die Parameter $-m, m$. Hier ist von vornherein ein zu m gehöriges Element da; wir brauchen kein uneigentliches Element einzuführen. Das ist ein Vorzug des Strahlenbüschels (mit endlichem Scheitel) vor der Punktreihe.

Nehmen wir zueinander rechtwinklige Grundstrahlen f, g und $m = \sin fg$, so ergibt sich, da $\cos fg = 0$, $\sin fg^2 = 1$:

$$\lambda = \operatorname{cotg} gx;$$

wenn aber $m = -\sin fg$, so hat man: $\lambda = -\operatorname{cotg} gx = \operatorname{tang} fx$, weil (Nr. 15) $\operatorname{cotg} gx \cdot \operatorname{cotg} fx = -1$.

Die Bestimmung durch Kotangente oder Tangente subsumiert sich derjenigen durch den Parameter.

In ähnlicher Weise, wie in der Punktreihe, gelangen wir zum Doppelverhältnis von vier Strahlen:

$$(abcd) = \frac{\sin ac}{\sin bc} : \frac{\sin ad}{\sin bd};$$

es ist unabhängig von den positiven Sinnen im Büschel und auf den Strahlen; denn jede Umkehrung bewirkt sich aufhebende Zeichenwechsel.

Sind $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ die Parameter der vier Strahlen, so ist ebenfalls:

$$(abcd) = \frac{\alpha - \gamma}{\beta - \gamma} : \frac{\alpha - \delta}{\beta - \delta};$$

denn es ist $\alpha = m \sin fg \operatorname{cotg} ga + m \cos fg, \ldots,$ also:

$$\alpha - \gamma = m \sin fg (\operatorname{cotg} ga - \operatorname{cotg} gc) = m \sin fg \left(\frac{\cos ga}{\sin ga} - \frac{\cos gc}{\sin gc}\right)$$

$$= m \sin fg \frac{\sin (gc - ga)}{\sin ga \sin gc} = m \sin fg \frac{\sin ac}{\sin ga \cdot \sin gc}, \text{ usw.}$$

Wir unterscheiden auch hier hyperbolische, elliptische und parabolische Lage der Strahlenpaare ab, cd mit ähnlicher Definition wie früher; bei der ersten ist $(abcd)$ positiv, bei der zweiten negativ, bei der dritten 0 oder ∞.

Die Beziehungen zwischen den 24 Doppelverhältnissen von vier Strahlen eines Büschels sind dieselben wie die von vier Punkten einer Punktreihe und werden ebenso bewiesen, z. B. daß

$$(abcd) + (acbd) = 1,$$

unter Benutzung der zur Eulerschen analogen Formel (Nr. 16).

Ferner:

$$\lambda = (abcd)$$

führt zu:

$$\sin ac \sin (bc - dc) = \lambda \sin bc \sin (ac - dc)$$

und zu:

$$(1 - \lambda) \operatorname{cotg} dc = \operatorname{cotg} bc - \lambda \operatorname{cotg} ac,$$

oder:

$$\frac{1-\lambda}{\operatorname{tang} dc} = \frac{1}{\operatorname{tang} bc} - \frac{\lambda}{\operatorname{tang} ac};$$

also, in den Tangenten geschrieben, wird die Formel der entsprechenden (Nr. 6) analog.

Wenn $(abcd) = -1$, so sagen wir wiederum, daß die Strahlen- 18
paare ab und cd einander harmonisch trennen. Aus der eben erhaltenen Formel ergibt sich dann:

$$2 \operatorname{cotg} dc = \operatorname{cotg} ac + \operatorname{cotg} bc.$$

Zu den Strahlen a, b sind ersichtlich die Halbierungsstrahlen ihrer Winkel ab, $a \cdot b$ harmonisch.

Umgekehrt, wenn a, b und c, d sich harmonisch trennen und c, d rechtwinklig zueinander sind, so halbieren sie die Winkel ab und $a \cdot b$; denn dann ist $\operatorname{cotg} dc = 0$, also $\operatorname{cotg} bc = -\operatorname{cotg} ac$, d. h. $bc = -ac$ oder $= \pi - ac$; im ersten Falle halbiert c den Winkel ab, also d den Winkel $a \cdot b$, im zweiten Falle umgekehrt.

Es sei nun m ein beliebiger weiterer Strahl; in $(abcd) = -1$, oder:

$$\sin ac \cdot \sin bd = - \sin bc \cdot \sin ad,$$

ersetzen wir ac, bc, ... durch $mc - ma$, $mc - mb$, ..., entwickeln die Sinusse der Differenzen und dividieren durch $\sin ma \cdot \sin mb \cdot \sin mc \cdot \sin md$, so ergibt sich:

$$2 (\operatorname{cotg} ma \cdot \operatorname{cotg} mb + \operatorname{cotg} mc \cdot \operatorname{cotg} md)$$
$$= (\operatorname{cotg} ma + \operatorname{cotg} mb) \; (\operatorname{cotg} mc + \operatorname{cotg} md).$$

Ist nun aber m der Halbierungsstrahl eines der Winkel ab, $a \cdot b$, so ist $\operatorname{cotg} mb = - \operatorname{cotg} ma$ und daher:

$$\operatorname{cotg} mc \cdot \operatorname{cotg} md = \operatorname{cotg} ma^2 = \operatorname{cotg} mb^2$$

und auch:

$$\operatorname{tang} mc \cdot \operatorname{tang} md = \operatorname{tang} ma^2 = \operatorname{tang} mb^2,$$

welche Formeln zu:

$$MC \cdot MD = MA^2 = MB^2$$

(Nr. 8) analog sind.

19 Dies führt wiederum zum Begriffe der Involution im Büschel: alle Strahlenpaare cd, für welche das Produkt der Kotangenten (oder Tangenten) der Winkel mc, md von einem festen Strahle m aus einen gegebenen Wert hat, bilden eine Involution; sie heißt hyperbolisch oder elliptisch, wenn er positiv oder negativ ist, und parabolisch, wenn er 0 oder ∞ ist, was hier möglich ist. In diesem letzteren Falle haben alle Strahlenpaare den zu m rechtwinkligen Strahl bzw. den Strahl m selbst gemeinsam.

Wir können auch hier in ähnlicher Weise dartun, daß das Doppelverhältnis $(cd\,c'd')$ zweier Paare der Involution im Vorzeichen mit jenem konstanten Produkt p, der Potenz der Involution, übereinstimmt. Denn es ist:

$$(cd\,c'd') = \frac{\sin cc' \cdot \sin dd'}{\sin dc' \cdot \sin cd'} = \frac{\sin(mc' - mc) \cdot \sin(md' - md)}{\sin(mc' - md) \cdot \sin(md' - mc)}$$

$$= \frac{\operatorname{cotg} mc - \operatorname{cotg} mc'}{\operatorname{cotg} md - \operatorname{cotg} mc'} \cdot \frac{\operatorname{cotg} md - \operatorname{cotg} md'}{\operatorname{cotg} mc - \operatorname{cotg} md'}$$

$$= \frac{\operatorname{cotg} mc - \operatorname{cotg} mc'}{\dfrac{p}{\operatorname{cotg} mc} - \operatorname{cotg} mc'} \cdot \frac{p\left(\dfrac{1}{\operatorname{cotg} mc} - \dfrac{1}{\operatorname{cotg} mc'}\right)}{\operatorname{cotg} mc - \dfrac{p}{\operatorname{cotg} mc'}}$$

$$= p \cdot \left(\frac{\operatorname{cotg} mc - \operatorname{cotg} mc'}{p - \operatorname{cotg} mc \cdot \operatorname{cotg} mc'}\right)^2.$$

Also haben bei der hyperbolischen oder elliptischen Involution zwei Strahlenpaare hyperbolische oder elliptische Lage.

Wenn zwei Strahlenpaare $x_1 y_1$, $x_2 y_2$ gegeben sind, so fragt es sich, ob wir einen Zentralstrahl m finden können, für den:

$$\operatorname{cotg} mx_1 \cdot \operatorname{cotg} my_1 = \operatorname{cotg} mx_2 \cdot \operatorname{cotg} my_2.$$

Wir führen einen Anfangsstrahl o ein, setzen

$$\operatorname{cotg} ox_1 = \xi_1,\ \operatorname{cotg} oy_1 = \eta_1,\ \ldots,\ \operatorname{cotg} om = \mu.$$

Nun ist:

$$\operatorname{cotg} mx_1 = \operatorname{cotg}(ox_1 - om) = \frac{1 + \mu\xi_1}{\mu - \xi_1}, \ldots\ldots$$

Demnach ist:

$$(\xi_1\eta_1 - \xi_2\eta_2)(\mu^4 - 1) + [(\xi_1 + \eta_1)\xi_2\eta_2 - (\xi_2 + \eta_2)\xi_1\eta_1 + \xi_1 + \eta_1 - \xi_2 - \eta_2](\mu^3 + \mu) = 0$$

oder, nach Division mit $\mu^2 + 1$:

$$A(\mu^2 - 1) + B\mu = 0$$

oder

$$\mu^2 + \alpha\mu - 1 = 0,$$

wo

$$\alpha = \frac{(\xi_1 + \eta_1)\,\xi_2\eta_2 - (\xi_2 + \eta_2)\,\xi_1\eta_1 + \xi_1 + \eta_1 - \xi_2 - \eta_2}{\xi_1\eta_1 - \xi_2\eta_2} = \frac{B}{A},$$

somit:

$$\mu = -\frac{\alpha}{2} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + 1}.$$

Die Wurzeln sind also reell.

Wir haben daher stets zwei reelle Strahlen m und m', welche der Forderung genügen, mit $x_1 y_1$ und $x_2 y_2$ gleiche Kotangentenprodukte zu bilden, und weil das Produkt der Wurzeln $\operatorname{cotg} om$, $\operatorname{cotg} om'$ gleich -1 ist, so sind die beiden Strahlen rechtwinklig zueinander. Folglich ist wiederum, wenn x, y irgend zwei Strahlen des Büschels sind:

$$\operatorname{cotg} mx \cdot \operatorname{cotg} m'x = -1, \quad \operatorname{cotg} my \cdot \operatorname{cotg} m'y = -1,$$

also:

$$\operatorname{cotg} m'x \cdot \operatorname{cotg} m'y = \frac{1}{\operatorname{cotg} mx \cdot \operatorname{cotg} my}.$$

Wenn demnach die Strahlenpaare $x_1 y_1$, $x_2 y_2$ mit m gleiche Kotangentenprodukte bilden, so tun sie es auch mit m', und zwar ist der eine Wert zum andern reziprok; und jedes weitere Paar xy, welches mit m jenes Kotangentenprodukt bildet, bildet mit m' dieses. Mithin führen die beiden Strahlen m, m' nicht zu zwei verschiedenen Involutionen, sondern zu einer und derselben.

Zwei Strahlenpaare $x_1 y_1$, $x_2 y_2$ bestimmen eindeutig eine Involution. Dieselbe hat zwei Zentralstrahlen, welche rechtwinklig zueinander sind, und ihnen zugehörig zwei Potenzen, welche reziprok zueinander sind.

Ferner ist:

$$\operatorname{tang} mx \cdot \operatorname{tang} my = \frac{1}{\operatorname{cotg} mx \operatorname{cotg} my} = \operatorname{cotg} m'x \operatorname{cotg} m'y,$$

also ist das zu m, bzw. m' gehörige Tangentenprodukt gleich dem zu m' bzw. m gehörigen Kotangentenprodukte.

Die beiden Zentralstrahlen m, m' bilden selbst ein Paar der Involution; denn wenn x nach m fällt, so ist $\operatorname{cotg} mx = \infty$, also $\operatorname{cotg} my = 0$, d. h. y fällt nach m'.

Die Wurzeln aus der Potenz geben die reellen, bzw. konjugiert imaginären Doppelstrahlen[1]) d_1, d_2, zu denen sämtliche Paare der Involution harmonisch sind, weil

$$\operatorname{cotg} mx \cdot \operatorname{cotg} my = \operatorname{cotg} md_1{}^2 = \operatorname{cotg} md_2{}^2.$$

1) Asymptoten, Ordnungsstrahlen usw.

Weil d_1, d_2 auch zu m, m' harmonisch sind, so sind diese die Halbierungsstrahlen der Winkel $d_1 d_2$, $d_1 \cdot d_2$. Also auch wenn d_1, d_2 imaginär sind, haben ihre Winkel reelle Halbierungsstrahlen, ähnlich wie bei der elliptischen Punktinvolution der Mittelpunkt M der Strecke zwischen den imaginären Doppelpunkten D_1, D_2 reell ist.

20 Die beiden Potenzen werden einander gleich, wenn sie einen der Werte $+1$ oder -1 haben. Im letzteren Falle ist für jedes Paar der Involution:

$$\operatorname{cotg} mx \cdot \operatorname{cotg} my = -1;$$

jede zwei gepaarten Strahlen sind rechtwinklig zueinander.

Diese ausgezeichnete elliptische Involution — rechtwinklige, orthogonale, zirkulare Involution — besteht aus lauter rechtwinkligen Paaren und wird durch die Drehung eines rechten Winkels um den Scheitel erzeugt.

Weil zwei Paare eindeutig eine Involution bestimmen, so ist eine Involution mit zwei rechtwinkligen Paaren mit der rechtwinkligen in ihrem Büschel identisch.

In einer Involution von Strahlen, welche zwei rechtwinklige Paare besitzt, sind alle Paare rechtwinklig.

Wenn sowohl $\xi_1 \eta_1 = -1$, als auch $\xi_2 \eta_2 = -1$, so wird die obige quadratische Gleichung in μ, welche die Zentralstrahlen liefert, eine Identität, denn dann ist $A = B = 0$, und sie wird durch jeden Wert von μ befriedigt: jeder Strahl des Büschels ist Zentralstrahl.

Jede andere Strahleninvolution hat nur ein, aber auch stets ein (reelles) rechtwinkliges Paar, das der Zentralstrahlen oder der *Axen* der Involution, wie sie auch genannt werden.

Diejenige Involution, deren Potenzen $+1$ sind, ist hyperbolisch; sind d_1, d_2 die Doppelstrahlen, so ist

$$\operatorname{cotg} md_1{}^2 = \operatorname{cotg} md_2{}^2 = 1,$$

also:

$$\operatorname{cotg} md_1 = +1, \ \operatorname{cotg} md_2 = -1,$$

mithin:

$$\operatorname{cotg} md_1 \cdot \operatorname{cotg} md_2 = -1;$$

d. h. die Doppelstrahlen sind rechtwinklig zueinander; weil sie harmonisch sind zu je zwei gepaarten Strahlen x, y, so halbieren sie deren Winkel. *Diese Involution besteht also aus allen Strahlenpaaren, deren Winkel zwei feste (zueinander rechtwinklige) Strahlen zu Halbierungsstrahlen haben.* Sie zeigt sich so analog zu der gleichseitig-hyperbolischen Punktinvolution und führt deshalb denselben Namen.

In einer (nicht rechtwinkligen) elliptischen Involution sei m der-

jenige Zentralstrahl, der sich im spitzen Winkel eines Paares xy befindet; wir geben den beiden spitzen Winkeln xm, my positiven Sinn; der absolute Wert der auf m bezüglichen Potenz in Tangenten ist $\operatorname{tang} xm \cdot \operatorname{tang} my$. Nun ist:

$$\operatorname{tang} xy = \operatorname{tang}(xm + my) = \frac{\operatorname{tang} xm + \operatorname{tang} my}{1 - \operatorname{tang} xm \operatorname{tang} my};$$

weil nun xm, my und xy positive spitze Winkel sind, so muß

$$1 > \operatorname{tang} xm \cdot \operatorname{tang} my$$

sein. Die für den genannten Zentralstrahl gebildete Tangentenpotenz ist also echt, die für den andern demnach unecht.

Folglich befindet sich derjenige Zentralstrahl, für welchen die Tangentenpotenz echt ist, im spitzen Winkel aller Paare und der andere im stumpfen.

Ist jene Potenz, mit Vorzeichen behaftet, also $\operatorname{tang} mx \cdot \operatorname{tang} my = p = -q^2$, so haben wir:

$$\operatorname{tang} xy^2 = \frac{(\operatorname{tang} xm - \operatorname{tang} my)^2 + 4q^2}{(1 - q^2)^2};$$

daher ist der spitze Winkel xy am kleinsten, wenn $xm = my$.

Unter den Paaren einer elliptischen Strahleninvolution bildet dasjenige den kleinsten (spitzen) Winkel, welches die Zentralstrahlen zu Halbierungslinien seiner Winkel hat.

Das dritte Grundgebilde, der Ebenenbüschel, kann wegen der 21
großen Analogie zum Strahlenbüschel kurz erledigt werden. Wir legen ebenfalls einen positiven Drehsinn in ihn, setzen bei jeder Ebene des Büschels fest, welche von den beiden durch die Axe gebildeten Halbebenen die positive ist; dies führt dann zur Definition der Winkel $\alpha\beta$ und $\alpha \cdot \beta$ zweier Ebenen α, β des Büschels, bzw. der beiden vollen Winkel, ferner zur Bestimmung einer Ebene durch $\operatorname{cotg} \omega\xi$ oder durch den Parameter $m \cdot \frac{\sin \varphi\xi}{\sin \gamma\xi}$, zum Doppelverhältnis

$$(\alpha\beta\gamma\delta) = \frac{\sin \alpha\gamma}{\sin \beta\gamma} : \frac{\sin \alpha\delta}{\sin \beta\delta},$$

zu harmonischen Ebenen und zur Ebeneninvolution: die ausführliche Erörterung würde nur eine Wiederholung des beim Strahlenbüschel Gesagten sein mit der einzigen Änderung, daß „Strahl" durch „Ebene", die kleinen lateinischen Buchstaben durch die griechischen ersetzt werden.

§ 3. Gemeinsame Betrachtung der drei Grundgebilde. Lineare Substitution.

22 Wir nehmen daher eine Betrachtung über die Involution vor, welche für alle drei Grundgebilde zugleich gilt.

Wenn α, β, γ, δ die Parameter von 4 Elementen des Gebildes sind — die wir zugleich als Namen dieser Elemente benutzen —, so ist ihr Doppelverhältnis

$$\frac{\alpha-\gamma}{\beta-\gamma} : \frac{\alpha-\delta}{\alpha-\delta};$$

α, β sind zu γ, δ harmonisch, wenn:

$$\frac{\alpha-\gamma}{\beta-\gamma} = -\frac{\alpha-\delta}{\beta-\delta}$$

oder:

(H) $$\alpha\beta - \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)(\gamma+\delta) + \gamma\delta = 0$$

(Harmonizitäts-Relation).

Das bewegliche Paar $\lambda\mu$ ist also zum festen $\lambda_0\mu_0$ harmonisch, wenn

$$\lambda\mu - \tfrac{1}{2}(\lambda_0+\mu_0)(\lambda+\mu) + \lambda_0\mu_0 = 0.$$

Durch die λ, μ entsteht eine hyperbolische Involution mit den Doppelelementen λ_0, μ_0. Mit diesen Größen λ_0, μ_0 bleiben auch fest $\lambda_0 + \mu_0 = -2\varrho_0$, $\lambda_0\mu_0 = \sigma_0$, und wir können schreiben:

(I) $$\lambda\mu + \varrho_0(\lambda+\mu) + \sigma_0 = 0.$$

Nach bekannter Eigenschaft der quadratischen Gleichungen sind λ_0, μ_0 die Wurzeln von:

$$x^2 + 2\varrho_0 x + \sigma_0 = 0.$$

Statt von λ_0, μ_0 können wir von ϱ_0, σ_0 ausgehen, aber wenn wir λ_0, μ_0 reell haben wollen, nur mit der Beschränkung $\varrho_0^2 - \sigma_0 \geqq 0$. Wir lassen aber dieselbe fallen und haben die allgemeine Involution, definiert durch (I); sie ist hyperbolisch, elliptisch, parabolisch, je nachdem

$$\varrho_0^2 - \sigma_0 > 0, \quad < 0, \quad = 0$$

ist.

Wenn nun wieder zwei Paare $\lambda_1\mu_1$, $\lambda_2\mu_2$ gegeben sind, so läuft die Bestimmung der Involution auf diejenige von ϱ_0, σ_0 hinaus; wir haben:

$$\sigma_0 + \varrho_0(\lambda_1+\mu_1) + \lambda_1\mu_1 = 0, \quad \sigma_0 + \varrho_0(\lambda_2+\mu_2) + \lambda_2\mu_2 = 0,$$

welche in ϱ_0, σ_0 vom 1. Grade sind, also sie eindeutig und reell bestimmen; es ergibt sich:

$$\varrho_0 = \frac{\lambda_2\mu_2 - \lambda_1\mu_1}{\lambda_1+\mu_1-\lambda_2-\mu_2}, \quad \sigma_0 = \frac{\lambda_1\mu_1(\lambda_2+\mu_2) - \lambda_2\mu_2(\lambda_1+\mu_1)}{\lambda_1+\mu_1-\lambda_2-\mu_2}.$$

Will man freilich noch λ_0, μ_0, so hat man diese Werte in die obige Gleichung 2. Grades in x einzusetzen und diese aufzulösen. Wir finden als Bedingung dafür, daß die Doppelelemente reell und verschieden, reell und vereinigt, konjugiert[1]) imaginär sind:

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \mu_2)(\mu_1 - \lambda_2)(\mu_1 - \mu_2) > 0, = 0, < 0.$$

Wir sehen, daß die Kennzeichen für die drei Arten, welche wir für die Punktinvolution und zwar unter der Voraussetzung, daß die Punkte durch Abszissen bestimmt werden, gefunden haben, in allen drei Fällen und für die allgemeinere Bestimmung durch den Parameter gelten.

Die Elemente λ_0, μ_0 bilden das Paar, das gleichzeitig zu $\lambda_1\mu_1$ und zu $\lambda_2\mu_2$ harmonisch ist, oder auch das gemeinsame Paar der beiden hyperbolischen Involutionen, welche λ_1, μ_1 bzw. λ_2, μ_2 zu Doppelelementen haben. Dies Paar besteht aus reellen, vereinigten, imaginären Elementen — wie kürzer gesagt werden mag —, je nachdem die beiden Paare $\lambda_1\mu_1$, $\lambda_2\mu_2$ hyperbolische, parabolische oder elliptische Lage haben.

Soll nun auch $\lambda\mu$ zu der durch $\lambda_1\mu_1$, $\lambda_2\mu_2$ bestimmten Involution gehören, oder veränderlich sie erzeugen, so muß auch

$$\sigma_0 + \varrho_0(\lambda + \mu) + \lambda\mu = 0$$

sein. Dies führt uns, wenn die Werte von ϱ_0, σ_0 eingesetzt werden, nach einigen Umformungen zu folgenden verschiedenen Gestalten der Involutionsbeziehung für drei Elementenpaare $\lambda_1\mu_1$, $\lambda_2\mu_2$, $\lambda\mu$:

$$(\mathrm{I}_1)\qquad \lambda\mu(\lambda_1 + \mu_1 - \lambda_2 - \mu_2) + \lambda_1\mu_1(\lambda_2 + \mu_2 - \lambda - \mu) + \lambda_2\mu_2(\lambda + \mu - \lambda_1 - \mu_1) = 0,$$

$$(\mathrm{I}_2)\qquad (\lambda + \mu)(\lambda_2\mu_2 - \lambda_1\mu_1) + (\lambda_1 + \mu_1)(\lambda\mu - \lambda_2\mu_2) + (\lambda_2 + \mu_2)(\lambda_1\mu_1 - \lambda\mu) = 0,$$

$$(\mathrm{I}_3)\qquad \lambda\mu(\lambda_1 + \mu_1 - \lambda_2 - \mu_2) + (\lambda + \mu)(\lambda_2\mu_2 - \lambda_1\mu_1) + \lambda_1\mu_1(\lambda_2 + \mu_2) - \lambda_2\mu_2(\lambda_1 + \mu_1) = 0\text{[2]},$$

$$(\mathrm{I}_4)\qquad (\lambda_1 - \mu_2)(\lambda_2 - \mu)(\lambda - \mu_1) + (\mu_1 - \lambda_2)(\mu_2 - \lambda)(\mu - \lambda_1) = 0.$$

---

1) Statt „konjugiert" in Verbindung mit „imaginär" hat, wegen der vielen Bedeutungen, welche „konjugiert" sonst schon in der Geometrie hat, Staudt „konjungiert" gesagt; es ist aber nicht angenommen worden. Thomä schlägt „aggregirt ideal" statt „konjugiert imaginär" vor (Theorie der Kegelschnitte [1894] S. 79).

2) Die drei ersten können auch in Determinantenform geschrieben werden:

$$\begin{vmatrix} \lambda\mu, & \lambda + \mu, & 1 \\ \lambda_1\mu_1, & \lambda_1 + \mu_1, & 1 \\ \lambda_2\mu_2, & \lambda_2 + \mu_2, & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Die letzte hat denselben Bau wie die für drei Punktepaare in Involution in den Abszissen; sie ist allgemeiner und umfaßt sie.

Bemerkenswert ist die Linearität in allen 6 Parametern, insbesondere in denen des beweglichen Paares; sie drückt eben aus, daß jedes der beiden Elemente desselben das andere eindeutig bestimmt. In (I_3), welche die Form:

$$\alpha\lambda\mu + \beta(\lambda + \mu) + \gamma = 0$$

hat, tritt diese Linearität am deutlichsten hervor; beachten wir aber noch, daß diese Gleichung in bezug auf λ und μ symmetrisch ist, d. h. durch Vertauschung von λ und μ sich nicht ändert; gepaarte Elemente sind vertauschbar. Die Linearität bleibt, die Symmetrie aber hört auf, wenn an Stelle dieser Beziehung die allgemeinere tritt:

$$\text{(P)} \qquad \alpha\lambda\mu + \beta\lambda + \beta'\mu + \gamma = 0,$$

wo $\beta' \gtrless \beta$ ist.

Damit ordnet sich die Involution einer allgemeineren eindeutigen Zuordnung von zwei Elementen eines Grundgebildes unter, bei der nicht Vertauschbarkeit stattfindet und die später behandelt werden wird.

Die Zuordnung gepaarter Elemente einer Involution ist die erste Verwandtschaft, auf die uns der Gang unserer Betrachtung geführt hat.

Setzen wir $\lambda = \mu = \delta$ in (I_3) ein, so erhalten wir die quadratische Gleichung für die Parameter δ der Doppelelemente:

$$\delta^2(\lambda_1 + \mu_1 - \lambda_2 - \mu_2) + 2\delta(\lambda_2\mu_2 - \lambda_1\mu_1) + \lambda_1\mu_1(\lambda_2 + \mu_2) \\ - \lambda_2\mu_2(\lambda_1 + \mu_1) = 0,$$

welche wir in derselben Gestalt für die Abszissen der Doppelpunkte einer Punktinvolution gefunden haben. Auch sie führt zum Kennzeichen:

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \mu_2)(\mu_1 - \lambda_2)(\mu_1 - \mu_2) >, \ =, \ < 0$$

für die Art der Involution.

23 Nehmen wir im Strahlenbüschel an, daß die Parameter Kotangenten seien, so ist:

$$\lambda_1 - \mu_2 = \operatorname{cotg} ox_1 - \operatorname{cotg} oy_2 = -\frac{\sin x_1 y_2}{\sin ox_1 \cdot \sin oy_2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots ;$$

also folgt aus (I_4), wo wir $\lambda\mu$ durch $\lambda_3\mu_3$ ersetzen wollen:

$$\sin x_1y_2 \cdot \sin x_2y_3 \cdot \sin x_3y_1 + \sin y_1x_2 \cdot \sin y_2x_3 \cdot \sin y_3x_1 = 0,$$

welche zu

$$X_1Y_2 \cdot X_2Y_3 \cdot X_3Y_1 + Y_1X_2 \cdot Y_2X_3 \cdot Y_3X_1 = 0$$

analog ist; wir können auch analoge Folgerungen aus ihr ziehen,

wie aus dieser Relation. Insbesondere können wir sie in die Doppelverhältnis-Gleichheit umgestalten:

$$(x_1 y_1 x_2 x_3) = (y_1 x_1 y_2 y_3.)$$

Und ähnliches gilt im Ebenenbüschel.

Eine Vergleichung der im vorangehenden für die drei Grundgebilde erhaltenen Ergebnisse wird lehren, daß, wo es sich um reine Lagenbeziehungen handelt, vollständige Analogie statthat, wo aber Maßbeziehungen eingreifen, die Analogie nur unvollständig ist.

Wenn das Element eines Grundgebildes eindeutig durch den 24
Parameter ξ bestimmt ist, so möge eine neue Größe η eingeführt werden, die in einer solchen algebraischen Beziehung zu ξ steht, daß beide sich gegenseitig eindeutig bestimmen: die Beziehung ist also in bezug auf beide vom 1. Grade, bilinear, mithin von der Form der Beziehung (P):

$$\lambda \xi \eta + \mu \xi + \mu' \eta + \nu = 0,$$

worin λ, μ, μ', ν Konstanten sind; nach ξ aufgelöst, gibt sie:

$$\xi = -\frac{\mu' \eta + \nu}{\lambda \eta + \mu}$$

oder mit anderer Bezeichnung der Konstanten:

$$\xi = \frac{\alpha \eta + \beta}{\gamma \eta + \delta},$$

woraus folgt:

$$\eta = \frac{-\delta \xi + \beta}{\gamma \xi - \alpha}.$$

Man kann schreiben:

$$\xi = \frac{\frac{\alpha}{\delta} \eta + \frac{\beta}{\delta}}{\frac{\gamma}{\delta} \eta + 1};$$

also sind die gegebenen Größen die drei Verhältnisse $\frac{\alpha}{\delta}, \ldots$

Man nennt dies Ersetzen von ξ durch η (oder umgekehrt) eine lineare Substitution. Da ξ und η sich gegenseitig eindeutig bestimmen, so ist auch η zur eindeutigen Bestimmung des Elementes geeignet; aber η ist nichts neues, sondern ebenfalls ein Parameter. Wenn die Punktreihe vorliegt, wo $\xi = m \frac{FX}{GX}$, so haben wir:

$$\eta = \frac{-\delta m \cdot FX + \beta \cdot GX}{\gamma m \cdot FX - \alpha \cdot GX};$$

die Punkte F_1 und G_1 seien durch die Teilverhältnisse

$$\frac{FF_1}{GF_1} = \frac{\beta}{\delta m}, \quad \frac{FG_1}{GG_1} = \frac{\alpha}{\gamma m}$$

oder

$$\frac{F_1F}{GF_1} = \frac{\beta}{-\delta m}, \quad \frac{G_1F}{GG_1} = \frac{-\alpha}{\gamma m}$$

bestimmt, so daß $\beta = \lambda \cdot F_1F$, $-\delta m = \lambda \cdot GF_1$, $-\alpha = \mu \cdot G_1F$, $\gamma m = \mu \cdot GG_1$; also:

$$\eta = \frac{\lambda(GF_1 \cdot FX + F_1F \cdot GX)}{\mu(GG_1 \cdot FX + G_1F \cdot GX)} = \frac{\lambda}{\mu} \cdot \frac{GF \cdot F_1X}{GF \cdot G_1X} = m_1 \frac{F_1X}{G_1X},$$

denn nach der Eulerschen Formel ist:

$$GF_1 \cdot FX + F_1F \cdot GX + FG \cdot F_1X = 0, \quad GG_1 \cdot FX + G_1F \cdot GX + FG \cdot G_1X = 0.$$

Setzt man insbesondere $\alpha = m$, $\beta = -m \cdot OF$, $\gamma = 1$, $\delta = -OG$; so ergibt sich

$$m \frac{FX}{GX} = \xi = \frac{m(\eta - OF)}{\eta - OG},$$

also:

$$(\eta - OG)FX = (\eta - OF)GX$$

oder:

$$\eta(FX + XG) = OG \cdot FX + FO \cdot GX = FG \cdot OX,$$
$$\eta = OX;$$

womit wiederum die Abszisse als Spezialfall des Parameters sich ergibt.

Im Strahlen- (und Ebenen-)büschel haben wir $\xi = m \frac{\sin fx}{\sin gx}$; also:

$$\eta = \frac{-\delta m \sin fx + \beta \cdot \sin gx}{\gamma m \cdot \sin fx - \alpha \cdot \sin gx};$$

wir bestimmen wieder die neuen Grundstrahlen f_1, g_1 durch:

$$\frac{\sin ff_1}{\sin gf_1} = \frac{\beta}{\delta m}, \quad \frac{\sin fg_1}{\sin gg_1} = \frac{\alpha}{\gamma m}$$

und erhalten:

$$\eta = m_1 \cdot \frac{\sin f_1 x}{\sin g_1 x}.$$

Nunmehr ersehen wir auch, warum man sich nicht auf das Teilverhältnis $\frac{FX}{GX}$, bzw. $\frac{\sin fx}{\sin gx}$ beschränkt, sondern es noch mit einer Konstante m multipliziert.

Das Doppelverhältnis ist von der Bestimmung des Parameters unabhängig; es muß also, wenn durch dieselbe lineare Substitution

$$\xi = \frac{\alpha\eta + \beta}{\gamma\eta + \delta}$$

ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 in η_1, η_2, η_3, η_4 übergeführt werden:

$$\frac{\xi_1 - \xi_3}{\xi_2 - \xi_3} : \frac{\xi_1 - \xi_4}{\xi_2 - \xi_4} = \frac{\eta_1 - \eta_3}{\eta_2 - \eta_3} : \frac{\eta_1 - \eta_4}{\eta_2 - \eta_4}$$

sein; in der Tat, es ist

$$\xi_1 - \xi_3 = \frac{(\alpha\delta - \beta\gamma)(\eta_1 - \eta_3)}{(\gamma\eta_1 + \delta)(\gamma\eta_3 + \delta)}, \quad \xi_2 - \xi_3 = \frac{(\alpha\delta - \beta\gamma)(\eta_2 - \eta_3)}{(\gamma\eta_2 + \delta)(\gamma\eta_3 + \delta)};$$

also:

$$\frac{\xi_1 - \xi_3}{\xi_2 - \xi_3} = \frac{\eta_1 - \eta_3}{\eta_2 - \eta_3} : \frac{\gamma\eta_1 + \delta}{\gamma\eta_2 + \delta} \text{ usw.}$$

Bilinear ist die Involutions-Relation $OX \,.\, OY = p$; daher ist $(A_1 A_2 A_3 A_4) = (B_1 B_2 B_3 B_4)$, wenn $A_1 B_1, \ldots A_4 B_4$ Paare sind.

Durch eine solche lineare Substitution kann man immer erzielen, *daß drei bestimmte Elemente gegebene Parameter erhalten.* Denn wenn die Elemente mit den bisherigen Parametern ξ_1, ξ_2, ξ_3 die *gegebenen* Parameter η_1, η_2, η_3 erhalten sollen, so haben wir drei Gleichungen:

$$\xi_1 \left(\frac{\gamma}{\delta}\eta_1 + 1\right) = \frac{\alpha}{\delta}\eta_1 + \frac{\beta}{\delta},$$

$$\xi_2 \left(\frac{\gamma}{\delta}\eta_2 + 1\right) = \frac{\alpha}{\delta}\eta_2 + \frac{\beta}{\delta},$$

$$\xi_3 \left(\frac{\gamma}{\delta}\eta_3 + 1\right) = \frac{\alpha}{\delta}\eta_3 + \frac{\beta}{\delta},$$

mit den Unbekannten $\frac{\alpha}{\delta}, \frac{\beta}{\delta}, \frac{\gamma}{\delta}$.

Ferner sieht man, daß beim Übergange von einer parametrischen Bestimmung zu einer andern, vermittelst einer linearen Substitution, alle Parameter-Relationen ihren Grad in den Parametern nicht ändern.

§ 4. Perspektive Lage ungleichartiger Gebilde. Projektive Eigenschaften.

Diese perspektive Lage führt uns zu neuen überaus einfachen 25
Verwandtschaften. Mit ihr verlassen wir das einstufige Gebiet.

Wir betrachten zuerst *eine Punktreihe* u *und einen Strahlenbüschel* U *in perspektiver Lage*; dazu ist notwendig, daß beide in derselben Ebene liegen, weil dann im allgemeinen ein Strahl des Büschels und der Träger der Punktreihe sich schneiden und der Strahl einen ihm zugeordneten Punkt in derselben erhält, eben den, in welchem er schneidet, durch den er geht oder um einen Ausdruck einzuführen, der bald, weil für verschiedene Fälle gleich geeignet, sich als bequem herausstellen wird: mit dem er *inzident* ist.[1]) Diese Zuordnung, die wir eben die *perspektive* Lage der beiden Gebilde nennen, ist in *beiderlei Sinne eindeutig*: jedem Punkt der Punktreihe entspricht ein Strahl des Büschels und jedem Strahl des Büschels ein Punkt der Punktreihe, sofern wir den unendlich fernen Punkt der Punktreihe annehmen und ihm den zum Träger der Punktreihe

1) Er rührt von *Graßmann* her.

parallelen Strahl des Büschels zuordnen. Ohne diese Annahme, welche mit den weiteren Folgerungen über die unendlich ferne Gerade jeder Ebene und die unendlich ferne Ebene des Raumes, die aus ihr sich ergeben werden, als perspektive Anschauung des Raumes bezeichnet wird, ist unsere Zuordnung nicht ausnahmslos.

Beachten wir, daß die dem Parallelstrahle beiderseitig benachbarten Strahlen des Büschels nach weit entfernten Punkten der Punktreihe auf der einen und der andern Seite gehen und auch durch unsere Figur der unendlich ferne Punkt der Gerade als derjenige erkannt wird, der den Übergang von der einen Seite zur andern vermittelt. Durch die Zuordnung, mit der wir jetzt zu tun haben, übertragen wir die im Büschel unzweifelhaft vorhandene Kontinuität in die Punktreihe.

Hier empfiehlt es sich, zunächst diejenigen Halbstrahlen des Büschels, welche die zugeordneten Punkte enthalten, als die positiven anzusehen. Gehen die Strahlen a, b des Büschels durch die Punkte A, B der Reihe, so stehen die vollen Winkel ab und $a \cdot b$ über den Strecken AB und $A \cdot B$; während bei anderer Festsetzung über die positiven Halbstrahlen auch ab über $A \cdot B$, und $a \cdot b$ über AB stehen könnte. Und wenn c in ab oder $a \cdot b$ liegt, dann befindet sich der zugeordnete Punkt C in AB oder $A \cdot B$.

Es sei o derjenige Strahl des Büschels, der zum Träger u rechtwinklig ist, und O der zugeordnete Punkt, sein Fußpunkt, so haben wir, wenn $x_1, x_2, \ldots$ und $X_1, X_2, \ldots$ weitere entsprechende Elemente sind, die auch dem Vorzeichen nach richtige Proportion:

$$OX_1 : OX_2 : OX_3 : \cdots = \text{tang}\, ox_1 : \text{tang}\, ox_2 : \text{tang}\, ox_3 : \cdots.$$

Die absolute Richtigkeit bedarf keines Beweises. Die Strecken OX_i und die tang ox_i haben aber durchweg dasselbe oder durchweg entgegengesetzte Vorzeichen, je nachdem die positiven Sinne auf u und in U perspektiv sind oder nicht, d. h. je nachdem, wenn das eine Gebilde von einem Elemente in positivem Sinne durchlaufen wird, das entsprechende Element das andere ebenfalls in positivem Sinne durchläuft oder nicht.

Da wir aber mit Tangenten zu tun haben, so sind wir (Nr. 16) tatsächlich frei von der obigen Annahme über die positiven Halbstrahlen im Büschel, welche zunächst die bequemere war; die Proportion ist auch bei anderer Annahme richtig.

26 Sind nun $X_1 X_2 X_3 X_4$ und $x_1 x_2 x_3 x_4$ zwei entsprechende oder perspektive Würfe von u und U, so ist:

$$(X_1 X_2 X_3 X_4) = \frac{OX_1 - OX_3}{OX_2 - OX_3} : \frac{OX_1 - OX_4}{OX_2 - OX_4},$$

$$(x_1 x_2 x_3 x_4) = \frac{\text{tang}\, ox_1 - \text{tang}\, ox_3}{\text{tang}\, ox_2 - \text{tang}\, ox_3} : \frac{\text{tang}\, ox_1 - \text{tang}\, ox_4}{\text{tang}\, ox_2 - \text{tang}\, ox_4},$$

indem wir hier die Tangenten als Parameter annehmen. Es ist aber ersichtlich, daß wir, wegen der Homogeneität, rechts die OX_i oder die tang ox_i durch die proportionalen tang ox_i oder OX_i ersetzen können, ohne daß die Quotienten ihre Werte ändern. Also ist:

$$(X_1 X_2 X_3 X_4) = (x_1 x_2 x_3 x_4).$$

Zwei perspektive Würfe von Punkten und Strahlen haben dasselbe Doppelverhältnis. Und:

Alle Punktwürfe, in denen ein Strahlenwurf geschnitten wird, haben dasselbe Doppelverhältnis; ebenso alle Strahlenwürfe, durch welche ein Punktwurf projiziert wird.[1])

Ein Strahlenbüschel und ein Ebenenbüschel heißen perspektiv, wenn der erstere ein Schnitt des anderen ist oder dieser jenen aus einem Punkte (oder aus der Gerade, die ihn mit dem Scheitel verbindet) projiziert: jeder Strahl ist dann der Ebene zugeordnet, aus der er geschnitten wird, mit der er inzident ist.

Schneiden wir einen Ebenenbüschel zuerst mit einer Ebene, die zu seiner Axe normal ist, und nehmen wir an, daß die positiven Halbstrahlen in den positiven Halbebenen liegen, und daß die positiven Sinne beider Büschel perspektiv seien, so stimmt der Winkel zweier Ebenen im Maße und Vorzeichen mit demjenigen der entsprechenden Strahlen überein, denn dieser ist ja Neigungswinkel. Daher sind die Doppelverhältnisse zweier entsprechender Würfe gleich, weil alle vier Winkel in beiden gleich sind; das Doppelverhältnis eines Wurfes in einem Büschel ist aber unabhängig von der Festsetzung über den positiven Sinn und die positiven Halbelemente; also können wir die obigen Annahmen fallen lassen.

Nun sei der Strahlenwurf durch eine beliebige Ebene aus dem Ebenenwurfe geschnitten; wir schneiden einen zweiten durch eine zur Axe senkrechte Ebene aus. Die beiden Ebenen sind nicht parallel, und ihre Schnittlinie trifft den Ebenenwurf in einem Punktwurfe, über dem beide Strahlenwürfe perspektiv stehen; folglich haben sie mit ihm und untereinander gleiche Doppelverhältnisse, daher auch der schief ausgeschnittene Strahlenwurf mit dem Ebenenwurf. Also:

Zwei perspektive Würfe von Strahlen und Ebenen haben dasselbe Doppelverhältnis.

Und endlich, wenn eine Punktreihe und ein Ebenenbüschel perspektiv sind, so lege man durch den Träger der ersteren eine Ebene, die den letzteren in einem Strahlenbüschel schneidet, der zu beiden perspektiv ist; daher haben zwei entsprechende Würfe in jenen dasselbe Doppelverhältnis wie der zu ihnen perspektive Wurf in diesem.

---

1) Dieser fundamentale Satz findet sich schon bei Pappus: Collectio Buch VII Satz 129.

Ein Punktwurf und ein Ebenenwurf, welche perspektiv sind, haben dasselbe Doppelverhältnis.

Eine zum Träger der Punktreihe normale Ebene enthält der Ebenenbüschel im allgemeinen nicht.

Diese drei Sätze lassen sich zusammenfassen:

Zwei ungleichartige Würfe, welche perspektiv sind, haben dasselbe Doppelverhältnis.

Oder:

Das Doppelverhältnis bleibt bei jeder Projektion und jedem Schnitt erhalten. Man nennt nach Poncelet[1]) diese Operationen: Schnitt und Projektion die projektiven Operationen und eine Größe oder Eigenschaft, welche bei ihnen erhalten bleibt, projektiv (invariant).

Das Doppelverhältnis ist also eine projektive Größe, und damit haben wir seine fundamentale Eigenschaft erkannt. Speziell ist auch die Harmonizität projektiv.

27 Wir benutzen die obige Proportion (Nr. 25) noch weiter, um andere Analogien zwischen Punktreihe und Büschel zu erkennen. Wir fanden bei der Punktreihe, wenn $(ABCD) = \lambda$, daß

$$\frac{1-\lambda}{DC} = \frac{1}{BC} - \frac{\lambda}{AC}.$$

Schneidet man einen gegebenen Strahlenwurf $abcd$, für den $(abcd) = \lambda$ ist, mit einer zu c senkrechten Transversale in $ABCD$, dessen Doppelverhältnis ebenfalls λ ist, so ist $AC : BC : DC = \operatorname{tang} ac : \operatorname{tang} bc : \operatorname{tang} dc$; daher folgt aus jener Formel, weil sie homogen in AC, BC, DC ist:

$$\frac{1-\lambda}{\operatorname{tang} dc} = \frac{1}{\operatorname{tang} bc} - \frac{\lambda}{\operatorname{tang} ac}.$$

Ebenso, wenn bei einem harmonischen Strahlenwurfe $abcd$ die Transversale senkrecht zum Halbierungsstrahle m des Winkels ab gezogen wird, wodurch M die Mitte von AB wird, folgt aus der Formel:

$$MC \cdot MD = MA^2 = MB^2$$

für den harmonischen Punktwurf $ABCD$ die entsprechende für $abcd$:

$$\operatorname{tang} mc \cdot \operatorname{tang} md = \operatorname{tang} ma^2 = \operatorname{tang} mb^2.$$

Der Halbierungsstrahl m' von $a \cdot b$ ist parallel zur Transversale; wir wissen m und m' sind harmonisch zu a, b, also auch die Mitte von AB und der unendliche ferne Punkt zu A, B.

28 Wir können den Parameter in der Punktreihe $\lambda = m\frac{FX}{GX}$ als Doppelverhältnis $(FGXH)$ darstellen, indem wir H so bestimmen,

1) Traité des propriétés projectives, 1. Aufl. 1822, 2. Aufl. 1865, 1866.

daß $\frac{GH}{FH} = m$ ist, und ähnliches gilt in den Büscheln. Nun sei ein Ebenenbüschel mit der Punktreihe perspektiv gemacht und ein Strahlenbüschel mit beiden, indem seine Ebene durch den Träger der Punktreihe und sein Scheitel auf die Axe des Ebenenbüschels gelegt ist. Den Elementen f, g, h, x mögen die Elemente $\varphi, \gamma, \eta, \xi$ bzw. F, G, H, X entsprechen. Nehmen wir also in den Büscheln φ, γ, bzw. f, g als Grundelemente der parametrischen Bestimmung und als Konstanten $m' = \frac{\sin \gamma\eta}{\sin \varphi\eta}$, bzw. $m'' = \frac{\sin gh}{\sin fh}$, so erhalten ξ und x denselben Parameter wie X, weil $(FGXH) = (\varphi\gamma\xi\eta) = (fgxh)$.

In zwei perspektiven Gebilden ungleicher Art kann man die parametrische Bestimmung immer so einrichten, daß entsprechende (inzidente) Elemente den nämlichen Parameter haben.

Daraus folgt, daß jede Beziehung, die sich (allgemein) parametrisch ausdrücken läßt, projektiv ist.

Gilt z. B. die Involutionsrelation

$$(\lambda_1 - \mu_2)(\lambda_2 - \mu_3)(\lambda_3 - \mu_1) + (\mu_1 - \lambda_2)(\mu_2 - \lambda_3)(\mu_3 - \lambda_1) = 0$$

für drei Elementenpaare in einem von zwei perspektiven Gebilden, so gilt sie auch für die drei entsprechenden im andern.

Die Involution ist eine projektive Eigenschaft.

Das entnehmen wir auch aus derjenigen Form der Involutionsrelation, in der sie als Gleichheit zweier Doppelverhältnisse erscheint; aus $(X_1 Y_1 X_2 X_3) = (Y_1 X_1 Y_2 Y_3)$ folgt: $(x_1 y_1 x_2 x_3) = (y_1 x_1 y_2 y_3)$, und umgekehrt.

Offenbar gehen die Doppelelemente der einen in die der anderen Involution über; folglich ist auch die Art der Involution projektiv.

Es ist leicht, eine gleichseitig-hyperbolische Strahleninvolution — mit zwei rechtwinkligen Doppelstrahlen — durch eine Transversale in einer gleichseitig-hyperbolischen Punktinvolution zu schneiden und die Eigenschaften der einen aus denen der andern abzuleiten.

Staudt hat vorgeschlagen, die beiden konjugiert-imaginären 29
Doppelelemente einer elliptischen Involution durch die beiden Sinne zu unterscheiden, in denen man die vier Elemente zweier Elementenpaare $AB, A'B'$ — der die Involution bestimmenden — durchlaufen kann: $AA'BB'$ und $AB'BA'$. Man wird dadurch nämlich instand gesetzt, jedes der beiden Elemente bei Verbindungen (Projektionen) und Schnitten für sich zu verfolgen. Wir wollen z. B. die beiden imaginären Doppelpunkte einer elliptischen Punktinvolution mit einem Punkte U verbinden; dazu projizieren wir diese Involution — die sie darstellende Involution, ihren reellen Repräsentanten —

aus U und zwar A, B; A', B' durch a, b; a', b'. Dann geht der durch den Sinn $AA'BB'$ gekennzeichnete Punkt in den durch den Sinn $aa'bb'$ gekennzeichneten Strahl über, der ihn also mit U verbindet, und der andere mit dem Sinne $AB'BA'$ in den mit dem Sinne $ab'ba'$. Wie man infolgedessen die imaginären Verbindungslinien der Doppelpunkte einer elliptischen Involution mit denen einer anderen konstruiert und darstellt, wird später besprochen werden.

30 Die Einführung des unendlich fernen Punktes einer Gerade, der ihr mit allen zu ihr parallelen Geraden gemeinsam ist, hat zur Folge, daß wir den Inbegriff aller Strahlen einer Ebene von derselben Richtung als Strahlenbüschel anzusehen haben: mit unendlich fernem Scheitel. Was wir für einen Strahlenwurf mit eigentlichem Scheitel erst beweisen müssen, daß alle ausgeschnittenen Punktwürfe dasselbe Doppelverhältnis haben, nämlich das des Strahlenwurfs, ist bei einem aus vier parallelen Strahlen bestehenden Wurfe viel unmittelbarer klar; denn wenn $ABCD$, $A_1B_1C_1D_1$ zwei ausgeschnittene Würfe sind, so gilt wegen des Parallelismus die Proportion:

$$AC : BC : AD : BD = A_1C_1 : B_1C_1 : A_1D_1 : B_1D_1,$$

und zwar auch dem Vorzeichen nach, und aus ihr folgt:

$$(ABCD) = (A_1B_1C_1D_1).$$

Für unsern Strahlenwurf selbst versagt die ursprüngliche Definition seines Doppelverhältnisses, weil die vier Winkel ac, bc, ... alle null sind. Wir wissen jetzt, das Doppelverhältnis eines solchen Strahlenwurfs ist das unveränderliche aller durch Schnitt entstehenden Punktwürfe.

Stellen wir über unsern Strahlenwurf aus parallelen Strahlen perspektiv einen Ebenenwurf, dessen Axe nach dem unendlich fernen Scheitel, also parallel zu den Strahlen gehen muß, so ist derselbe ja auch zu allen den ausgeschnittenen Punktwürfen perspektiv und hat mit ihnen und dem Strahlenwurfe gleiches Doppelverhältnis.

Vier parallele Ebenen α, β, γ, δ werden ebenfalls von zwei verschiedenen Geraden in Punktwürfen geschnitten, denen entsprechende Strecken proportional sind, also in Punktwürfen von demselben Doppelverhältnis; folglich ist das Doppelverhältnis von allen ausgeschnittenen Punktwürfen das nämliche. Daraus ist zu vermuten, daß wir die vier wurfartig angeordneten parallelen Ebenen als einen Ebenenwurf — mit unendlich ferner Axe — werden bezeichnen dürfen, mit dem gleichen Doppelverhältnis dieser Punktwürfe als dem seinigen.

§ 5. Eindeutige (projektive) Verwandtschaft zwischen zwei Grundgebilden erster Stufe. Dualisieren.

Man kann zwei Grundgebilde erster Stufe auf sechs Weisen zu 31
zweien zusammenstellen, dreimal zwei gleichartige und dreimal zwei ungleichartige. Irgend eine solche Zusammenstellung liege vor, und ξ und ξ' seien veränderliche Parameter der Elemente für das eine und das andere Gebilde. Zwischen ihnen werde eine algebraische bilineare Beziehung gegeben, mithin von der Form:

$$\lambda\xi\xi' + \mu\xi + \mu'\xi' + \nu = 0,$$

worin λ, μ, μ', ν Konstanten sind, also von der Gestalt der (P) in Nr. 22. Jedem ξ oder ξ' wird durch dieselbe ein ξ' oder ξ zugeordnet, und da auch zwischen dem Parameter und seinem Elemente eine gegenseitig eindeutige Beziehung besteht, so wird jedem Elemente X oder X'[1]) des ersten oder zweiten Gebildes ein Element X' oder X im jeweilig anderen zugeordnet. Wir haben damit eine eindeutige Verwandtschaft der beiden Gebilde festgelegt: genauer eine in beiderlei Sinne oder umkehrbar eindeutige oder eine ein-eindeutige; wir werden später, verallgemeinernd, mit (m, n)-deutigen Verwandtschaften zu tun haben. Unter eindeutig schlechthin verstehen wir immer ein-eindeutig.

Die Auflösung der bilinearen Relation nach der einen oder andern Veränderlichen führt, wie wir wissen, zu einer linearen Substitution, und wir folgern wie in Nr. 24, wenn den Parametern ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 die Parameter ξ_1', ξ_2', ξ_3', ξ_4' durch die Relation zugeordnet werden, und daher den Elementen X_1, X_2, X_3, X_4 die Elemente X_1', X_2', X_3', X_4':

$$\frac{\xi_1 - \xi_3}{\xi_2 - \xi_3} : \frac{\xi_1 - \xi_4}{\xi_2 - \xi_4} = \frac{\xi_1' - \xi_3'}{\xi_2' - \xi_3'} : \frac{\xi_1' - \xi_4'}{\xi_2' - \xi_4'};$$

damals bedeutete die entsprechende Relation den zweifachen Ausdruck des Doppelverhältnisses eines und desselben Wurfs in zwei verschiedenen parametrischen Bestimmungen; also im Grunde etwas Selbstverständliches. Hier haben wir erhalten:

$$(X_1 X_2 X_3 X_4) = (X_1' X_2' X_3' X_4'),$$

d. i. den Satz:

In eindeutig verwandten Grundgebilden haben entsprechende Würfe das nämliche Doppelverhältnis;

so daß auch bei einer solchen Transformation diese Größe invariant ist.

---

1) Wir gebrauchen die Punktbezeichnung, ohne daß die Elemente notwendig Punkte sein müssen.

Man führe neue Parameter η, η' an Stelle von ξ, ξ' durch lineare Substitutionen:

$$\xi = \frac{\alpha\eta + \beta}{\gamma\eta + \delta}, \quad \xi' = \frac{\alpha'\eta' + \beta'}{\gamma'\eta' + \delta'}$$

ein und überzeuge sich, daß eine ebenfalls bilineare Relation in η und η' sich ergibt (Nr. 24).

In der Beziehungsgleichung haben wir vier Konstanten λ, μ, μ', ν; aber wir wissen schon, daß sie sich durch Division auf drei wesentliche, etwa $\frac{\lambda}{\nu}$, $\frac{\mu}{\nu}$, $\frac{\mu'}{\nu}$ reduzieren lassen; auf diese Verhältnisse kommt es allein an: werden die $\lambda, \mu, \ldots$ proportional geändert, so bleiben dieselben Paare ξ, ξ', welche genügen. Indem wir diese drei wesentlichen Konstanten, durch welche die Verwandtschaft festgelegt wird, eine jede durch die unendlich vielen Zahlenwerte laufen lassen, sehen wir, daß, wie man gewöhnlich aber nicht ganz korrekt sagt, dreifach unendlich viele eindeutige Verwandtschaften zwischen zwei gegebenen Grundgebilden möglich sind; richtiger ist die Potenzbezeichnung: es gibt ∞^3 eindeutige Verwandtschaften zwischen ihnen, denn die Verbindung der drei einfachen Unendlichkeiten, die von jenen Konstanten durchlaufen werden, ist der Potenzierung analog, nicht der Multiplikation.

32 Durch drei Paare entsprechender Elemente ist unsere Verwandtschaft eindeutig festgelegt; denn, seien deren Parameter α, β, γ; α', β', γ', so haben wir drei Gleichungen:

$$\lambda\alpha\alpha' + \mu\alpha + \mu'\alpha' + \nu = 0,$$
$$\lambda\beta\beta' + \mu\beta + \mu'\beta' + \nu = 0,$$
$$\lambda\gamma\gamma' + \mu\gamma + \mu'\gamma' + \nu = 0;$$

sie sind linear in den Unbekannten $\frac{\lambda}{\nu}$, $\frac{\mu}{\nu}$, $\frac{\mu'}{\nu}$ und bestimmen diese und damit die Verwandtschaft eindeutig.

Dasselbe lehrt aber auch die Gleichheit der Doppelverhältnisse entsprechender Würfe. Sind nämlich jene gegebenen entsprechenden Elemente A, B, C; A', B', C', so lehrt:

$$(ABCX) = (A'B'C'X'),$$

daß zu jedem weiteren Elemente X oder X' des ersten oder zweiten Gebildes das entsprechende X' oder X eindeutig bestimmt ist (Nr. 5).

Halten wir von den bestimmenden Elementen diejenigen in dem einen Gebilde fest, während die in dem andern sich verändern und zwar jedes in unendlich vielen (∞^1) Lagen, so erkennen wir von neuem die ∞^3 möglichen Verwandtschaften.

Machen wir uns auch umgekehrt klar, daß:

$$\frac{\alpha - \gamma}{\beta - \gamma} \cdot \frac{\beta - \xi}{\alpha - \xi} = \frac{\alpha' - \gamma'}{\beta' - \gamma'} \cdot \frac{\beta' - \xi'}{\alpha' - \xi'}$$

umgewandelt werden kann in:

$$(A-B)\xi\xi' + (B\beta' - A\alpha')\xi + (B\alpha - A\beta)\xi' + (A\beta\alpha' - B\alpha\beta') = 0,$$

wo

$$A = (\alpha - \gamma)(\beta' - \gamma'),$$
$$B = (\beta - \gamma)(\alpha' - \gamma'),$$

also eine bilineare Relation ist.

Daß gewisse Elemente des einen Gebildes, deren Zahl > 3 ist, gewissen Elementen des andern entsprechen, wird durch das Staudtsche Zeichen $\barwedge$ bezeichnet:

$$ABCX \cdots \barwedge A'B'C'X' \cdots;$$

das ist eine je zu beweisende Behauptung. Hingegen:

$$ABC \barwedge A'B'C'$$

sagt noch nichts aus, sondern dient nur zur Festlegung der Verwandtschaft.

Die einfachste eindeutige Verwandtschaft ist die im vorigen 33
Paragraphen betrachtete perspektive Lage ungleichartiger Gebilde, und der bei ihr erkannte Satz von der Gleichheit der Doppelverhältnisse entsprechender Würfe subsumiert sich dem jetzigen allgemeineren.

Perspektive Gebilde sind durch Projektion oder Schnitt verbunden. Es entsteht nun bei eindeutig verwandten Gebilden, die nicht selbst schon perspektiv sind, die Frage, ob es nicht möglich ist, durch eine Reihe von solchen projektiven Operationen von den Elementen des einen zu den entsprechenden des andern überzugehen, so daß zwischen sie andere Gebilde eingeschaltet werden, die zu ihnen und untereinander auch eindeutig verwandt sind, derartig, daß, einschließlich der gegebenen, jede zwei aufeinander folgende perspektiv sind.

Unsere Aufgabe vereinfacht sich aber in zweierlei Weise. Erstens reicht es hin, drei Elemente A, B, C in ihre entsprechenden A', B', C' überzuführen; denn projektive Operationen, welche das tun, führen dann auch, weil bei ihnen die Doppelverhältnisse erhalten bleiben, ein Element X des ersten Gebildes in dasjenige X'' des zweiten über, für das:

$$(ABCX) = (A'B'C'X'');$$

ist aber X' dasjenige, das dem X in der gegebenen Verwandtschaft entspricht, so ist:

$$(ABCX) = (A'B'C'X'),$$

also:

$$(A'B'C'X'') = (A'B'C'X'),$$

woraus folgt, daß X'' mit X' identisch ist (Nr. 5).

Ferner ist unmittelbar klar, daß, **wenn zwei Gebilde zu einem dritten in eindeutiger Verwandtschaft stehen, sie es auch untereinander sind** und solche Elemente sich entsprechen, die demselben Elemente des dritten Gebildes in jenen Verwandtschaften zugeordnet sind.

Aus den beiden gegebenen Verwandtschaftsgleichungen:

$$\lambda \xi \xi'' + \mu \xi + \mu' \xi'' + \nu = 0,$$
$$\lambda_1 \xi' \xi'' + \mu_1 \xi'' + \mu_1' \xi' + \nu_1 = 0$$

folgt durch Elimination von ξ'' die neue:

$$(\mu \lambda_1 - \lambda \mu_1') \xi \xi' + (u \mu_1 - \lambda \nu_1) \xi + (\nu \lambda_1 - \mu' \mu_1') \xi' + (\nu \mu_1 - \mu' \nu_1) = 0.$$

Ersetzen wir also die gegebenen Gebilde durch zu ihnen beziehentlich perspektive, so stehen auch diese in eindeutiger Verwandtschaft, und wir können an ihnen den Überführungsprozeß vollziehen, da es uns zunächst überhaupt auf einen Überführungsprozeß ankommt, nicht auf den möglichst einfachen. Auf diese Weise erhellt, daß wir alle 6 Fälle durch Schnitt auf den Fall eindeutig verwandter Punktreihen zurückführen können. Und diese wollen wir, was ja auch durch Projektion und Schnitt erzielt werden kann, in der allgemeinen Lage im Raume annehmen, daß ihre Träger u und u' windschief (nicht in derselben Ebene) gelegen sind.

34 Es seien drei windschiefe Geraden a, b, c gegeben, so gibt es ∞^1 Geraden, welche alle drei treffen (im weiteren Sinne der perspektiven Anschauung); jede solche Gerade hat, etwa mit a, einen Punkt und eine Ebene gemein, und die Geraden erhalten wir also entweder, indem wir von jedem Punkte von a (einschließlich des unendlich fernen) die einzige Gerade ziehen, welche b und c trifft, d. h. die Schnittlinie der Ebenen, die ihn mit b und c verbinden, oder aber indem wir in jeder Ebene durch a die einzige Gerade ziehen, welche b und c trifft, d. h. die Verbindungslinie der Schnittpunkte der Ebene mit b und c. Der Inbegriff dieser ∞^1 Geraden wird **Regelschar**[1]) genannt, und die drei Geraden a, b, c heißen **Leitgeraden** von ihr; sie sei durch $[abc]$ bezeichnet.

Die Geraden der Regelschar sind durchweg windschief.

Wir ziehen, behufs der Überführung der Punkte A, B, C auf u in die Punkte A', B', C' auf u', die drei Verbindungslinien $a = AA'$, $b = BB'$, $c = CC'$, welche windschief sind, weil sonst u und u' es nicht sein könnten; l sei irgend eine Gerade der Regelschar $[abc]$. So haben wir schon, was wir wünschen: wir projizieren A, B, C aus l durch Ebenen, welche dann die a, b, c in sich aufnehmen und daher von u' in den auf diesen Geraden gelegenen Punkten A', B', C' geschnitten

1) „Regel" von règle Lineal.

werden: durch eine Projektion und einen Schnitt ist die Überführung geleistet; die Ebene, welche dann einen weiteren Punkt X von u aus l projiziert, schneidet in u' den entsprechenden X' ein. Es ist also der Ebenenbüschel von l mit den beiden Punktreihen auf u und u' perspektiv, und wir haben die möglichst einfache Überführung erhalten; es gibt deren ∞^1, weil so viele Geraden l[1]).

Wir können, wie oben bemerkt, die andern Fälle auf den der Punktreihen zurückführen; z. B. wenn ein Strahlenbüschel und ein Ebenenbüschel in eindeutiger Verwandtschaft vorliegen, schneiden wir beide in Punktreihen, und wir haben dann 4 Operationen: Schnitt des Strahlenbüschels in einer Punktreihe, dann die beiden Operationen, welche diese in die andere überführen, endlich Projektion der letzteren in den Ebenenbüschel. Das ist offenbar nicht die einfachste Überführung.

Liegen etwa zwei eindeutig verwandte Ebenenbüschel u, u' um windschiefe Axen vor, so kann man vermittelst eines Umwandlungsprozesses, auf welchen wir bald genauer eingehen werden, eine ebenso einfache Konstruktion wie bei zwei Punktreihen erhalten. Wenn nämlich in den Büscheln den Ebenen α, β, γ die Ebenen α', β', γ' entsprechen, so seien a, b, c die Schnittlinien $\alpha\alpha', \beta\beta', \gamma\gamma'$ und l wiederum eine Gerade der Regelschar $[abc]$; die Überführungs-Konstruktion ist: Schnitt von α, β, γ mit der Gerade l in Punkten, welche ersichtlich auf a, b, c liegen, Projektion dieser Punkte aus der Axe u' durch die Ebenen $u'a, u'b, u'c$ oder α', β', γ'.

Eine Herabbringung auf zwei Operationen ist nur in diesen beiden Fällen möglich, in den andern sind, bei allgemeiner Lage, mindestens 3 oder 4 Operationen erforderlich. Z. B.: wenn ein Ebenenbüschel oder ein Strahlenbüschel und eine Punktreihe eindeutig verwandt sind, so haben wir den Büschel in einer Punktreihe zu schneiden und diese dann, durch zwei Operationen, in die gegebene überzuführen.

Wegen der Möglichkeit, eindeutig verwandte Gebilde durch projektive Operationen in Verbindung zu bringen, werden eindeutig verwandte Gebilde auch projektiv[2]) genannt, die Verwandtschaft heißt Projektivität und das Staudtsche $\barwedge$ wird „projektiv" gelesen.

Projektive Gebilde sind solche, die durch eine Reihe von projektiven Operationen auseinander hervorgehen[3]).

---

1) Man mache sich klar, daß die Konstruktion versagt, wenn u und u' in derselben Ebene liegen.

2) Bis 1880 und zuweilen noch jetzt: projektivisch (und ebenso perpektivisch). Vgl. Math. Ann. Bd. 10 S. 118. Die jetzige Form kommt sporadisch schon früher vor: bei Plücker und Möbius. Die Franzosen sagen homographisch und Homographie.

3) Cremona, Elementi di Geometria projettiva (1873) Nr. 34.

Damit ist die eindeutige Verwandtschaft von Maßbeziehungen, wie sie in der bilinearen Parameter-Relation enthalten sind, frei geworden.

35 Vergleichen wir die beiden Konstruktionen, die uns zur Regelschar geführt haben, oder die beiden Operationenfolgen zwischen zwei projektiven Punktreihen und zwischen zwei projektiven Ebenenbüscheln — Konstruktionen, die von Maßbeziehungen frei sind, — so erkennen wir folgenden Unterschied. Wo in der einen ein Punkt vorkommt, kommt in der andern eine Ebene vor; wo man dort mit einer Gerade zu tun hat, hat man es auch hier auch mit einer Gerade zu tun; ist sie aber in dem einen Falle Schnittlinie zweier Ebenen, so ist sie im andern Verbindungslinie zweier Punkte, oder allgemeiner, ist sie in dem einen Falle Axe eines Ebenenbüschels, so ist sie im andern Träger einer Punktreihe. Zwei Geraden der einen Konstruktion, welche sich schneiden (im Sinne der perspektiven Raumanschauung), entsprechen zwei Geraden in der andern, für welche das ebenfalls gilt, so jedoch, daß sie in dem einen Falle als Geraden mit gemeinsamem Punkte, in dem andern als Geraden mit gemeinsamer Ebene aufgefaßt werden. Einem Strahlenbüschel steht ein Strahlenbüschel gegenüber, dem Scheitel des einen die Ebene des andern. Mit einer derartigen Umwandlung der Figur einer Konstruktion oder eines Satzes werden wir noch oft zu tun haben. Wir nennen sie dualisieren. Es wird sich später das Prinzip der Dualität ergeben. Solange der Beweis dieses Prinzips noch nicht geführt ist, sind dual gegenüberstehende Sätze oder Aufgaben beide zu beweisen oder zu lösen. Der Beweis des zweiten Satzes, die Lösung der zweiten Aufgabe verläuft dual zu der der ersteren. Es ist gut, das Dualisieren möglichst bald zu lernen; wenn also im folgenden die duale Überlegung nicht immer gemacht wird, so ist es dem Leser doch zu empfehlen, dieselbe jedesmal ordentlich durchzuführen. Diese Übung ist notwendig und wird bald die — empirisch erworbene — Überzeugung von der Richtigkeit des Prinzips bringen, noch ehe der exakte Beweis geführt ist.

Nach diesem Beweise wird dann die Durchführung des zweiten Beweises, der zweiten Lösung unnötig.

Ob Maßbeziehungen sich ganz der Dualisierung entziehen, wird sich im Verlauf der weiteren Betrachtung zeigen.

Aus der oben angegebenen Folge von drei Operationen zwischen einem Strahlenbüschel und einer Punktreihe, welche projektiv sind, läßt sich dual eine Operationenfolge zwischen einem Strahlen- und einem Ebenenbüschel, die projektiv sind, ableiten.

Zwei projektive Strahlenbüschel lassen sich durch vier Operationen verbinden, indem man in die Ebenen beider Geraden legt, auf denen durch sie projektive Punktreihen entstehen: man hat dann den Schnitt

des ersten Büschels mit der Gerade in seiner Ebene, die beiden Operationen von dieser Punktreihe zur andern und die Projektion der letzteren Punktreihe aus dem Scheitel des zweiten Büschels. Dazu gibt es dual eine zweite Operationenfolge, in der an Stelle der Punktreihen zu den Strahlenbüscheln bzw. perspektive und daher untereinander projektive Ebenenbüschel treten.

§ 6. Perspektive Lage gleichartiger Gebilde.

Zwei projektive Punktreihen auf windschiefen Trägern u, u' erwiesen sich immer (Nr. 34) mit demselben Ebenenbüschel (oder vielmehr mit ∞^1) perspektiv; und umgekehrt zwei Punktreihen, welche mit demselben Ebenenbüschel perspektiv sind, sind untereinander projektiv, weil beide zu dem Ebenenbüschel. 36

Ebenso und dual sind zwei projektive Ebenenbüschel um windschiefe Axen u, u' immer zu derselben Punktreihe l (oder zu ∞^1) perspektiv; und zwei Ebenenbüschel, die zu derselben Punktreihe perspektiv sind, sind untereinander projektiv.

Liegen jene zu demselben Ebenenbüschel perspektiven Punktreihen in der nämlichen Ebene, so sind sie auch beide zu dem Strahlenbüschel perspektiv, den diese Ebene aus dem Ebenenbüschel ausschneidet; sie haben dann einen (ev. unendlich fernen) gemeinsamen Punkt; und wie jeder Strahl des Strahlenbüschels zwei entsprechende Punkte einschneidet, so auch derjenige, welcher nach diesem gemeinsamen Punkt geht, der auf diese Weise sich selbst in der Projektivität entsprechend wird.

Und, dual, gehen die Axen der zu derselben Punktreihe perspektiven Ebenenbüschel durch den nämlichen Punkt, so sind sie auch beide zu dem Strahlenbüschel perspektiv, welcher die Punktreihe aus diesem Punkte projiziert; sie haben dann eine gemeinsame Ebene (welche die beiden sich schneidenden Axen verbindet); und wie jeder Strahl des Strahlenbüschels in zwei entsprechenden Ebenen liegt, so auch der in dieser Ebene liegende, so daß sie eine sich selbst entsprechende wird.

In beiden Fällen existiert ein gemeinsames und sich selbst entsprechendes Element; diese Eigenschaft ist für die perspektive Lage charakteristisch. Wir haben also: Zwei Punktreihen, die mit demselben Strahlenbüschel (und infolgedessen mit allen durch ihn gehenden Ebenenbüscheln) perspektiv sind, deren Träger deshalb in die Ebene jenes Büschels fallen und daher einen gemeinsamen Punkt haben, sind projektiv und heißen in perspektiver Lage; der gemeinsame Punkt entspricht sich selbst.

Zwei Ebenenbüschel, welche mit demselben Strahlenbüschel (und mit allen aus ihm ausgeschnittenen Punktreihen) perspektiv sind, deren Axen also durch den Scheitel des Strahlenbüschels gehen und durch eine den Ebenenbüscheln gemeinsame Ebene verbunden werden, sind projektiv und heißen in perspektiver Lage; die gemeinsame Ebene entspricht sich selbst.

Umgekehrt, zwei projektive Punktreihen mit sich schneidenden Trägern u, u', in deren Projektivität der Schnittpunkt uu' sich selber entspricht, sind in perspektiver Lage, d. h. mit demselben Strahlenbüschel perspektiv.

In der Tat, der sich selbst entsprechende Punkt sei E als Punkt der einen und E' als Punkt der andern Reihe, und den A, B in jener mögen A', B' in dieser entsprechen; es sei dann S der Schnittpunkt von AA', BB', der im Sinne der perspektiven Anschauung immer vorhanden ist, weil diese Geraden in der Ebene uu' liegen. Projizieren wir die Punkte A, B, E aus S und schneiden die projizierenden Strahlen mit u', so ergeben sich A', B', E'; also erhalten wir (Nr. 33) durch diese beiden Operationen aus jedem X von u den entsprechenden X' auf u'; d. h. je zwei solche Punkte X, X' liegen auf demselben Strahl des Büschels S; beide Punktreihen sind mit diesem Büschel perspektiv: seinen Scheitel nennen wir das Perspektivitätszentrum[1]).

Dual, zwei projektive Ebenenbüschel mit sich schneidenden Axen u, u', in deren Projektivität die Verbindungsebene uu' sich selbst entspricht, sind in perspektiver Lage, d. h. mit demselben Strahlenbüschel perspektiv.

Jene Ebene sei $\varepsilon, \varepsilon'$; ferner mögen den Ebenen α, β die Ebenen α', β' entsprechen; sei dann σ die Ebene, welche die beiden durch den Schnittpunkt uu' der Axen gehenden Schnittlinien $\alpha\alpha', \beta\beta'$ verbindet, so schneiden wir $\alpha, \beta, \varepsilon$ mit dieser Ebene σ und projizieren die Schnittstrahlen (die wieder durch den Punkt uu' gehen) aus u', wodurch sich $\alpha', \beta', \varepsilon'$ ergeben; also geht (Nr. 33) auch jede andere Ebene ξ von u in dieser Weise in die entsprechende ξ' von u' über; d. h. $\xi\xi'$ liegt in σ, beide Ebenenbüschel sind mit dem Strahlenbüschel in σ um uu' perspektiv; σ ist die Perspektivitätsebene.

37 Was nun die perspektive Lage von projektiven Strahlenbüscheln anlangt, so reicht die Voraussetzung eines gemeinsamen Strahls noch nicht hin; haben sie sowohl verschiedene Ebenen als auch verschiedene Scheitel, so sind die weiteren entsprechenden Strahlen durchweg windschief, haben also weder gemeinsamen Punkt, noch gemeinsame Ebene; es kann folglich kein Gebilde entstehen, zu dem sie beide perspektiv

1) Früher weniger gut Projektionszentrum genannt.

sind. Wir müssen daher noch entweder gemeinsame Ebene oder gemeinsamen Scheitel voraussetzen; in jenem Falle haben entsprechende Strahlen einen (veränderlichen) Schnittpunkt, in diesem eine (veränderliche) Verbindungsebene.

Zwei Strahlenbüschel in derselben Ebene, welche mit derselben Punktreihe perspektiv sind, die natürlich auch in dieser Ebene liegt, sind projektiv; und wie nach jedem Punkte der Reihe zwei entsprechende Strahlen, so gehen solche auch nach dem, welcher auf dem gemeinsamen Strahle liegt, den sie als Büschel derselben Ebene haben; er wird also sich selbst entsprechend; und man nennt die Strahlenbüschel in perspektiver Lage.

Dual: Zwei Strahlenbüschel um denselben Scheitel, welche mit demselben Ebenenbüschel perspektiv sind (dessen Axe durch diesen Scheitel geht), sind projektiv; und wie in jeder Ebene des Ebenenbüschels zwei entsprechende Strahlen liegen, so auch in derjenigen, welche den gemeinsamen Strahl der Strahlenbüschel, den Schnittstrahl ihrer Ebenen, enthält; dieser wird sich selbst entsprechend. Die Strahlenbüschel heißen in perspektiver Lage.

Umgekehrt, wenn bei zwei in derselben Ebene gelegenen projektiven Strahlenbüscheln um die Punkte O, O' der gemeinsame Strahl OO' sich selbst entspricht, so sind sie mit der nämlichen Punktreihe perspektiv und daher selbst in perspektiver Lage.

Jener Strahl sei e, e', und weiter mögen den a, b die a', b' entsprechen. Wir verbinden die Schnittpunkte aa', bb' durch die Gerade s; es führt dann der Schnitt mit s und die Projektion aus O' von a, b, e zu a', b', e' und daher auch von x zu x', d. h. jede zwei entsprechenden Strahlen schneiden sich auf s, mit dieser Punktreihe sind beide Strahlenbüschel perspektiv. Die Gerade s heißt die Perspektivitätsaxe (perspektiver Durchschnitt).

Dual: Wenn bei zwei von demselben Punkte ausgehenden projektiven Strahlenbüscheln, die in den Ebenen ω, ω' liegen, der gemeinsame Strahl $\omega\omega'$ sich selbst entspricht, so sind sie mit demselben Ebenenbüschel perspektiv und daher selbst in perspektiver Lage.

Diesmal sei s der Schnittstrahl der Verbindungsebenen aa', bb' (der durch den Scheitel geht), so führt die Projektion aus s und der Schnitt mit ω' von a, b, e zu a', b', e' und daher von x zu x'; jede zwei entsprechenden Strahlen x, x' liegen in derselben Ebene des Büschels von s, mit diesem Ebenenbüschel sind beide Strahlenbüschel perspektiv; s heißt auch hier die Perspektivitätsaxe.

Damit sind die vier Fälle perspektiver Lage gleichartiger Gebilde erledigt.

Wir werden im allgemeinen an der im vorangehenden aufgestellten Definition projektiver Strahlenbüschel in perspektiver Lage festhalten, bemerken jedoch, daß es bisweilen vorteilhaft ist, Strahlenbüschel aus verschiedenen Scheiteln und in verschiedenen Ebenen, welche zu derselben Punktreihe oder zu demselben Ebenenbüschel perspektiv sind, zueinander perspektiv nennen zu können, also projektive Strahlenbüschel ohne gemeinsamen und sich selbst entsprechenden Strahl.

38 Wir können aus den vier eben betrachteten Figuren noch einiges über Dualität lernen. Dazu aber müssen wir die Grundgebilde zweiter Stufe einführen: das Feld, den Inbegriff aller Punkte und aller Geraden einer Ebene, und den Bündel, der Inbegriff aller Strahlen und Ebenen durch einen festen Punkt, seinen Scheitel. Dieser Scheitel und die Ebene dort sind je der Träger des Gebildes.

Diese beiden Gebilde sind dual zueinander und zwar erstens die Punkte des Feldes und die Ebenen des Bündels, und zweitens die Strahlen des einen und des anderen Gebildes, also auch die Punktreihen des Feldes und die Ebenenbüschel des Bündels, die Strahlenbüschel im Felde und im Bündel.

Von unseren vier Figuren perspektiver Gebilde sind zwei Feldfiguren und zwar 1) perspektive Punktreihen und 2) perspektive Strahlenbüschel mit gemeinsamer Ebene, und zwei Bündelfiguren: 1′) perspektive Ebenenbüschel und 2′) perspektive Strahlenbüschel mit demselben Scheitel.

Dual sind 1) und 1′), 2) und 2′).

Innerhalb eines jeden dieser zweistufigen Gebilde, Feld und Bündel, haben wir auch eine Dualität: in der Felddualität stehen sich Punkt und Strahl, Punktreihe und Strahlenbüschel, in der Bündeldualität aber Ebene und Strahl, Ebenenbüschel und Strahlenbüschel dual gegenüber. Die eine von ihnen ist räumlich dual zur andern.

Es ist nicht notwendig, daß zwei fedduale Figuren demselben Felde, zwei bündelduale demselben Bündel angehören.

Von den vier Figuren sind die beiden Feldfiguren 1) und 2) felddual und ebenso die beiden Bündelfiguren 1′) und 2′) bündeldual.

Man beachte, daß auch in diesen Figuren keine Maßbeziehungen vorkommen, aber die perspektive Raumanschauung (Nr. 25) vorausgesetzt wird.

39 Aber Bündel und Feld stehen noch in einer anderen Beziehung: wir können sie uns zueinander in perspektiver Lage denken, den Bündel als Projektion des Feldes, das Feld als Schnitt des Bündels; das ist zwar eine Verwandtschaft zwischen zweistufigen Gebilden, aber doch so einfacher Art, daß sie jetzt schon herangezogen werden kann.

In ihr entsprechen den Punkten und Strahlen des Feldes die Strahlen und Ebenen des Bündels, die nach ihnen gehen, nicht umgekehrt, wie vorhin bei der Dualität. Jetzt entsprechen also perspektiven Punktreihen in der Ebene, also der Figur 1) perspektive Strahlenbüschel im Bündel, die Figur 2'), und perspektiven Strahlenbüscheln im Felde, Figur 2), perspektive Ebenenbüschel im Bündel, Figur 1').

§ 7. Perspektive Dreiecke. Vollständiges Viereck und Vierseit. Beweise ohne Maßbeziehungen.

Wenn bei zwei Dreiecken $ABC, A'B'C'$, welche in ver- 40
schiedenen Ebenen σ, σ' liegen, die drei Verbindungslinien AA', BB', CC' in einem Punkt O zusammenlaufen, so schneiden sich die entsprechenden Seiten BC und $B'C'$, CA und $C'A'$, AB und $A'B'$ und dann notwendig auf der Schnittlinie $\sigma\sigma'$.

Weil BB' und CC' sich in O schneiden, so liegen sie in einer Ebene und mit ihnen also auch $BC, B'C'$, die sich deshalb schneiden; und ebenso in den beiden anderen Fällen. Es erhellt, daß die Punkte auch unendlich ferne sein können; man betrachte insbesondere die Fälle, wo O unendlich ist, also AA', BB', CC' parallel sind oder wo die Ebenen σ, σ' parallel sind und dann auch die entsprechenden Seiten parallel werden, also alle drei Schnittpunkte im Unendlichen liegen: auf der unendlich fernen gemeinsamen Gerade der Ebenen σ, σ', auf welche wir damit schon hingewiesen werden.

Umgekehrt: Wenn die entsprechenden Seiten der beiden in verschiedenen Ebenen σ, σ' gelegenen Dreiecke ABC, $A'B'C'$ sich schneiden (und dann auf $\sigma\sigma'$), so laufen AA', BB', CC' in einen Punkt O zusammen.

In der Tat, die sich schneidenden Geraden BC und $B'C'$, CA und $C'A'$, AB und $A'B'$ bestimmen drei Ebenen α, β, γ und in deren gemeinsamen Punkt laufen die drei Schnittlinien $\beta\gamma, \gamma\alpha, \alpha\beta$ zusammen; aber auf $\beta\gamma$ liegen ersichtlich A, A', so daß $\beta\gamma$ mit AA' und ebenso $\gamma\alpha$ mit BB', $\alpha\beta$ mit CC' identisch ist.

Solche Dreiecke heißen *perspektiv gelegen* oder kurz perspektiv.

Räumlich dual stehen unseren Sätzen die beiden folgenden gegenüber.

Wenn bei zwei Dreiflachen (Triedern) $\alpha\beta\gamma$ und $\alpha'\beta'\gamma'$ mit verschiedenen Scheiteln S, S' die drei Schnittlinien $\alpha\alpha', \beta\beta', \gamma\gamma'$ in einer Ebene liegen, so schneiden sich die entsprechenden Kanten $\beta\gamma$ und $\beta'\gamma'$, $\gamma\alpha$ und $\gamma'\alpha'$, $\alpha\beta$ und $\alpha'\beta'$, und die verbindenden Ebenen gehen durch die Verbindungslinie SS'.

Und umgekehrt.

Der Leser dualisiere die vorherigen Beweise.

41 Die Sätze gelten aber auch, wenn die Dreiecke in derselben Ebene σ liegen. In diese fällt dann natürlich auch O, und das Schneiden entsprechender Seiten, das vorhin bewiesen oder vorausgesetzt werden mußte, ist selbstverständlich, das Liegen der drei Schnittpunkte in gerader Linie ist dann Behauptung, bzw. Voraussetzung.

Wir wollen die beiden Sätze, obwohl es sich um Figuren einer Ebene handelt, räumlich beweisen, weil dann die Beweise viel anschaulicher sind und nur Lageneigenschaften vorführen.[1])

Wir setzen erstens voraus, daß AA', BB', CC' in einen Punkt O (von σ) zusammenlaufen. Durch ihn ziehen wir eine nicht in σ gelegene Gerade; S, S' seien zwei Punkte auf ihr, aus denen wir bzw. die Ecken der beiden Dreiecke projizieren. Die Geraden AA' und SS' treffen sich in O, und in ihrer Ebene liegen AS und $A'S'$, die also einen Schnitt A_1 haben, und ebenso haben BS und $B'S'$ einen Schnitt B_1 und CS und $C'S'$ einen Schnitt C_1; es ergibt sich ein drittes in anderer Ebene σ_1 gelegenes Dreieck $A_1B_1C_1$, das sowohl zu ABC als zu $A'B'C'$ perspektiv liegt mit dem Zentrum S bzw. S'. Daher schneiden sich seine Seiten B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 auf $\sigma\sigma_1$ sowohl mit BC, CA, AB, als mit $B'C', C'A', A'B'$; d. h. BC und $B'C'$, CA und $C'A'$, AB und $A'B'$ schneiden sich in den Punkten der Gerade $o = \sigma\sigma_1$, durch welche B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 gehen.

Umgekehrt sei nun vorausgesetzt, daß die drei Schnittpunkte $(BC, B'C')$, $(CA, C'A')$, $(AB, A'B')$ in einer Gerade o liegen. Durch diese sei dann eine zweite Ebene σ_1 gelegt und auf sie aus einem beliebigen Punkt S das Dreieck ABC in $A_1B_1C_1$ projiziert; mithin schneiden sich B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 mit BC, CA, AB auf $\sigma\sigma_1 = o$, also in den Punkten, durch welche auch $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ gehen; und demnach liegen auch $A'B'C'$ und $A_1B_1C_1$ perspektiv: $A'A_1$, $B'B_1$, $C'C_1$ laufen in S' zusammen. Nun haben AS und $A'S'$ den Punkt A_1 gemeinsam; in ihrer Ebene liegen AA' und SS' und schneiden sich; AA', in σ, geht also durch den Punkt O, in dem diese Ebene von SS' geschnitten wird, und dasselbe läßt sich für BB' und CC' beweisen.[2])

O und o heißen natürlich Perspektivitäts-Zentrum und -Axe.

---

1) Deshalb vermeide ich die Worte planimetrisch und stereometrisch.

2) Man kann aber auch, durch andere Auffassung der Figur, jeden der beiden Sätze aus dem andern ableiten, z. B. den ersten aus dem zweiten so: Wenn vorausgesetzt ist, daß AA', BB', CC' durch denselben Punkt O gehen und die Punkte $(BC, B'C')$, $(CA, C'A')$, $(AB, A'B')$, deren Geradlinigkeit erkannt werden soll, mit $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ bezeichnet werden, so liegen in gerader Linie $(AA', BB') = O$, $(A\mathfrak{B}, B\mathfrak{A}) = C$, $(A'\mathfrak{B}, B'\mathfrak{A}) = C'$; daher sind die Dreiecke $AA'\mathfrak{B}$, $BB'\mathfrak{A}$ perspektiv, AB, $A'B'$, $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ laufen in einen Punkt zusammen; d. h. $\mathfrak{C} = (AB, A'B')$ liegt auf $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$.

Diese beiden Sätze über perspektive Dreiecke in derselben Ebene 42
stehen sich dual gegenüber nach der Dualität im Felde. Aus ihnen leitet man zwei im Bündel duale Sätze über perspektive Dreiflache aus demselben Scheitel entweder durch Dualisieren im Raume oder durch perspektive Lage von Feld und Bündel ab, wobei in dem einen Falle die beiden Sätze in umgekehrter Reihenfolge sich ergeben als im anderen.

Die Dualität tritt aber noch etwas deutlicher hervor, wenn man die Bezeichnung ändert, die Dreiecke in dem einen Satze nach den Ecken, in dem andern nach den Seiten benennt, sie als Dreiseite auffaßt. Dann lauten die Sätze:

Wenn bei zwei Dreiecken ABC, $A'B'C'$ derselben Ebene die drei Verbindungslinien AA', BB', CC' in einen Punkt zusammenlaufen, so liegen die drei Schnittpunkte:

$$(BC,\ B'C'),\ (CA,\ C'A'),\ (AB,\ A'B')$$

in gerader Linie.

Wenn bei zwei Dreiseiten abc, $a'b'c'$ derselben Ebene die drei Schnittpunkte aa', bb', cc' in gerader Linie liegen, so laufen die drei Verbindungslinien:

$$(bc,\ b'c'),\ (ca,\ c'a'),\ (ab,\ a'b')$$

in einen Punkt zusammen.

Und ähnlich bei zwei Dreiflachen bzw. Dreikanten in demselben Bündel.

Wir haben im vorangehenden immer die unbegrenzten Figuren 43
im Auge gehabt. Fassen wir aber das Dreiflach in dem engeren Sinne der elementaren Stereometrie als dreiseitige oder dreikantige Ecke auf, wo die Kanten nur Halbstrahlen, die Seitenflächen nur Winkel sind, so enthält jedes Dreiflach deren 8, von denen viermal je zwei Scheitelecken sind.

Stellen wir nun eine solche Ecke (und ihre Scheitelecke) über ein (begrenztes) Dreieck ABC, so daß ihre Kanten (Halbstrahlen) durch A, B, C gehen und ihre Kantenwinkel über den begrenzten Seiten stehen, dann entsprechen perspektiv den drei anderen Scheitelecken-Paaren uneigentliche Dreiecke, von denen zwei Seiten Staudtsche im Unendlichen zusammenhängende Strecken sind in folgenden drei Zusammenstellungen:

$$BC,\ C\cdot A,\ A\cdot B;\ CA,\ A\cdot B,\ B\cdot C;\ AB,\ B\cdot C,\ C\cdot A;$$

man wird diese Dreiecke mit Staudt passend durch $BC\cdot A$, $CA\cdot B$, $AB\cdot C$ bezeichnen.[1]) Wir werden später erkennen, wie gewöhnliche

1) In $BC\cdot A$ ist $\sphericalangle B + C - A = \pi$.

Dreiecke durch Transformationen in solche uneigentliche Dreiecke übergehen können.

44 Dreieck und Dreiseit, sich felddual gegenüberstehend, sind doch im Grunde dieselbe Figur. Das ändert sich, wenn die Zahl der Ecken oder Seiten sich vermehrt; wir gelangen damit zu den sogenannten und von Carnot eingeführten vollständigen Figuren, die wir zunächst in der Ebene betrachten.

Vier Punkte K, L, M, N in derselben Ebene bilden ein vollständiges Viereck mit sechs Seiten, allen sechs (unendlich langen) Verbindungslinien, welche drei Paare Gegenseiten bilden: KL und MN, usw. Die Schnittpunkte dieser Gegenseiten heißen die Diagonalpunkte des Vierecks; sie sind die Ecken des Diagonaldreiecks und dessen Seiten heißen die Diagonalen des Vierecks, so daß dies Wort hier in anderer Bedeutung gebraucht wird als in den Elementen.

Dem vollständigen Vierecke steht felddual gegenüber das vollständige Vierseit, eine ganz andere Figur[1]): vier gerade Linien k, l, m, n in der Ebene, mit sechs Ecken, allen sechs Schnittpunkten, drei Paaren Gegenecken, den Diagonalen, welche Gegenecken verbinden, dem Diagonaldreiseite und den Diagonalpunkten, den Ecken desselben.

Ein Parallellogramm z. B. können wir ebenso als die eine, wie als die andere Figur auffassen; betrachten wir es als vollständiges Viereck, so wird das dritte Paar Gegenseiten durch die Diagonalen (im Sinne der elementaren Geometrie) gebildet, und deren Schnitt ist auch einer der drei Diagonalpunkte der vollständigen Figur, die beiden anderen sind unendlich fern, von den drei Diagonalen gehen zwei durch den elementaren Diagonalpunkt parallel zu den elementaren Gegenseiten, die dritte ist unendlich fern.

Fassen wir es aber als vollständiges Vierseit auf, so kommen zu den beiden Paaren elementarer Gegenecken noch zwei unendlich ferne Gegenecken, und deren verbindende Diagonale ist wieder unendlich fern; die beiden andern sind die elementaren Diagonalen. Diagonalpunkte sind ihr Schnitt (der elementare Diagonalpunkt) und ihre unendlich fernen Punkte.

Durch Projektion ergeben sich die zueinander dualen Figuren der vollständigen Vierkante und Vierflache im Bündel.

Ein vollständiges Viereck im Raume hat sechs Verbindungskanten und vier Verbindungsebenen; ein vollständiges Vierflach (Tetraeder) im Raum hat sechs Schnittkanten und vier Schnittpunkte und ist dieselbe Figur.

---

1) Während ein einfaches Vierseit zugleich ein einfaches Viereck ist und umgekehrt.

Vervollständigen wir bei der Figur zweier perspektiver Dreiecke 45
ABC, $A'B'C'$ in derselben Ebene, von denen wir aber das eine $A'B'C'$ als Dreiseit $a'b'c'$ (wo $a' = B'C' \ldots$) auffassen, ABC durch das Zentrum, das nun D heiße, zum vollständigen Vierecke und $a'b'c'$ durch die Axe d' zum vollständigen Vierseite, so haben diese beiden Figuren die Lage, daß das Viereck dem Vierseite verkehrt umgeschrieben ist, d. h. so, daß auf jeder Seite von jenem die Gegenecke der entsprechenden Ecke von diesem liegt: auf AB liegt $c'd'$ usw.[1])

Die Figur zweier perspektiver Dreiecke in einer Ebene ist eine Konfiguration von zehn Punkten und zehn Geraden, von denen durch jeden der Punkte drei Geraden gehen, auf jeder der Geraden drei Punkte liegen, weshalb sie mit $(10_3, 10_3)$ bezeichnet werden möge. Sie kann in zehn Weisen als Figur zweier perspektiver Dreiecke aufgefaßt werden; jeder der zehn Punkte ist Zentrum.

In der Tat, es seien ABC, $A'B'C'$ die Dreiecke, O das Zentrum und $\mathfrak{A} = (BC, B'C')$, $\mathfrak{B} = (CA, C'A')$, $\mathfrak{C} = (AB, A'B')$ die drei Punkte auf der Axe o. Nehmen wir A als Zentrum, so sind OBC und $A'\mathfrak{C}\mathfrak{B}$ die Dreiecke und $B'C'\mathfrak{A}$ die Axe; nehmen wir $\mathfrak{A}$ als Zentrum, so sind $CC'\mathfrak{B}$ und $BB'\mathfrak{C}$ die Dreiecke und OAA' die Axe.

Auf eine Gerade s seien zwei Punktepaare AA', BB' und 46
ein einzelner Punkt C gelegt, dann sei in einer Ebene durch s ein vollständiges Viereck so konstruiert, daß fünf seiner Seiten durch jene Punkte gehen, und zwar zwei Paare Gegenseiten durch A, A'; B, B', die fünfte durch C. Wir fangen am besten mit dieser an. Auf eine Gerade durch C seien zwei Ecken K,L gelegt; wir schneiden KA mit LB' in M und KB mit LA' in N, so haben wir in $KLMN$ ein solches Viereck: es gehen KM, LN, KN, LM, KL durch A, A', B, B', C. Wir können ersichtlich unendlich viele konstruieren. Wir stellen in der nämlichen Weise ein zweites her: $K'L'M'N'$ in derselben oder in einer andern[2]) Ebene durch s. Dann gehen die sechsten Seiten MN, $M'N'$ ebenfalls durch den nämlichen Punkt von s, und also bei allen derartigen Vierecken. Die beiden Sätze über perspektive Dreiecke haben wir zum Beweise allein anzuwenden. Von den beiden Dreiecken KLM und $K'L'M'$ liegen die Schnittpunkte entsprechender Seiten C, B',A in gerader Linie s, also laufen KK', LL', MM' in einen Punkt zusammen; die Dreiecke KLN und $K'L'N'$, deren entsprechende Seiten sich in C, A', B schneiden, lehren dasselbe für KK', LL', NN', so daß alle vier Linien durch denselben

1) Pasch, Math. Annalen Bd. 26 S. 211.

2) Durch Drehung um s läßt sich der eine Fall auf den andern zurückführen.

Punkt gehen. Nunmehr zeigen die Dreiecke KMN, $K'M'N'$, bei denen KK', MM', NN' durch denselben Punkt gehen, daß auch MN, $M'N'$ sich auf derjenigen Gerade begegnen, auf der sich KM und $K'M'$ in A und KN, $K'N'$ in B begegnen, also auf s: in C'.

Dieser so eindeutig den Paaren AA', BB' und dem einzelnen Punkte C zugeordnete Punkt C' ist der sechste Punkt in Involution, der dem Punkte C in der Involution (AA', BB') gepaarte Punkt.

Oder die drei Punktepaare AA', BB', CC', in denen die Gegenseiten KM, LN; KN, LM; KL, MN eines vollständigen Vierecks von einer Gerade s geschnitten werden, sind drei Paare in Involution.

Ist nämlich der Diagonalpunkt $(KL, MN) = O$, so projizieren wir den Wurf $COKL$ aus M und N auf s, wodurch wir zwei Würfe gleichen Doppelverhältnisses erhalten:

$$(COKL) = (CC'AB') = (CC'BA') = (C'CA'B);$$

aber:

$$(CC'AB') = (C'CA'B)$$

sagt aus, daß CC', AA', BB' in Involution sind (Nr. 11). Unser Ergebnis liefert uns eine lineare Konstruktion des sechsten Punktes in Involution, bei der freilich aus dem einstufigen Gebiete herausgegangen wird.

Nehmen wir an, daß von unsern Punkten A' nach A und B' nach B rücke, so daß zwei Gegenseiten KM, LN durch A, zwei andere KN, LM durch B gehen, die s also eine Diagonale des Vierecks wird, so haben wir die Involution AA, BB, CC'; A, B werden Doppelpunkte und C, C' zu ihnen harmonisch, und wir erhalten analog eine lineare Konstruktion des vierten harmonischen Punktes.[1])

Also auf jeder Diagonale eines vollständigen Vierecks werden die beiden Diagonalpunkte durch die Schnitte mit den im dritten Diagonalpunkte sich schneidenden Gegenseiten oder, wie man einfacher sagt, durch diese Gegenseiten harmonisch getrennt.[2])

---

1) Ist O wieder der Diagonalpunkt (KL, MN), so projiziere man $MONC'$ aus K und L auf die Diagonale s und hat:

$$(ACBC') = (BCAC'), \text{ oder } \frac{AB}{CB}\cdot\frac{CC'}{AC'} = \frac{BA}{CA}\cdot\frac{CC'}{BC'},$$

also

$$\frac{AC}{BC}:\frac{AC'}{BC'} = -1.$$

2) Die harmonische und die involutorische Eigenschaft des vollständigen Vierecks finden sich (metrisch bewiesen) schon bei Pappus: Collectio Buch VII Satz 130, 131.

Beachten wir, daß diese Konstruktion ganz von Maßbeziehungen frei ist und damit auch die Involution und Harmonizität auf reine Lageneigenschaften basiert sind. In Staudts Geometrie der Lage, in der von allen Maßbeziehungen abgesehen wird, wird von dieser Grundlage ausgegangen und in Reyes Geometrie der Lage geschieht es gleichfalls.

Dieser harmonische Wurf auf einer Diagonale führt durch Projektion zu einem solchen um einen Diagonalpunkt und auf einer Seite, so daß die harmonische Eigenschaft des vollständigen Vierecks noch auf zwei Weisen ausgesprochen werden kann: Um einen Diagonalpunkt sind harmonisch die beiden Gegenseiten zu den beiden Diagonalen, auf einer Seite der Diagonalpunkt und der Schnitt mit der Gegendiagonale zu den beiden Ecken.

Das vollständige Vierseit kann man dual ganz ebenso behandeln. 47
Es seien in einem Strahlenbüschel S zwei Strahlenpaare aa', bb' und ein einzelner Strahl c gegeben.

Man konstruiere beliebig viele vollständige Vierseite, von denen eine Ecke auf c, zwei Gegenecken auf a und a', die des dritten Paares auf b und b' liegen; die sechste der ersten gegenüberliegende Ecke liegt auf einem festen Strahle c' des Büschels.

Der Beweis ist einfach dual zum vorherigen zu führen, wobei die beiden Sätze über perspektive Dreiecke in umgekehrter Reihenfolge zur Verwendung kommen.

In derselben Weise stellt sich c' als sechster Strahl in Involution zu aa', bb', c heraus. Man hat:

Die Gegeneckenpaare eines vollständigen Vierseits werden aus jedem Punkte der Ebene durch drei Strahlenpaare in Involution projiziert.

Die Vereinigung von a' mit a, b' mit b führt zur harmonischen Eigenschaft des vollständigen Vierseits:

Zwei Diagonalen des Vierseits werden durch die Ecken auf der dritten Diagonale harmonisch getrennt,

die wiederum noch in zwei anderen Formen ausgesprochen werden kann.

Wir haben lineare Konstruktionen des sechsten Strahls in Involution und des vierten harmonischen Strahls.

Durch Übergang vom Felde in den Bündel erhält man analoge Ergebnisse für das vollständige Vierkant oder Vierflach und damit eine zweite lineare Konstruktion für den sechsten Strahl in Involution und den vierten harmonischen Strahl und eine für die sechste Ebene in Involution und die vierte harmonische Ebene.

Daß die Involution und die Harmonizität projektiv sind, ergibt sich aus der gegenwärtigen Betrachtung unmittelbar.

48 Von den beiden involutorischen Eigenschaften für das vollständige Viereck und Vierseit wollen wir die letztere aus der ersteren ableiten. Von den sechs Ecken des Vierseits liegen drei A', B', C' auf einer Seite; die drei Gegenecken A, B, C und der Punkt S, aus welchem projiziert wird, bilden ein Viereck, dessen Seiten BC, CA, AB jene Seite in A', B', C' treffen, während A_1, B_1, C_1 die Schnitte von $A'B'C'$ mit den Gegenseiten $S(A, B, C)$ seien. Nach dem ersten Satze sind A_1, A'; B_1, B'; C_1, C' in Involution, woraus durch Projektion aus S folgt, daß auch die Strahlenpaare

$$S(A, A'; B, B'; C, C')$$

in Involution sind; und ähnlich kann umgekehrt verfahren werden.

Wenn auf einer Gerade u eine Involution sich befindet, in der den Schnitten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ mit den Seiten BC, CA, AB eines Dreiecks die Punkte $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$ gepaart sind, so laufen $A\mathfrak{A}'$, $B\mathfrak{B}'$, $C\mathfrak{C}'$ in einen Punkt zusammen. Denn sei D der Schnitt von $A\mathfrak{A}'$ und $B\mathfrak{B}'$, so werden vom Viereck $ABCD$ fünf Seiten in den Punkten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$; $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}'$; $\mathfrak{C}$ geschnitten, also geht die sechste CD nach dem sechsten $\mathfrak{C}'$ in Involution, oder $C\mathfrak{C}'$ geht durch D.

Aus vier gegebenen Geraden a, b, c, d kann man drei einfache Vierseite (oder Vierecke) bilden: $abcd$, $acdb$, $adbc$; je acht Permutationen geben dieselbe Figur. Wir denken sie uns als vollständige Vierecke mit den Gegenseiten:

$$a, c; \; b, d, \qquad a, d; \; c, b, \qquad a, b; \; d, c$$

und schneiden mit einer gegebenen Gerade e, so daß wir auf dieser dreimal zwei Paare erhalten, aus denselben vier Punkten gebildet:

$$e(a, c; b, d), \quad e(a, d; b, c), \quad e(a, b; d, c).$$

Sie bestimmen drei Involutionen, von denen zwei hyperbolisch sind und eine elliptisch (Nr. 9). Daraus folgt, daß man aus vier gegebenen Geraden ein einfaches Vierseit so herstellen kann, daß das zugehörige vollständige Viereck von einer gegebenen Gerade in einer Involution von gegebener Art geschnitten wird. Dabei ist zu vermeiden, daß von den fünf Geraden drei durch einen Punkt gehen.

Und analoges gilt für fünf Punkte A, B, C, D; E.

49 Wir haben gefunden (Nr. 34), daß drei windschiefe Geraden b_1, b_2, b_3 zu einer Regelschar von lauter untereinander windschiefen Geraden führen, welche alle drei treffen. Wir nehmen drei aus ihr: a_1, a_2, a_3, welche dann ihrerseits zu einer Regelschar führen, zu der b_1, b_2, b_3 gehören. Wenn a eine beliebige Gerade jener Regelschar $[b_1 b_2 b_3]$ und b eine beliebige

aus dieser $[a_1 a_2 a_3]$ ist, so soll bewiesen werden, daß sie sich schneiden müssen.

Es seien P_1, P_2 die Schnittpunkte $a_1 b_1$, $a_2 b_2$ und Π_3 die Ebene $a_3 b_3$. In letzterer liegen dann die Schnitte A_1, A_2, A von a_1, a_2, a mit b_3, sowie die Schnitte B_1, B_2, B von b_1, b_2, b mit a_3. Die Punkte P_1, P_2 liegen in beiden Ebenen $a_1 b_2$, $a_2 b_1$; also ist deren Schnittlinie mit $P_1 P_2$ identisch und weil $A_1 B_2$, $A_2 B_1$ die Spuren von $a_1 b_2$, $a_2 b_1$ in Π_3 sind, so ist ihr Schnittpunkt $C_{12} = (A_1 B_2, A_2 B_1)$ die Spur der $P_1 P_2$ in Π_3. Ebenso ist die Gerade p_1, die durch P_1 geht und a, b trifft, die Schnittlinie der Ebenen $P_1 a$, $P_1 b$, die wir auch als Ebenen $b_1 a$, $a_1 b$ bezeichnen können, da z. B. b_1 durch P_1 geht und a trifft, also in $P_1 a$ fällt; folglich ist die Spur von p_1 in Π_3 der Punkt $C_1 = (B_1 A, A_1 B)$, und in gleicher Weise ist die Spur der Gerade p_2 aus P_2, welche a, b trifft, oder der Schnittlinie von $b_2 a$, $a_2 b$ der Punkt $C_2 = (B_2 A, A_2 B)$.

Betrachten wir nun die beiden in Π_3 gelegenen vollständigen Vierecke $A_1 B_2 A B_1$ und $B_1 A_2 B A_1$, von denen die Seiten $A_1 A$ und $A_2 A_1$ in b_3, die Seiten $B_2 B_1$ und $B_1 B$ in a_3 liegen; so zeigt sich, daß die Seiten

$$A_1 A,\ B_2 B_1;\quad A_1 B_1,\ B_2 A;\quad A B_1,$$

bzw.

$$A_2 A_1,\ B_1 B;\quad A_1 B_1,\ A_2 B;\quad B A_1$$

die Gerade $C_1 C_2 = c$ in denselben Punkten treffen, nämlich in den Schnitten mit b_3, a_3, $A_1 B_1$ und den Punkten C_2, C_1; also gehen auch die sechsten Seiten $A_1 B_2$ und $B_1 A_2$ durch den nämlichen Punkt dieser Gerade, d. h. C_{12} liegt auf c; daher ist C_{12} Schnittpunkt von $P_1 P_2$ und c. In ihre Ebene fällt p_1, welche $P_1 P_2$ in P_1 und c in C_1 trifft, und ebenso p_2.

Diese Geraden p_1, p_2 schneiden sich also. Sie werden von a, b getroffen. Dies kann so geschehen, daß beide durch den Schnittpunkt gehen oder beide in die Ebene fallen oder die eine jenes, die andere dies tut. Aber in die Ebene kann weder a, noch b fallen. Denn sie können weder durch P_1 oder P_2 gehen, noch kann eine von ihnen mit $P_1 P_2$ identisch sein, weil das nicht vereinbar mit dem Windschiefsein gegen a_1, a_2, bzw. b_1, b_2 ist. Fiele nun a oder b in die Ebene $p_1 p_2$, so würde sie die $P_1 P_2$ treffen, die auch in dieser Ebene liegt, und zwar in einem von P_1, P_2 verschiedenen Punkte; dann kämen von diesem zwei Geraden, a und $P_1 P_2$, oder b und $P_1 P_2$, welche b_1, b_2, bzw. a_1, a_2 treffen, was nicht möglich ist. Also kann nur der erste Fall eintreten, daß a und b beide durch den Punkt $p_1 p_2$ gehen, d. h. sie schneiden sich.

Jede Gerade aus der Regelschar $[b_1 b_2 b_3]$ trifft folglich jede aus der Regelschar $[a_1 a_2 a_3]$, und beliebige drei aus

der einen können als Leitgeraden der andern genommen werden.

Faßt man vorzugsweise die eine ins Auge, so wird die andere als ihre Leitschar bezeichnet; will man sie gleichartig behandeln, so wird man sie besser verbundene Regelscharen nennen.

50 Wenn fünf Ecken eines vollständigen ebenen Vierseits auf fünf windschiefen Geraden laufen, so bewegt sich auch die sechste auf einer Gerade.

Jene fünf Ecken seien A, B, C, D, E, die sechste F, und es seien BCD, CAE, ABF, DEF die vier Seiten, also A und D, B und E, C und F Gegenecken. Die fünf Geraden seien a, b, c, d, e. Auf eine beliebige Projektionsebene Π projizieren wir aus einem Punkte P, in dem sich eine Gerade, welche a, b, c trifft, mit einer Gerade, welche d, e, c trifft, schneidet; jede Ebene durch c enthält in dem Schnittpunkt der Verbindungslinien der Spuren von a und b und von d und e einen solchen Punkt. Die Projektionen seien mit $A', \ldots, a', \ldots$ bezeichnet. Es laufen a', b', c' in einen Punkt O zusammen, ebenso c', d', e' in einen Punkt Q zusammen; A' liegt auf a', usw. Es seien dann noch A_1, B_1, C_1 die Schnitte von a', b', c' mit $D'E'F'$, und R, S die Schnitte $b'd'$, $a'e'$. Da das Projektionszentrum nur von a, b, c, d, e abhängt, nicht von dem beweglichen Vierseite, so gilt dies auch, bei fester Π, von den Punkten R, S. Durch A_1, D'; B_1, E'; C_1, F', sechs Punkte einer Gerade, gehen die Gegenseiten OA', $B'C'$; OB', $C'A'$; OC', $A'B'$ von $OA'B'C'$; durch die fünf ersten Punkte gehen ebenfalls zweimal zwei Gegenseiten und eine fünfte Seite des Vierecks $OQRS$, nämlich OS, QR; OR, QS; OQ; daher muß die sechste Seite RS durch F' gehen, oder die Projektion F' von F bleibt auf der festen Gerade RS, also der Punkt F in der Ebene von P nach derselben. Nimmt man das Zentrum P in einer andern Ebene durch c, so ergibt sich, daß F in der Ebene aus diesem nach der dann sich ergebenden Gerade RS bleibt. Folglich muß F auf der Schnittlinie f dieser beiden Ebenen (und aller den verschiedenen Lagen von P entsprechenden) bleiben.

Es liegen zwei Punktreihen a und b vor; jede sei mit einer dritten c projektiv gemacht vermittelst eines Ebenenbüschels um e, bzw. d.[1]) Es liegen dann zwei entsprechende Punkte von a und c auf einer Gerade, welche a, c, e trifft, und zwei entsprechende von b und c auf einer Gerade, welche b, c, d trifft, zwei entsprechende Punkte also von a und b auf solchen Geraden l, m der Regelscharen $[ace]$, $[bcd]$, welche c in dem nämlichen Punkte treffen. Nennen

1) Die Projektion vermittelst eines Ebenenbüschels von einer Gerade auf eine andere umfaßt zwei elementare Operationen, Projektion und Schnitt.

wir die fünf Treffpunkte der beiden Geraden l, m mit $a, \ldots, e$, bzw. $A, \ldots, E$, so liegen A, C, E auf l und B, C, D auf m und $F = (AB, ED)$ ist die sechste Ecke eines vollständigen Vierseits, von dem sie fünf Ecken sind. Daher bewegt sich F auch auf einer Gerade f, und entsprechende Punkte von a und b liegen je in einer Ebene des Büschels f.

Folglich sind die beiden Ebenenbüschel e und d, von denen der erste die Punktreihe a in die Punktreihe c durch Projektion überführt und der zweite c in b, ersetzt durch einen Büschel f, welcher direkt a in b überführt.

Sind daher a und b durch eine größere Zahl von Projektionen vermittelst Ebenenbüscheln projektiv gemacht, so erhält man, immer zwei aufeinander folgende Projektionen durch eine ersetzend, schließlich eine einzige Projektion, welche die Projektivität bewirkt.

Dabei ist immer vorausgesetzt, daß man es mit windschiefen Trägern zu tun hat.

Handelt es sich nun um eine Projektivität zwischen den Punktreihen u, u', in der den Punkten A, B, C die Punkte A', B', C' entsprechen, so muß die Axe l des Ebenenbüschels, durch den allein diese Projektivität bewerkstelligt werden kann, die drei Geraden $a = AA'$, $b = BB'$, $c = CC'$ treffen, also zu der Regelschar $[a, b, c]$ gehören, und die weiteren Ebenen des Büschels l geben weitere entsprechende Punkte X, X' auf u, u'; jede Gerade $x = XX'$ ist eine Gerade, welche u, u', l trifft. Aber a, b, c; u, u', l gehören zu verbundenen Regelscharen; es sei l_1 eine andere Gerade der letzteren Schar, so treffen sich nach dem Satze in Nr. 49 x und l_1; d. h. es gibt eine Ebene durch l_1, welche X, X' einschneidet. Welche Gerade l aus der Regelschar $[a, b, c]$ auch genommen wird, die Ebenen ihres Büschels schneiden dieselben Punktepaare X, X' in u, u' ein. Die Projektivität ist eindeutig durch die drei Paare entsprechender Punkte bestimmt. Damit ist dieser fundamentale Satz (Nr. 32) ohne jede Maßbeziehung bewiesen, wenn die Cremonasche Definition projektiver Gebilde zu Grunde gelegt ist. Es genügt, wie wir wissen, der eine Fall, da die andern sich auf ihn zurückführen lassen.[1])

Wenn zwei Tetraeder $\alpha\beta\gamma\delta \equiv ABCD$ und $\alpha'\beta'\gamma'\delta' \equiv A'B'C'D'$ 51
so liegen, daß die vier Schnittlinien $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$, $\delta\delta'$ in einer Ebene ω sich befinden, so laufen die vier Verbindungslinien entsprechender Ecken $A = \beta\gamma\delta$, $A' = \beta'\gamma'\delta'$; ... in einen Punkt O zusammen. N. V. schneiden sich $\alpha\alpha'$ und $\beta\beta'$;

1) Die vorangehenden Betrachtungen Nr. 49, 50 rühren von Zeuthen her: Comptes rendus Bd. 125 S. 638.

durch den Schnittpunkt gehen $\alpha\beta = CD$, $\alpha'\beta' = C'D'$; und so schneiden sich jede zwei entsprechenden Kanten in ω; die Schnittpunkte $(BC, B'C')$, $(CD, C'D')$, $(DB, D'B')$ liegen auf der Gerade $\alpha\alpha'$; also sind die beiden Dreiecke BCD, $B'C'D'$ perspektiv: BB', CC', DD' laufen in einen Punkt zusammen, ebenso CC', DD', AA', d. h. alle vier Verbindungslinien in denselben Punkt.

Die duale Betrachtung liefert die Umkehrung. Wir nennen zwei solche Tetraeder perspektiv.

§ 8. Hauptsätze der Transversalentheorie.

52 Auch den Inhalten ebener Figuren gibt man (Möbius), je nachdem sie in dem einen oder andern Sinne umlaufen werden, verschiedene Vorzeichen, so daß z. B.

$$\triangle ABC = BCA = -ACB$$

ist.

Wenn die Träger zweier Strecken PQ, MN sich in O schneiden, so ist unmittelbar ersichtlich, daß, wie auch O auf ihnen liege, auch dem Vorzeichen nach gilt:

$$\frac{PO}{QO} = \frac{PMN}{QMN}.$$

Schneidet eine Transversale s die Seiten BC, CA, AB eines Dreiecks in A', B', C', so ist:

$$\frac{BA'}{CA'} \cdot \frac{CB'}{AB'} \cdot \frac{AC'}{BC'} = +1.$$

In der Tat, wenn M, N auf s liegen, so hat man:

$$\frac{BA'}{CA'} = \frac{BMN}{CMN}, \quad \frac{CB'}{AB'} = \frac{CMN}{AMN}, \quad \frac{AC'}{BC'} = \frac{AMN}{BMN},$$

woraus die Behauptung folgt.

Die linke Seite nennt man, auch wenn A', B', C' nicht in gerader Linie liegen, das Dreiseitschnitt-Verhältnis, das sie bilden; es gehört gleichmäßig zum eigentlichen Dreiecke, wie zu den drei uneigentlichen (Nr. 43).

Umgekehrt, drei Punkte A', B', C' auf den Seiten eines Dreiecks, deren Dreiseitschnitt-Verhältnis $+1$ ist, liegen in gerader Linie. Es ist nun die obige Relation vorausgesetzt; ist dann C_1' der Schnitt von $A'B'$ mit AB, so ist nach dem vorigen Satze:

$$\frac{BA'}{CA'} \cdot \frac{CB'}{AB'} \cdot \frac{AC_1'}{BC_1'} = +1;$$

daraus und aus der Voraussetzung folgt: $\frac{AC'}{BC'} = \frac{AC_1'}{AC_1'}$, also, weil diese

Gleichung auch dem Vorzeichen nach richtig ist, die Identität von C_1' mit C'; d. h. die Geradlinigkeit von A', B', C'.

Beide Sätze werden nach Menelaus[1]) (100 n. Chr.) benannt.

Die Relation lehrt, daß von den drei Punkten A', B', C', weil die drei Verhältnisse alle positiv sind oder nur eins, entweder alle drei auf den Strecken $B \cdot C$, $C \cdot A$, $A \cdot B$ liegen oder nur einer.

Sind dagegen A', B', C' die Schnitte der Seiten mit den Transversalen, welche einen beliebigen Punkt S der Ebene mit den Gegenecken verbinden, so ist:

$$\frac{BA'}{CA'} \cdot \frac{CB'}{AB'} \cdot \frac{AC'}{BC'} = -1,$$

und umgekehrt.
Denn die drei multiplizierten Verhältnisse sind gleich

$$\frac{BAS}{CAS}, \frac{CBS}{ABS}, \frac{ACS}{BCS}.$$

Der Beweis der Umkehrung erfolgt ähnlich wie vorhin.

Das ist der Satz von Ceva[2]).

Hier liegen entweder alle drei Punkte A', B', C' in den Strecken BC, CA, AB oder nur einer.

Den Vorzeichen-Unterschied hat erst unsere Zeit gebracht[3]). Insbesondere diesem letzteren Satze subsumieren sich bekannte Sätze der Elementargeometrie, aber auch folgender: Die Berührungspunkte eines jeden der 4 einem Dreiseite eingeschriebenen Kreise mit den Seiten geben mit den Gegenecken verbunden drei in einen Punkt zusammenlaufende Geraden. Und dem ersteren subsumiert sich:

Die Tangenten des einem Dreiecke umgeschriebenen Kreises in den Ecken schneiden die Gegenseiten in Punkten, die in gerader Linie liegen.

Konstruiert man zu den Punkten A', B', C' des einen oder andern Falls die vierten harmonischen A'', B'', C'' bezüglich der Ecken, so wird:

$$\frac{BA''}{CA''} \cdot \frac{CB''}{AB''} \cdot \frac{AC''}{BC''} = -\frac{BA'}{CA'} \cdot \frac{CB'}{AB'} \cdot \frac{AC'}{BC'};$$

so daß im ersteren Falle AA'', BB'', CC'' in einen Punkt S zusammenlaufen, im andern aber A'', B'', C'' in gerader Linie s

1) Dieser hat den entsprechenden sphärischen Satz (vgl. Nr. 58) zum Ausgangspunkt der sphärischen Trigonometrie gemacht: Menelai Sphaericorum libri tres. Der sphärische Satz wird schon von Ptolemäus Satz des Menelaus genannt.

2) Giov. Ceva, De lineis rectis se invicem secantibus, 1678.

3) Wird die ältere Schreibweise des Teilverhältnisses benutzt, so kehren sich die Vorzeichen um; der Menelaus-Satz hat -1, der Ceva-Satz $+1$.

liegen. Es wird so durch ein gegebenes Dreieck jeder Gerade s ein Punkt S eindeutig zugeordnet und umgekehrt: harmonischer Pol von s, harmonische Polare von S in bezug auf das Dreieck. Die harmonische Polare des Schwerpunkts ist unendlich fern.

Wenn A'', B'', C'' in gerader Linie liegen, so gilt dies auch für B', C', A''; C', A', B''; A', B', C'', und AA', BB'', CC''; usw. laufen je durch einen Punkt.

Betrachtet man im ersten Falle die Seiten des Dreiecks und s als vollständiges Vierseit, so sind AA', BB', CC' die Diagonalen und im zweiten Falle sind A', B', C' die Diagonalpunkte des vollständigen Vierecks (A, B, C, S).

53 Wir stellen über das Dreieck ABC ein Dreikant abc mit dem Scheitel O; die beliebig auf den Seiten gelegenen Punkte A', B', C' mögen sich aus O in die in den Seitenebenen des Dreikants gelegenen Strahlen a', b', c' projizieren. Der Sinussatz gibt, wenn A' einer der beiden Supplementwinkel bei A' ist, zunächst absolut:

$$\frac{BA'}{OB} = \frac{\sin ba'}{\sin A'}, \quad \frac{CA'}{OC} = \frac{\sin ca'}{\sin A'};$$

also:

$$\frac{BA'}{CA'} = \frac{\sin ba'}{\sin ca'} \cdot \frac{OB}{OC}.$$

Dies erkennt man als auch dem Vorzeichen nach richtig. Denn es seien vorderhand OB, OC die positiven Sinne auf b, c, so ist $\sphericalangle bc = BOC$; und gleichzeitig liegt A' in BC und a' in bc oder A' in $B \cdot C$, a' in $b \cdot c$, so daß $\frac{BA'}{CA'}$ und $\frac{\sin ba'}{\sin ca'}$, dasselbe Vorzeichen haben; $\frac{OB}{OC}$ ist positiv. Kehrt man nun auf b oder c den Sinn um, so ändern in der Formel zwei Größen ihr Vorzeichen, sie bleibt richtig.

Ebenso ist:

$$\frac{CB'}{AB'} = \frac{\sin cb'}{\sin ab'} \cdot \frac{OC}{OA}, \quad \frac{AC'}{BC'} = \frac{\sin ac'}{\sin bc'} \cdot \frac{OA}{OB};$$

daher:

$$\frac{BA'}{CA'} \cdot \frac{CB'}{AB'} \cdot \frac{AC'}{BC'} = \frac{\sin ba'}{\sin ca'} \cdot \frac{\sin cb'}{\sin ab'} \cdot \frac{\sin ac'}{\sin bc'}.$$

Folglich geht das Dreiseitschnitt-Verhältnis unverändert in das Dreiflachschnitt-Verhältnis über.

Ist also dies letztere $+1$ oder -1, so liegen die drei Strahlen a', b', c' in einer Ebene, bzw. die drei Verbindungsebenen aa', bb', cc' gehen durch einen Strahl; und umgekehrt[1]).

Schneiden wir das Dreiflach in einem andern Dreiseit oder pro-

1) Der erstere Fall, für das sphärische Dreiseit (auf einer Kugel um O), über dem das Dreiflach steht, ausgesprochen, ist der sphärische Satz von Menelaus, von ihm freilich in Sehnen, statt in Sinussen ausgesprochen.

jizieren wir das Dreiseit in ein anderes Dreiflach, so zeigen sich beide Verhältnisse als projektive Größen.

Kehren wir zum Dreiseit zurück und bezeichnen die Geraden BC, CA, AB mit a, b, c, die Verbindungslinien AA', BB', CC' mit a', b', c', so ergibt sich wie oben:

$$\frac{BA'}{CA'} = \frac{\sin ca'}{\sin ba'} \cdot \frac{AB}{AC},$$

wobei zu beachten ist, daß hier A an Stelle von O getreten ist, b, c vorhin OB, OC waren, jetzt AC, AB sind, also vertauscht werden müssen. Ebenso ist:

$$\frac{CB'}{AB'} = \frac{\sin ab'}{\sin cb'} \cdot \frac{BC}{BA}, \quad \frac{AC'}{BC'} = \frac{\sin bc'}{\sin ac'} \cdot \frac{CA}{CB};$$

also:

$$\frac{BA'}{CA'} \cdot \frac{CB'}{AB'} \cdot \frac{AC'}{BC'} = -\frac{1}{\frac{\sin ba'}{\sin ca'} \cdot \frac{\sin cb'}{\sin ab'} \cdot \frac{\sin ac'}{\sin bc'}}.$$

Die Größe im Nenner rechts, die nur äußerlich der obigen gleicht, nennen wir Dreieckschnitt-Verhältnis.

Man erkennt, daß man die Formeln von Menelaus und Ceva auch mit diesem Verhältnisse schreiben kann, aber mit umgekehrtem Vorzeichen rechts, nämlich:

Wenn

$$\frac{\sin ba'}{\sin ca'} \cdot \frac{\sin cb'}{\sin ab'} \cdot \frac{\sin ac'}{\sin bc'} = -1,$$

so liegen die drei Schnittpunkte aa', bb', cc' in einer Gerade und umgekehrt (Satz des Menelaus); wenn aber

$$\frac{\sin ba'}{\sin ca'} \cdot \frac{\sin cb'}{\sin ca'} \cdot \frac{\sin ac'}{\sin bc'} = +1,$$

so laufen a', b', c' in einen Punkt zusammen und umgekehrt (Satz des Ceva).

Sie stehen hier, in erweitertem Sinne, in welchem man bisweilen auch Maßbeziehungen an der Dualisierung teilnehmen läßt, felddual gegenüber, wenn man die eine Formel mit dem Dreiseitschnitt-Verhältnisse, die andere mit dem Dreieckschnitt-Verhältnisse schreibt.

Wir werden uns mehr und mehr überzeugen, daß diese Ausdehnung der Dualisierung auf Maßbeziehungen jedesmal erlaubt ist, wenn es sich um projektive, d. h. bei projektiven Operationen invariante Maßbeziehungen handelt.

Im Dreiflach mit den Kanten a, b, c, den Ebenen α, β, γ, seien in den Ebenen die Strahlen a', b', c' durch den Scheitel gezogen; so gilt die zweimalige Anwendung des Sinussatzes der sphärischen

Trigonometrie, wenn die Ebenen aa', bb', cc' mit α', β', γ' bezeichnet werden:

$$\frac{\sin ba'}{\sin ca'} = \frac{\sin \gamma\alpha'}{\sin \beta\alpha'} \cdot \frac{\sin ab}{\sin ac},$$

. . . .

Also wiederum:

$$\frac{\sin ba'}{\sin ca'} \cdot \frac{\sin cb'}{\sin ca'} \cdot \frac{\sin ac'}{\sin bc'} = - \frac{1}{\frac{\sin \beta\alpha'}{\sin \gamma\alpha'} \cdot \frac{\sin \gamma\beta'}{\sin \alpha\beta'} \cdot \frac{\sin \alpha\gamma'}{\sin \beta\gamma'}};$$

so daß auch die Formeln für das Trieder noch in einer zweiten Weise geschrieben werden können:

Je nachdem

$$\frac{\sin \beta\alpha'}{\sin \gamma\alpha'} \cdot \frac{\sin \gamma\beta'}{\sin \alpha\beta'} \cdot \frac{\sin \alpha\gamma'}{\sin \beta\gamma'} = -1 \quad \text{oder} \quad +1$$

ist, liegen die Schnittlinien $\alpha\alpha', \beta\beta', \gamma\gamma'$ in einer Ebene oder laufen die drei Ebenen α', β', γ' in einen Strahl zusammen.

Man kann wiederum direkt zeigen, daß dies Dreikantschnitt-Verhältnis gleich ist dem Dreieckschnitt-Verhältnis

$$\frac{\sin ba'}{\sin ca'} \cdot \frac{\sin cb'}{\sin ab'} \cdot \frac{\sin ac'}{\sin bc'},$$

wenn $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$ durch die Ebene des Dreiecks in a, b, c, a', b', c' geschnitten werden.

54 Wir fügen, als Anwendung, einen metrisch und planimetrisch geführten Beweis der Sätze über perspektive Dreiecke in derselben Ebene hinzu, wobei wir die in dualer Form geschriebenen Sätze von Menelaus und Ceva benutzen.

Bei ABC, $A'B'C'$ sei vorausgesetzt, daß AA', BB', CC' in einen Punkt O zusammenlaufen; es sei dann

$$\mathfrak{A} = (BC, B'C'), \quad \mathfrak{B} = (CA, C'A'), \quad \mathfrak{C} = (AB, A'B').$$

Der Satz von Menelaus, angewandt auf die Dreiecke OBC, OCA, OAB und die sie bzw. schneidenden Transversalen $B'C'\mathfrak{A}$, $C'A'\mathfrak{B}$, $A'B'\mathfrak{C}$, gibt:

$$\frac{B\mathfrak{A}}{C\mathfrak{A}} \cdot \frac{CC'}{OC'} \cdot \frac{OB'}{BB'} = 1, \quad \frac{C\mathfrak{B}}{A\mathfrak{B}} \cdot \frac{AA'}{OA'} \cdot \frac{OC'}{CC'} = 1, \quad \frac{A\mathfrak{C}}{B\mathfrak{C}} \cdot \frac{BB'}{OB'} \cdot \frac{OA'}{AA'} = 1;$$

woraus durch Multiplikation folgt:

$$\frac{B\mathfrak{A}}{C\mathfrak{A}} \cdot \frac{C\mathfrak{B}}{A\mathfrak{B}} \cdot \frac{A\mathfrak{C}}{B\mathfrak{C}} = 1;$$

d. h. $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ liegen in gerader Linie.

Umgekehrt sei bei den Dreiseiten abc, $a'b'c'$ vorausgesetzt, daß aa', bb', cc' in gerader Linie o liegen; die Verbindungslinien seien:

$$(bc, b'c') = \mathfrak{a}, \quad (ca, c'a') = \mathfrak{b}, \quad (ab, a'b') = \mathfrak{c}.$$

Der Satz von Ceva, angewandt auf die Dreiseite obc, oca, oab und die Punkte $b'c'\mathfrak{a}, c'a'\mathfrak{b}, a'b'\mathfrak{c}$, gibt:

$$\frac{\sin b\mathfrak{a}}{\sin c\mathfrak{a}} \cdot \frac{\sin cc'}{\sin oc'} \cdot \frac{\sin ob'}{\sin bb'} = 1, \ldots;$$

also:

$$\frac{\sin b\mathfrak{a}}{\sin c\mathfrak{a}} \cdot \frac{\sin c\mathfrak{b}}{\sin a\mathfrak{b}} \cdot \frac{\sin a\mathfrak{c}}{\sin b\mathfrak{c}} = 1;$$

d. h. $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ laufen in einen Punkt zusammen.

Wenn aus einem Punkte O die Geraden gezogen werden, 55
welche die Gegenkanten eines Tetraeders $ABCD$ treffen, und zwar:

$$BC, AD \text{ in } E, E', \quad CA, BD \text{ in } F, F', \quad AB, CD \text{ in } G, G',$$

so haben wir auf den Seiten eines jeden der vier Dreiecke drei Punkte, deren Verbindungslinien mit den Gegenecken zusammenlaufen. Z. B. für die drei Punkte E, F, G auf den Seiten von ABC ist dieser Punkt der Punkt D', in dem OD die Ebene δ dieses Dreiecks trifft; denn OEE' ist Schnittlinie der Ebenen OBC und OAD, liegt also mit OD in letzterer, so daß deren Spur AE in δ durch D' geht, und ebenso BF, CG.

Man dualisiere diesen Satz im Raume.

Wenn auf drei Kanten des Tetraeders, die von einer Ecke ausgehen, z. B. auf DA, DB, DC[1]) die Punkte E', F', G' beliebig angenommen werden, so seien in den Dreiecken DBC, DCA, DAB die Punkte E, F, G auf BC, CA, AB so bestimmt, daß jedesmal die Relation des Ceva gilt, so folgt, daß sie auch am vierten Dreiecke gilt. Sind dann A', B', C', D' die Konkurrenzpunkte in den vier Dreiecken, so laufen die sieben Geraden $AA', BB', CC', DD', EE', FF', GG'$ in einen Punkt O zusammen.

Denn die Geraden AA', BB' liegen beide in der Ebene ABG', weil A' auf BG' und B' auf AG'. Nimmt man ihren Schnitt als den Punkt O des vorigen Satzes, so fallen die Punkte A', B' desselben mit den jetzigen zusammen, daher auch in den Ebenen α, β die Punkte E, F', G' bezw. F, E', G' und daher auch der sechste Punkt G; denn er ist eindeutig durch die beiden andern Punkte in γ oder δ bestimmt. Oder auch von den vier Geraden $AA', \ldots DD'$ treffen sich, wie AA', BB', so jede zwei; also müssen sie, weil sie, durch die Ecken des Tetraeders gehend, nicht in derselben Ebene liegen, durch den nämlichen Punkt gehen. EE' trifft aber auch diese vier Geraden, mit der DD' z. B. liegt sie in der Ebene ADE; also muß sie durch ihren Schnittpunkt gehen, und ebenso FF', GG'.

---

1) Oder auf zwei Gegenkanten und einer dritten Kante.

Den Punkt O gewinnt man am einfachsten als den Schnittpunkt der drei Ebenen, welche E', F', G', die Punkte, von denen wir oben ausgingen, mit den Gegenkanten BC, CA, AB verbinden.

Die harmonischen Polaren der Punkte A', B' in bezug auf die Dreiecke BCD, CAD schneiden sich im vierten harmonischen Punkte zu G' in bezug auf C, D; also fallen alle vier harmonischen Polaren in dieselbe Ebene, in der die sechs vierten harmonischen Punkte liegen: die harmonische Polarebene des Punktes O in bezug auf $ABCD$.

§ 9. Ausgezeichnete Elemente von projektiven gleichartigen Gebilden.

56 Bei projektiven Punktreihen treten die beiden Punkte R und Q', welche je dem unendlich fernen Punkte R'_∞, Q_∞ der anderen Reihe entsprechen, besonders hervor. Sie heißen die Fluchtpunkte (Gegen- oder Grenzpunkte) der Reihen. Sind X und X', Y und Y' irgend zwei andere entsprechende Punkte, so ist:

$$(RQ_\infty XY) = (R'_\infty Q' X' Y'),$$

also:

$$\frac{RX}{RY} \cdot \frac{Q_\infty Y}{Q_\infty X} = \frac{R'_\infty X'}{R'_\infty Y'} \cdot \frac{Q'Y'}{Q'X'};$$

da aber

$$\frac{Q_\infty Y}{Q_\infty X} = \frac{R'_\infty X'}{R'_\infty Y'} = 1$$

(Nr. 14), so ergibt sich:

$$\frac{RX}{RY} = \frac{Q'Y'}{Q'X'}$$

oder:

$$RX \cdot Q'X' = RY \cdot Q'Y'.$$

Das Produkt der Entfernungen entsprechender Punkte je von dem Fluchtpunkte ist konstant.

Es heißt die Potenz (wohl besser das Rechteck) der projektiven Beziehung.

Es seien in der bilinearen Relation der Projektivität:

$$\lambda \xi \xi' + \mu \xi + \mu' \xi' + \nu = 0$$

die Veränderlichen ξ und ξ' Abszissen, so folgt aus:

$$\lambda \xi + \mu \frac{\xi}{\xi'} + \mu' + \frac{\nu}{\xi'} = 0,$$

daß zu $\xi' = \infty$ der Wert $\xi = -\frac{\mu'}{\lambda}$ gehört; dies ist also die Abszisse des Fluchtpunktes R und $\xi' = -\frac{\mu}{\lambda}$ ist die von Q'; schreiben wir die Relation in der Form:

$$\left(\xi + \frac{\mu'}{\lambda}\right)\left(\xi' + \frac{\mu}{\lambda}\right) = \frac{\mu\mu' - \lambda\nu}{\lambda^2},$$

so haben wir unsern Potenzsatz; denn $\xi + \frac{\mu'}{\lambda} = OX - OR = RX$ und $\xi' + \frac{\mu}{\lambda} = Q'X'$; also ist $\frac{\mu\mu' - \lambda\nu}{\lambda^2}$ die Potenz.

Das Vorzeichen der Potenz p ist, wenn die Punktreihen auf verschiedenen Trägern liegen, willkürlich; wenn der positive Sinn der einen Reihe umgekehrt wird, so ändert sich das Vorzeichen von p. Wir wollen daher die Sinne so bestimmt denken, daß p positiv ist. Liegen die Reihen freilich auf derselben Gerade, so ist das Vorzeichen der Potenz bestimmt, weil bei der Umkehrung des Sinnes beide Faktoren der Potenz ihr Vorzeichen ändern. Die im folgenden erhaltenen Ergebnisse bleiben jedoch, wie man sich leicht überzeugen wird, erhalten, wenn die Punktreihen auf dieselbe Gerade gebracht werden.

Wenn G und H die Punkte der ersten Punktreihe, welche vom Fluchtpunkt R die Entfernung $\pm\sqrt{p}$ haben, und G', H' die entsprechenden Punkte sind, so folgt aus:

$$RG \cdot Q'G' = RH \cdot Q'H' = p,$$

daß G' und H' von Q' auch die Entfernungen $\pm\sqrt{p}$ haben. Man pflegt diese vier Punkte die Potenzpunkte der projektiven Reihen zu nennen; bei ihnen wird die Potenz ein Quadrat. Daher der Name Potenz (vgl. Nr. 8).

Es seien X und X' zwei beliebige entsprechende Punkte, so 57
konstruiere man in der zweiten Reihe Y_1', Y_2' so, daß:

$$Q'Y_1' = RX, \quad Q'Y_2' = -RX;$$

Y_1 und Y_2 seien ihnen in der ersten Reihe entsprechend; aus

$$RX \cdot Q'X' = RY_1 \cdot Q'Y_1' = RY_2 \cdot Q'Y_2'$$

folgt:

$$RY_1 = Q'X', \quad RY_2 = -Q'X'.$$

Es ist also R die Mitte von $Y_1 Y_2$ und Q' die von $Y_1' Y_2'$. Ferner ist:

$$RY_1 - RX = Q'X' - Q'Y_1', \quad RY_2 - RX = -Q'X' + Q'Y_2'$$

oder:

$$XY_1 = -X'Y_1', \quad XY_2 = X'Y_2'.$$

Umgekehrt, aus

$$RX \cdot Q'X' = RY \cdot Q'Y'$$

folgt:

$$RY = \lambda RX, \quad Q'X' = \lambda Q'Y', \quad \lambda \gtrless 1;$$

ist also

$$XY = \mp X'Y'$$

oder

$$RY - RX = \pm(Q'X' - Q'Y'),$$

so hat man

$$(\lambda - 1) RX = \pm (\lambda - 1) Q'Y', \quad Q'Y' = \pm RX,$$

oder getrennt:

$$Q'Y_1' = RX, \quad Q'Y_2' = - RX.$$

Liegt X in $Y_1 Y_2$ oder in $Y_1 \cdot Y_2$, so haben XY_1 und XY_2 ungleiche oder gleiche Vorzeichen, also $X'Y_1'$ und $X'Y_2'$ gleiche oder ungleiche und X' liegt in $Y_1' \cdot Y_2'$ oder in $Y_1'Y_2'$.

Jedes Paar entsprechender Punkte X, X' liefert zwei Paare gleicher Strecken zwischen entsprechenden Punkten, wie wir zunächst noch vorsichtig sagen, und wir erhalten zwei Systeme solcher gleicher Strecken, die wir als Γ_1 und Γ_2 unterscheiden wollen, je nachdem es sich um Strecken XY_1 und $X'Y_1'$ oder XY_2 und $X'Y_2'$ handelt.

Wegen der positiven Potenz haben je RX und $Q'X'$, RY_1 und $Q'Y_1'$, RY_2 und $Q'Y_2'$ dasselbe Vorzeichen, mithin haben RX, $Q'X'$, RY_1, $Q'Y_1'$ alle vier das nämliche Vorzeichen, folglich schließt XY_1 den Fluchtpunkt R aus und $X'Y_1'$ den Fluchtpunkt Q'.

Die gleichen Strecken des Systems Γ_1 schließen bzw. die Fluchtpunkte aus. Folglich liegen R und R'_∞, Q_∞ und Q' zugleich in $X \cdot Y_1$ und $X' \cdot Y_1'$; diese Strecken sind entsprechend, und daher gilt dies auch für XY_1 und $X'Y_1'$; diese endlichen Strecken sind also im engeren Sinne entsprechend, d. h. sie enthalten entsprechende Punkte.

Die Strecken des Systems Γ_1 kann man daher auch im engeren Sinne entsprechende gleiche Strecken nennen.

Beim System Γ_2 hingegen haben RX, $Q'X'$ das eine, RY_2, $Q'Y_2'$ das andere Vorzeichen, folglich wird R von XY_2, Q' von $X'Y_2'$ eingeschlossen. Die Strecken des Systems Γ_2 schließen die Fluchtpunkte ein. Es liegen diesmal R in XY_2, R'_∞ in $X' \cdot Y_2'$, Q_∞ in $X \cdot Y_2$, Q' in $X'Y_2'$. Folglich sind die endlichen gleichen Strecken XY_2 und $X'Y_2'$ nicht im engeren Sinne entsprechend, sondern jeder entspricht die unendliche Ergänzungsstrecke der andern. Für das System Γ_2 ist der Name: System der entsprechenden gleichen Strecken nicht richtig; wir wollen daher die beiden Systeme Γ_1 und Γ_2 als das der entsprechenden gleichen Strecken und das der gleichen, aber nicht entsprechenden Strecken zwischen entsprechenden Punkten unterscheiden.

Beachten wir, daß in beiden Fällen solche Endpunkte dieser Strecken, die von R bzw. Q' gleiche Entfernung haben, also die beiden entfernteren oder die beiden näheren nicht entsprechend sind.

Wir haben weiter im ersten Systeme:

$$RX \cdot RY_1 = RX \cdot Q'X' = p, \quad Q'X' \cdot Q'Y_1' = RY_1 \cdot Q'Y_1' = p;$$

beim zweiten:

$$RX \cdot RY_2 = -RX \cdot Q'X' = -p, \quad Q'X' \cdot Q'Y_2' = -RY_2 \cdot Q'Y_2' = -p.$$

In jeder der beiden Punktreihen bilden die Endpunkte der Strecken, welche ihren entsprechenden gleich sind, eine hyperbolische Involution mit dem Zentralpunkte R, bzw. Q' und der Potenz p.

Dagegen bilden die Punktepaare, welche je dieselbe Entfernung haben wie die entsprechenden, ohne daß jedoch die endlichen Strecken entsprechend sind, eine elliptische Involution mit dem Zentralpunkte R, bzw. Q' und der Potenz $-p$.

Doppelpunkte jener hyperbolischen Involutionen sind G, H, bzw. G', H' und die Länge der entsprechenden gleichen Strecken geht bis 0 herab; in den andern Involutionen bilden G und H, G' und H' ein Paar und $GH = G'H'$ ist die kleinste Entfernung; denn die Summe zweier Faktoren eines konstanten Produkts ist am kleinsten, wenn sie gleich sind (vgl. auch Nr. 8).

Soll die Entfernung der Punkte in der ersten Reihe k-mal so groß als die der entsprechenden Punkte der zweiten Reihe sein, so erhält man in jener Involutionen mit dem Zentralpunkt R und der Potenz $\pm kp$, in dieser Involutionen mit dem Zentralpunkt Q' und der Potenz $\pm \frac{p}{k}$.

Nehmen wir an, daß in der bilinearen Relation für projektive 58
Büschel (von Strahlen oder Ebenen):

$$\lambda\xi\xi' + \mu\xi + \mu'\xi' + \nu = 0$$

die Veränderlichen Kotangenten sind, so wollen wir zusehen, ob es sie befriedigende Werte ξ, ξ' gibt, so beschaffen, daß auch $-\frac{1}{\xi}$, $-\frac{1}{\xi'}$, für ξ, ξ' eingesetzt, genügen; dann müssen ξ und ξ' auch die Relation:

$$\lambda - \mu\xi' - \mu'\xi + \nu\xi\xi' = 0$$

befriedigen. Wir haben dann zwei rechtwinklige Elemente des einen Büschels, denen wiederum rechtwinklige im andern entsprechen. Die Elimination von ξ' liefert die quadratische Gleichung:

$$(\lambda\mu' + \mu\nu)\xi^2 + (\mu'^2 + \nu^2 - \lambda^2 - \mu^2)\xi - (\lambda\mu' + \mu\nu) = 0.$$

Jede der beiden Wurzeln liefert ein solches Element im ersten Büschel, daß ihm und dem zu ihm rechtwinkligen Elemente zwei ebenfalls rechtwinklige entsprechen. Aber dies zu ihm rechtwinklige Element hat ja dann auch diese Eigenschaft, seine Kotangente ist die zweite Wurzel; das Produkt der beiden Wurzeln ist ja auch -1, d. h. sie gehören zu Elementen, die zueinander rechtwinklig sind.

Und die Wurzeln sind stets reell; denn die Diskriminante (Nr. 12) ist positiv:

$$(\mu'^2 + \nu^2 - \lambda^2 - \mu^2)^2 + 4(\lambda\mu' + \mu\nu)^2.$$

Zwei projektive Büschel (gleicher oder ungleicher Art) haben stets zwei reelle entsprechenden rechten Winkel.

Den Fall eines Ebenenbüschels kann man stets durch einen zur Axe normalen Schnitt auf den eines Strahlenbüschels zurückführen. Zwei projektive Strahlenbüschel kann man, ohne daß dabei an der Größe der entsprechenden Winkel etwas geändert wird, zunächst in dieselbe Ebene bringen und darauf durch Drehung des einen um den Scheitel, bis im Verbindungsstrahl sich entsprechende Strahlen vereinigen, perspektiv machen. Auf der Perspektivitätsaxe schneiden sich dann entsprechende Strahlen. Es gibt stets einen Kreis durch die Scheitel, der auf dieser Axe seinen Mittelpunkt hat und daher sie reell schneidet. Nach diesen Schnittpunkten gehen die Schenkel der entsprechenden rechten Winkel.

59 Es seien nun st, $s't'$ diese entsprechenden rechten Winkel (von Strahlen oder Ebenen) und x, x'; y, y' zwei beliebige Paare entsprechender Elemente. Es ist dann:

$$\sin sx = \sin(st + tx) = \sin st \cos tx, \quad \text{da} \quad \cos st = 0;$$

während $\sin st = \pm 1$; ebenso:

$$\sin t'x' = \sin t's' \cdot \cos s'x', \quad \sin sy = \sin st \cdot \cos ty,$$
$$\sin t'y' = \sin t's' \cdot \cos s'y';$$

also folgt aus:

$$(stxy) = (s't'x'y'),$$

daß:

$$\operatorname{cotg} tx : \operatorname{cotg} ty = \operatorname{tang} s'x' : \operatorname{tang} s'y',$$

oder:

$$\operatorname{cotg} tx \cdot \operatorname{cotg} s'x' = \operatorname{cotg} ty \cdot \operatorname{cotg} s'y'.$$

Das Produkt der Kotangenten der Winkel von zwei nicht entsprechenden Schenkeln der entsprechenden rechten Winkel nach zwei entsprechenden Elementen ist konstant. Denselben Wert hat $\operatorname{tang} sx \cdot \operatorname{tang} t'x'$; denn weil s und t rechtwinklig sind, so ist $\operatorname{cotg} sx \cdot \operatorname{cotg} tx = -1$ oder $\operatorname{tang} sx = -\operatorname{cotg} tx$, und ebenso ist $\operatorname{tang} t'x' = -\operatorname{cotg} s'x'$. Den reziproken Wert haben $\operatorname{cotg} sx \cdot \operatorname{cotg} t'x'$ und $\operatorname{tang} tx \cdot \operatorname{tang} s'x'$.

Wir haben also hier zwei Potenzen, welche zueinander reziprok sind und von denen jede als Kotangenten- und als Tangentenprodukt geschrieben werden kann:

$$\operatorname{cotg} tx \cdot \operatorname{cotg} s'x' = \operatorname{tang} sx \cdot \operatorname{tang} t'x',$$
$$\operatorname{cotg} sx \cdot \operatorname{cotg} t'x' = \operatorname{tang} tx \cdot \operatorname{tang} s'x'.$$

Das erinnert an ähnliche Ergebnisse bei der Involution und wird auch damit in Zusammenhang gebracht werden. Statt $\operatorname{cotg} tx \cdot \operatorname{cotg} s'x'$ kann man auch schreiben: $-\frac{\operatorname{cotg} tx}{\operatorname{cotg} t'x'}$, so daß auch dies Kotangentenverhältnis konstant ist.

Schneiden wir die Büschel U, U' mit Transversalen u, u', die senkrecht bzw. zu t und s', also zu s und t' parallel sind, so werden in den entstehenden projektiven Punktreihen die Schnitte mit t, s' die Fluchtpunkte R, Q' sein. Nach Nr. 25 ist dann:

$$RX : RY = \operatorname{tang} tx : \operatorname{tang} ty, \quad Q'X' : Q'Y' = \operatorname{tang} s'x' : \operatorname{tang} s'y'.$$

Wir sehen, wie aus: $RX \cdot Q'X' = RY \cdot Q'Y'$ folgt:

$$\operatorname{tang} tx \cdot \operatorname{tang} s'x' = \operatorname{tang} ty \cdot \operatorname{tang} s'y'.$$

Ziehen wir aber die Transversalen u, u' senkrecht zu t und s' 60
in gleicher Entfernung von den Scheiteln. Weil die Gleichheit von XY und $X'Y'$ aus denen von RX und $Q'Y'$, RY und $Q'X'$ sich ergibt, so folgt, daß über den gleichen Strecken XY_1 und $X'Y_1'$, bzw. XY_2 und $X'Y_2'$ auch gleiche Winkel xy_1 und $x'y_1'$, xy_2 und $x'y_2'$ stehen. Und zwar stehen über XY_1, $X'Y_1'$, welche die Fluchtpunkte R, Q' ausschließen, gleiche spitze Winkel, welche die Schenkel t, s; s', t' der entsprechenden rechten Winkel ausschließen, so daß hyperbolische Lage der x, y_1 zu s, t und der x', y_1' zu s', t' vorliegt; während die stumpfen Winkel jene Schenkel einschließen. Hingegen stehen über den gleichen Strecken XY_2, $X'Y_2'$, welche jene Fluchtpunkte einschließen, gleiche Winkel, welche t und s' einschließen, während die Nebenwinkel s, t' einschließen, so daß elliptische Lage der x, y_2; x', y_2' zu den rechten Winkeln st, bzw. $s't'$ vorliegt.

Im zweiten Falle sind entsprechende Winkel xy_2, $x'y_2'$ im engeren Sinne nicht die gleichen, in denen t und s' oder s und t' liegen, sondern die supplementären, welche t und t' oder s und s' enthalten. Wir haben hier eine sehr bequeme Unterscheidung der beiden Systeme: Γ_1 ist das System der entsprechenden **gleichen** Winkel, Γ_2 das der entsprechenden **supplementären** Winkel.

Die Festlegung der positiven Sinne auf den Transversalen, welche positive Potenz erzielen soll, kann in den Büscheln positive Sinne bewirken, welche, wenn diese in derselben Ebene liegen, nicht denselben Drehsinn in dieser Ebene darstellen; so daß dann z. B. die Gleichheit $ty_1 = s'x'$ nicht ausdrückt, daß diese Winkel denselben Sinn haben, sondern nur, daß sie beide positiven oder beide negativen Sinn haben.

Die Winkel $y_1 y_2$ werden durch t und s, die Winkel $y_1' y_2'$ durch s', t' halbiert.

Je nachdem x innerhalb oder außerhalb des von t (oder s)

halbierten Winkels $y_1 y_2$ liegt, liegt x' außerhalb oder innerhalb des von s' (oder t') halbierten Winkels $y_1' y_2'$.

Die Figuren sind so kongruent, daß U, R, X, Y_1, t, s, u, x, y_1 und U', Q', Y_1', X', s', t', u', y_1', x' homolog sind, aber nicht Y_2, y_2 und Y_2', y_2'.

Wir haben:

$$s'y_1' = tx, \quad sy_2' = -tx,$$
$$ty_1 = s'x', \quad ty_2 = -s'x'.$$

Endlich bilden die Schenkel x, y_1, sowie die Schenkel x', y_1' je eine hyperbolische Involution, welche s, t, bzw. s', t' zum rechtwinkligen Strahlenpaare oder zu Zentralstrahlen hat, und x, y_2, sowie x', y_2' je eine elliptische Involution mit demselben rechtwinkligen Paare. Die Potenz für einen Schenkel des rechtwinkligen Paares als Zentralstrahl ist absolut dieselbe wie die gleichartig gebildete der gegebenen projektiven Beziehung für diesen Strahl und den nicht entsprechenden im andern rechtwinkligen Paare; denn weil z. B. $ty_1 = s'x' = -ty_2$, so ist:

$$\operatorname{cotg} tx \cdot \operatorname{cotg} ty_1 = \operatorname{cotg} tx \cdot \operatorname{cotg} s'x' = -\operatorname{cotg} tx \cdot \operatorname{cotg} ty_2.$$

Die entsprechenden rechten Winkel gehören zu beiden Systemen Γ_1, Γ_2.

Für die Potenzstrahlen g, g'; h, h', bei welchen die Potenz ein Quadrat wird und $sg = t'g'$, $sh = t'h'$ ist, gilt ähnliches, wie für die Potenzpunkte.[1])

Daß die entsprechenden rechten Winkel zu beiden Systemen gehören, kann man auch folgendermaßen aussprechen:

Während zwei beliebige entsprechende Strahlen x, x' zu zwei Paaren entsprechender gleicher Winkel: xy_1 und $x'y_1'$, xy_2 und $x'y_2'$ (im weiteren Sinne) gehören, gehören s, s'; t, t' nur zu einem Paare: st, $s't'$. In der Tat, fällt x z. B. nach s und x' nach s', so daß $sx = 0$, so müssen $t'y_1'$ und $t'y_2'$ ebenfalls $= 0$ sein, also y_1' und y_2' beide in t', y_1 und y_2 in t fallen.

Das eben Erörterte gilt, wie gesagt, nicht bloß für zwei Strahlenbüschel, sondern auch für zwei Ebenenbüschel oder einen Strahlen- und einen Ebenenbüschel, welche projektiv sind.

61 Die beiden zu zwei projektiven Punktreihen gehörigen Systeme Γ_1, Γ_2 ergeben sich sehr anschaulich, wenn man jene in solche perspektive Lage bringt, daß im Schnittpunkte sich zwei entsprechende

---

1) Die beiden Systeme Γ_1, Γ_2 finden sich zuerst bei Chasles, Géométrie supérieure, Nr. 133, 153, die zugehörigen Involutionen bei Smith, Proc. of the London Mathem. Soc., Bd. 2, S. 196; Mathematical Papers, Bd. 1, S. 545.

Potenzpunkte, etwa G und G', vereinigen und die Träger u, u' rechtwinklig sind. Das Perspektivitätszentrum O bildet mit R, G, Q' die vier Ecken eines Quadrats. Die Paare derjenigen hyperbolisch-gleichseitigen Involution um O, für welche OG der eine Doppelstrahl ist, schneiden in u und u' die Strecken von Γ_1 ein, und die Paare der rechtwinkligen Involution die von Γ_2.

Macht man projektive Büschel U, U' so perspektiv, daß im gemeinsamen Strahle sich entsprechende Potenzstrahlen g, g' decken, und sorgt noch dafür, daß die gleichen Winkel sg und $t'g'$, tg und $s'g'$ denselben Sinn haben, so werden s und t', t und s' parallel, und es entsteht ein Rechteck $USU'T$, wo $S = ss'$, $T = tt'$. Die Diagonale ST wird Perspektivitätsaxe, und nach Punkten X, Y_1 derselben, die vom Mittelpunkt M gleichweit entfernt sind, gehen Strahlen xy_1, $x'y_1'$, welche gleiche Winkel bilden (aus dem Systeme Γ_1); die X, Y_1 bilden eine gleichseitig-hyperbolische Involution. Dagegen nach den Paaren XY_2 der Involution mit M als Zentralpunkt und dem Paare ST gehen die Schenkel xy_2, $x'y_2'$ der entsprechenden supplementären Winkel (aus Γ_2); denn wegen $MX \cdot MY_2 = MS \cdot MT = MU \cdot MU'$ liegen stets X, Y_2, U, U' auf einem Kreise.

Ist im ersten Falle z' zu x' normal, Z der Schnitt mit ST, so daß XZ den Punkt Y_1 einschließt, so wird der Winkel XUZ, welcher $y_1 = UY_1$ einschließt, spitz oder stumpf sein, je nachdem der Kreis über XZ als Durchmesser, der durch U' und sein Spiegelbild U_1' in bezug auf ST geht, den Punkt U aus- oder einschließt. Da es nun durch U', U_1' Kreise gibt, welche U ausschließen, so gibt es entsprechende gleiche Winkel xy_1, $x'y_1'$, so beschaffen, daß, wenn z' zu x' normal ist, diesem rechten Winkel $x'z'$ ein spitzer xz korrespondiert, welcher den y_1 enthält, wie jener den y_1'. Ausgenommen ist der Fall, wo U in U_1' fällt, $USU'T$ Quadrat ist; die Büschel haben dann jede zwei entsprechenden Winkel gleich.

Wenn X, Y_1 innerhalb des Rechtecks liegen, so sei wiederum z' rechtwinklig zu x' und z ihm entsprechend, ferner w rechtwinklig zu y_1; alle drei Strahlen fallen außerhalb des Rechtecks, und der stumpfe Winkel wz schließt x (und y_1) ein.

Mit den ausgezeichneten Elementen ist es leicht, ungleichartige projektive Gebilde dadurch in perspektive Lage zu bringen, daß man drei Elemente des einen mit den entsprechenden des andern inzident macht. 62

Handelt es sich um eine Punktreihe u und einen Strahlenbüschel U', so sei r' der Strahl, welcher dem unendlich fernen Punkt R_∞ von u entspricht, während zu A, B die a', b' homolog seien; man hat dann einfach die Strecke AB zwischen a', b' so zu legen, daß sie parallel zu r' wird.

Oder, aber umständlicher, wenn $a'b'$, $b'r'$ nebeneinander liegen und zusammen unter π bleiben, so konstruiere man über AB das Kreissegment, das den Peripheriewinkel $a'b'$ faßt (so daß sein Scheitel auf dem Bogen des Segments liegt), lege in B an die Verlängerung von AB und nach der Seite des Segments den Nebenwinkel von $b'r'$ an; der freie Schenkel hat stets den zweiten Schnitt auf dem Bogen des Segments. Die Strahlen von diesem Schnitte nach A, B und parallel zu u bilden eine zu a', b', r' kongruente Figur.

Sollen allgemeiner A, B, C auf a', b', c' gebracht werden, so seien auf den Strahlen durch A' auf a' die Punkte C' so konstruiert, daß, wenn B' der Schnitt mit b' ist: $A'B' : B'C' = AB : BC$ auch dem Vorzeichen nach besteht; sie liegen auf einer Parallele zu b'; ist dann C' deren Schnitt mit c', so gilt es nur noch den Strahl von A' nach diesem C', der b' in B' schneidet, so weit parallel zu verschieben, bis die Proportionalität in Gleichheit übergegangen ist.

Will man $a'b'c'$ über ABC stellen, so muß man, wenn B in AC liegt, nebeneinander liegende Winkel $a'b'$, $b'c'$ nehmen, deren Summe unter π bleibt, und die Kreissegmente über AB, BC, welche sie fassen, auf dieselbe Seite dieser Gerade legen, damit ihre Bogen einen Schnitt haben.

Nicht wesentlich verschieden ist die Konstruktion, wenn eine Punktreihe und ein Ebenenbüschel in Projektivität vorliegen.

Wichtiger ist die Lösung der Aufgabe: zwei ungleichartige Büschel, die projektiv sind, in perspektive Lage zu bringen. Die Inzidenz von a, b, c und α, β, γ herzustellen, ist zu umständlich. Die Elemente s, t; σ, τ der entsprechenden rechten Winkel vereinfachen die Lösung; das dritte Paar sei a, α. Wenn $\sphericalangle sa \gtrless \sigma\alpha$, so ist $\sphericalangle ta \lessgtr \tau\alpha$, wobei es sich um die spitzen Winkel handelt. Nehmen wir an, es gelten die oberen Zeichen. Der rechte Winkel st kann nur so in den rechten Flächenwinkel $\sigma\tau$ gelegt werden, daß einer der beiden Schenkel senkrecht zur Kante $\sigma\tau$ ausfällt; denn wenn das bei t nicht der Fall ist, so sei t' im Punkt st normal auf $\sigma\tau$ in τ gezogen; sie wird dann normal zu σ und zu s, also s normal zu t und t', demnach zu τ und zu $\sigma\tau$.

Und wenn s in dieser Weise in σ gelegt wird, so wird sie normal zu τ und t fällt von selbst in diese Ebene.

Weil nun $\sphericalangle \sigma\alpha < sa$, so schneidet die Ebene α den Rotationskegel um s mit der halben Öffnung sa. In einer dieser Schnittkanten befindlich, ist a in α gebracht und damit s, t, a in σ, τ, α; was erreicht werden sollte.

§ 10. Spezielle Projektivitäten.

Wenn bei zwei projektiven Punktreihen die unendlich fernen 63
Punkte sich gegenseitig entsprechen — sie mögen daher R_∞ und R'_∞ heißen —, so sind keine endlichen Fluchtpunkte vorhanden, und die im vorangehenden erhaltenen Ergebnisse, welche solche voraussetzen, bestehen nicht.

In perspektiver Lage erhält man derartige Punktreihen, wenn bei nicht parallelen Trägern das Perspektivitätszentrum unendlich fern ist oder bei beliebigem Zentrum, wenn die Träger parallel sind. In letzterem Falle geht der Parallelstrahl durch das Zentrum zu den Trägern nach dem gemeinsamen unendlich fernen Punkt der Punktreihen und macht ihn sich selbst entsprechend.

Im ersteren Falle trifft, wofern die Richtung nach dem unendlich fernen Zentrum nicht diejenige eines der Träger ist, also das Zentrum auf keinem von ihnen liegt, wie wir bis jetzt stillschweigend angenommen haben, jeder Strahl des Büschels beide Träger in endlichen Punkten, so daß immer nur endliche Punkte einander zugeordnet werden. Den unendlich fernen Strahl des Büschels, der die beiden unendlich fernen Punkte einschneidet, werden wir bald kennen lernen.

Es seien nun bei zwei projektiven Punktreihen, in denen R_∞ und R'_∞ einander entsprechen, X, Y, Z und X', Y', Z' weitere entsprechenden Punkte, so folgt aus:

$$(XYZR_\infty) = (X'Y'Z'R'_\infty),$$

daß:

$$\frac{XZ}{YZ} = \frac{X'Z'}{Y'Z'}, \quad \text{oder} \quad \frac{XZ}{X'Z'} = \frac{YZ}{Y'Z'}.$$

Entsprechende Strecken sind also proportional. Deshalb heißen solche Punktreihen projektiv-ähnlich oder kurz ähnlich[1]), und wenn der absolute Wert des konstanten Verhältnisses entsprechender Strecken 1 ist, gleiche Punktreihen. In solchen sind dann alle ∞^2 entsprechenden Strecken gleich, die Punktreihen können infolgedessen mit ihren entsprechenden Punkten zur Deckung gebracht werden und heißen deshalb auch kongruent.

In nicht gleichen ähnlichen Punktreihen gibt es keine gleichen entsprechenden Strecken, man müßte denn die Strecken XR_∞ und ihre entsprechenden $X'R'_\infty$ als gleich ansehen.

1) Durchgängige Proportionalität entsprechender Strecken ist nur möglich, wenn auch das Vorzeichen ihres konstanten Verhältnisses konstant ist; denn aus $X'Y' = +k \cdot XY$ und $X'Z' = -k \cdot XZ$ folgt nicht, daß auch $Y'Z'$ und YZ das Verhältnis k haben.

Umgekehrt, aus $\frac{XZ}{X'Z'} = \frac{YZ}{Y'Z'}$ und $(XYZR) = (X'Y'Z'R'_\infty)$ folgt, daß R unendlich fern ist.

Sind $XYZ\ldots$ und $X'Y'Z'\ldots$ windschiefe oder in derselben Ebene befindliche Punktreihen mit proportionalen entsprechenden Strecken, so verlege man die eine $XYZ\ldots$, unter Beibehaltung des Sinns, parallel so nach $X''Y''Z''\ldots$, daß X'' sich mit X' deckt, dann sind sowohl XX'', YY'', $ZZ''\ldots$ parallel, als auch $Y'Y''$, $Z'Z''\ldots$; und $X''Y''Z''\ldots$ ist zu beiden gegebenen Reihen perspektiv mit je unendlich fernem Zentrum; man hat so projektive Operationen, die von der einen Reihe zur andern führen.

Wenn in der bilinearen Relation $\lambda\xi\xi' + \mu\xi + \mu'\xi' + \nu = 0$ die Veränderlichen Abszissen sind, und unendlich große ξ und ξ' sich entsprechen, so folgt, durch Einsetzung dieser Werte aus:

$$\lambda + \frac{\mu}{\xi'} + \frac{\mu'}{\xi} + \frac{\nu}{\xi\xi'} = 0,$$

daß $\lambda = 0$ sein muß.

Die Relation vereinfacht sich also in: $\mu\xi + \mu'\xi' + \nu = 0$; ein zweites Paar entsprechender Punkte gibt $\mu\eta + \mu'\eta' + \nu = 0$; daher:

$$\frac{\eta - \xi}{\eta' - \xi'} = -\frac{\mu'}{\mu} \text{ oder } \frac{XY}{X'Y'} = -\frac{\mu'}{\mu};$$

d. h. die Proportionalität entsprechender Strecken.

Ähnliche Punktreihen sind vollständig und eindeutig bestimmt, wenn zwei Paare entsprechender Punkte A, A'; B, B' gegeben sind; denn damit ist das konstante Verhältnis k gegeben. Bei gleichen Punktreihen genügt ein Paar entsprechender Punkte, wofern noch die entsprechenden Sinne gegeben sind.

Zwei gegebene Punktreihen können auf ∞^2 Weisen ähnlich gemacht werden; denn die den festen Punkten A, B zugeordneten Punkte A', B' können jeder in ∞^1, beide daher in ∞^2 Weisen gewählt werden; oder in der bilinearen Abszissen-Relation der Ähnlichkeit sind nur noch $\frac{\mu}{\nu}$, $\frac{\mu'}{\nu}$ wesentliche Konstanten, denen je ∞^1 Werte gegeben werden können. Auf nur ∞^1 Weisen können zwei Punktreihen gleich gemacht werden; dem festen Punkte A der einen können alle Punkte der andern Reihe zugeordnet werden und jedesmal hat man dann noch einem bestimmten Durchlaufungssinn auf jener den entsprechenden auf dieser zuzuordnen.

64 Bei Büscheln von Strahlen oder Ebenen haben wir nur den Fall gleicher Büschel, in denen alle entsprechenden Winkel gleich sind und zwar durchweg $xy = x'y'$ oder durchweg $xy = -x'y'$. Haben sie verschiedene Ebenen oder Axen oder sind sie ungleichartig, so kann man durch Umkehrung des Sinns in dem einen Büschel den einen Fall auf den andern zurückführen.

Transversalen, die auf entsprechenden Strahlen gleicher Strahlenbüschel normal sind, schneiden in ähnlichen Punktreihen; damit sind die gleichen Strahlenbüschel durch projektive Operationen in projektive Gebilde übergeführt und als projektiv erkannt. Die Doppelverhältnis-Gleichheit entsprechender Würfe ist unmittelbar klar.

Gleiche Ebenenbüschel werden durch Ebenen, die bzw. zu den Axen normal sind, in gleichen Strahlenbüscheln geschnitten.

In der bilinearen Relation für gleiche Büschel von Strahlen oder Ebenen seien ξ und ξ' Kotangenten der Winkel von beliebigen, also nicht entsprechenden Anfangselementen o, bzw. o'_1 nach entsprechenden Elementen x, x', so folgt aus: $x'y' = \pm xy$, weil (Nr. 15):

$$x'y' = o_1'y' - o_1'x' - \varepsilon' \cdot 2\pi, \quad xy = oy - ox - \varepsilon \cdot 2\pi,$$

daß:

$$o_1'y' - o_1'x' = \pm (oy - ox) + (\varepsilon' \mp \varepsilon) \cdot 2\pi,$$

oder:

$$o_1'y' \mp oy = o_1'x' \mp ox + (\varepsilon' \mp \varepsilon) \cdot 2\pi.$$

Mithin hat $o_1'y' \mp oy$ dieselbe Kotangente wie $o_1'x' \mp ox$; setzen wir daher diese konstante Kotangente gleich μ, so haben wir:

$$\operatorname{cotg}(o_1'x' \mp ox) = \mu$$

oder:

$$\operatorname{cotg} o_1'x' \cdot \operatorname{cotg} ox \pm 1 = \mu(\operatorname{cotg} o_1'x' \mp \operatorname{cotg} ox)$$

oder einfacher, wenn $\operatorname{cotg} ox = \xi$, $\operatorname{cotg} o_1'x' = \xi'$ gesetzt wird:

$$\xi\xi' \pm \mu(\xi \mp \xi') \pm 1 = 0.$$

Man beachte, daß im Falle der unteren Vorzeichen die Formel immer symmetrisch ist in bezug auf ξ und ξ', im Falle der oberen nur, wenn $\mu = 0$.

Die einzige Konstante μ, welche geblieben ist, lehrt, daß zwei gegebene Büschel auf ∞^1 Weisen gleich gemacht werden können; einem festen Elemente des einen kann jedes des andern zugeordnet werden, wozu dann wieder noch die Festsetzung über die entsprechenden Sinne treten muß, ähnlich wie bei gleichen Punktreihen.

Wenn die Projektivität zwischen zwei Büscheln (von Strahlen oder Ebenen) durch: $abc \barwedge a'b'c'$ festgelegt ist und $\sphericalangle ac = a'c'$, $\sphericalangle bc = b'c'$ und zwar derartig, daß mit ac und bc auch $a'c'$ und $b'c'$ gleichen oder ungleichen Sinn haben, so daß auch $ab = a'b'$ ist, so liegt Gleichheit vor. Denn aus:

$$(abcx) = (a'b'c'x') \text{ und } \frac{\sin ac}{\sin bc} = \frac{\sin a'c'}{\sin b'c'}$$

folgt:

$$\frac{\sin ax}{\sin bx} = \frac{\sin a'x'}{\sin b'x'};$$

d. h. x, x' teilen die gleichen Winkel ab, $a'b'$ in gleiche Teile: $\sphericalangle\, ax = a'x'$, $bx = b'x'$.

Trifft die Voraussetzung über die Sinne nicht ein, so daß ab und $a'b'$ nicht gleich sind, so gehören ac und $a'c'$, bc und $b'c'$ bzw. zu den Systemen Γ_1, Γ_2. Ähnliches gilt für Punktreihen.

Sind aber die einen gleichen Winkel rechte, so trifft die Voraussetzung betreffend der Sinne immer ein, weil man den einen Rechten eventuell durch seinen Nebenwinkel ersetzen kann. Also kann man aus: $\sphericalangle\, ac = a'c' = \frac{\pi}{2}$, $\sphericalangle\, bc = b'c'$ immer auf Gleichheit schließen. Dies folgt bei der jetzigen Voraussetzung auch aus: $(cabx) = (c'a'b'x')$ oder $\frac{\operatorname{tang} cb}{\operatorname{tang} cx} = \frac{\operatorname{tang} c'b'}{\operatorname{tang} c'x'}$.

65 Bei projektiven Strahlenbüscheln derselben Ebene (oder in parallelen Ebenen) und projektiven Ebenenbüscheln um dieselbe Axe (oder um parallele Axen) kann man gleichsinnige und ungleichsinnige (gleichlaufende oder ungleichlaufende) unterscheiden.

Machen wir gleichsinnige gleiche Strahlenbüschel derselben Ebene durch Drehung des einen perspektiv, so daß im gemeinsamen Strahle sich entsprechende Strahlen vereinigen, so werden die übrigen entsprechenden Strahlen parallel. Halten wir an dem Satze fest, daß bei perspektiven Strahlenbüscheln derselben Ebene die Schnittpunkte entsprechender Strahlen auf einer Gerade, der Perspektivitätsaxe, liegen, (Nr. 37) so gelangen wir, da in einem Strahlenbüschel alle Richtungen der Ebene vertreten sind, zu dem fundamentalen Satze der perspektiven Raumanschauung:

Alle unendlich fernen Punkte (Richtungen) einer Ebene sind als in einer Gerade liegend anzusehen.

Diese Gerade heißt die unendlich ferne Gerade der Ebene.[1]) Sie gehört zu jedem Büschel der Ebene mit unendlich fernem Scheitel oder jedem Büschel von Parallelstrahlen und ist bei zwei Punktreihen, die durch einen solchen Büschel perspektiv-ähnlich werden, der Strahl, der die entsprechenden unendlich fernen Punkte einschneidet.

Parallele Ebenen enthalten dieselben Richtungen oder unendlich fernen Punkte, also dieselbe unendlich ferne Gerade und bilden einen Büschel (Nr. 30). Staudt hat parallele Ebenen als Ebenen derselben Stellung bezeichnet.

Die unendlich ferne Perspektivitätsaxe macht den Kreis, der sonst das einzige Paar entsprechender rechter Winkel liefert (Nr. 58), unmöglich; jedem rechten Winkel des einen Büschels entspricht einer im gleichen Büschel.

1) Poncelet, Traité des propriétés projectives 1822 (zweite Ausgabe 1863 Bd. I) Nr. 96, 107.

Für zwei ungleichsinnige gleiche Strahlenbüschel derselben Ebene, welche in perspektiver Lage sind, ist die Perspektivitätsaxe die Senkrechte auf der Verbindungsstrecke der Scheitel in der Mitte; in bezug auf sie sind entsprechende Strahlen symmetrisch oder Spiegelbilder. Alle Kreise durch die Scheitel haben ihre Mittelpunkte auf dieser Axe, und jeder liefert zwei entsprechende rechte Winkel in die Büschel.

Besitzen zwei projektive Strahlenbüschel zwei Paare entsprechender rechter Winkel, so mache man sie perspektiv und ungleichsinnig. Die Perspektivitätsaxe enthält dann die Mittelpunkte zweier Kreise, welche durch die Scheitel gehen, also ist sie die Mittelsenkrechte auf deren Verbindungslinie; die Büschel sind gleich.

In zwei gleichen und gleichsinnigen Ebenenbüscheln um parallele Axen, welche in perspektiver Lage sich befinden, sind die entsprechenden Ebenen parallel, daher sind ihre Schnittlinien und die Perspektivitätsebene, in der sie liegen, unendlich fern; wodurch wir schon auf die unendlich ferne Ebene des Raumes hingewiesen werden.

Eine wesentlich andere Spezialität ist die ausgeartete Pro- 66
jektivität. Wir können (Nr. 56) die bilineare Relation:

$$\lambda \xi \xi' + \mu \xi + \mu' \xi' + \nu = 0$$

in die Form:

$$\left(\xi + \frac{\mu'}{\lambda}\right)\left(\xi' + \frac{\mu}{\lambda}\right) = \frac{\mu\mu' - \lambda\nu}{\lambda^2}$$

bringen. Nehmen wir an, daß:

$$\mu\mu' - \lambda\nu = 0$$

sei, so haben wir:

$$\left(\xi + \frac{\mu'}{\lambda}\right)\left(\xi' + \frac{\mu}{\lambda}\right) = 0;$$

dieser Relation wird in folgender merkwürdigen Weise genügt: entweder durch beliebiges ξ und $\xi' = -\frac{\mu}{\lambda}$, oder durch beliebiges ξ' und $\xi = -\frac{\mu'}{\lambda}$.

Wir haben also in jedem der beiden Gebilde ein singuläres Element mit dem Parameter $-\frac{\mu'}{\lambda}$, bzw. $-\frac{\mu}{\lambda}$, welchem alle Elemente im andern Gebilde korrespondieren. Legt man z. B., um zwei Punktreihen u, u' derselben Ebene perspektiv zu machen, das Perspektivitätszentrum auf eine von ihnen, u, so haben wir eine solche Projektivität; singuläre Punkte sind auf u das Zentrum, auf u' der Schnittpunkt uu'. Ähnliches gilt für zwei perspektive Strahlenbüschel derselben Ebene, wenn die Perspektivitätsaxe durch einen

der Scheitel geht, für solche aus demselben Scheitel, wenn sie in eine der Ebenen fällt; und für perspektive Ebenenbüschel, wenn die Perspektivitätsebene durch eine der Axen geht.

Die Doppelverhältnis-Gleichheit wird folgendermaßen erfüllt: ein Wurf des einen Gebildes, aus vier beliebigen Elementen gebildet, hat einen bestimmten Wert des Doppelverhältnisses; die entsprechenden Elemente konzentrieren sich alle im singulären Elemente, das Doppelverhältnis von vier identischen Elementen ist unbestimmt und kann jenen Wert haben.

Zu einer solchen ausgearteten Projektivität gelangt man, wenn man zwei verschiedenen Elementen des einen Gebildes ein und dasselbe im andern entsprechen läßt. Den beiden Elementen ξ und ξ_1 — von welchen Parametern mindestens einer, ξ, nicht ∞ ist — entspreche dasselbe Element ξ'. Wir haben dann für die Konstanten sowohl:

$$\lambda\xi\xi' + \mu\xi + \mu'\xi' + \nu = 0,$$

als auch:

$$\lambda\xi_1\xi' + \mu\xi_1 + \mu'\xi' + \nu = 0;$$

daher durch Subtraktion:

$$(\xi - \xi_1)(\lambda\xi' + \mu) = 0,$$

oder, da $\xi \gtrless \xi_1$ ist:

$$\lambda\xi' + \mu = 0;$$

die Relation

$$(\lambda\xi' + \mu)\,\xi + \mu'\xi' + \nu = 0$$

bewirkt dann, da ξ nicht ∞ ist:

$$\mu'\xi' + \nu = 0;$$

die Elimination von ξ' gibt:

$$\mu\mu' - \lambda\nu = 0.$$

Da $\xi' = -\frac{\mu}{\lambda}$, so ist dies Element ξ', dem zwei verschiedene im andern Gebilde entsprechen, singulär.

Gehen wir, etwa bei Punktreihen, von $(ABCX) = (A'B'C'X')$ aus oder:

$$AC \cdot B'C' \cdot BX \cdot A'X' = BC \cdot A'C' \cdot AX \cdot B'X',$$

und nehmen an: $C' \equiv A'$, also $A'C' = 0$, so folgt:

$$BX \cdot A'X' = 0.$$

Dies bedeutet, bei beliebigem X muß $A'X' = 0$ sein, X' in A' fallen, und bei beliebigem X' muß X nach B fallen, so daß B und A' die singulären Punkte sind.

Wenn wir die Projektivität durch $ABC \barwedge A'B'C'$ bestimmen und A, B, C, A', B' festhalten, so haben wir ∞^1 Projektivitäten, darunter zwei ausgeartete, wenn C' bei seiner

Bewegung in A' oder B' fällt. Lassen wir es, wie eben, nach A' fallen, so wird dies Element $C' \equiv A'$ das singuläre im zweiten Gebilde, das singuläre im ersten ist B, dem die übrigen Elemente des zweiten korrespondieren, darunter B'.

Wenn also eine Projektivität durch $ABC \barwedge A'B'C'$ festgelegt wird, wobei $A' \equiv C'$, so artet sie aus, derartig, daß dies Element $A' \equiv C'$ singulär im zweiten und B singulär im ersten Gebilde wird.

Wir fanden für projektive Punktreihen, wenn $\mathfrak{x}, \mathfrak{x}'$ Abszissen sind, $\frac{\mu\mu' - \lambda\nu}{\lambda^2}$ als Potenz (Nr. 56). Diese ist im vorliegenden Falle 0, und so bildet er den Übergang vom Falle positiver zum Falle negativer Potenz. Es ist also

$$RX \cdot Q'X' = 0;$$

d. h. entweder $X \equiv R$ und X' beliebig, oder $X' \equiv Q'$ und X beliebig; die Fluchtpunkte sind die singulären Punkte, wie es ja auch unmittelbar ersichtlich ist.

Ebenso werden bei Büscheln t und s' oder s und t' singuläre Elemente.

Weil jedes der beiden singulären Elemente beliebig gewählt werden kann, so sind zwischen gegebenen Gebilden ∞^2 ausgeartete Projektivitäten möglich; die dreifache Willkür in der Wahl der wesentlichen Konstanten $\frac{\lambda}{\nu}, \frac{\mu}{\nu}, \frac{\mu'}{\nu}$ ist, wegen $\mu\mu' - \lambda\nu = 0$, auf eine zweifache reduziert.

§ 11. Ineinander liegende projektive Gebilde. Involutorische Gebilde.

Wir wenden uns jetzt zu dem wichtigen Falle, daß ein Gebilde auf sich selbst projektiv bezogen wird[1]), so daß wir uns es doppelt zu denken haben, und von jedem seiner Elemente immer genau festgestellt werden muß, ob es zum ersten oder zweiten Gebilde gerechnet wird; infolgedessen geben wir ihm einen Doppelnamen. Man könnte für beide ineinander liegenden Gebilde verschiedene parametrische Bestimmungen und auch verschiedenen positiven Sinn annehmen, wir tun das aber nicht, weil es die Betrachtung unnötig erschweren würde. Die übereinstimmende parametrische Bestimmung für beide Gebilde gewährt den Vorteil, aus gleichem Parameter auf identische Elemente schließen zu können, was wertvoll sein wird. Wir haben die beiden Fälle gleichlaufender und ungleichlaufender 67

1) Die Projektivität zweier ineinander liegender Punktreihen hat in der geometrischen Optik eine wertvolle Anwendung gefunden; vgl. z. B.: Böger, Die optische Verwandtschaft in projektiver Darstellung. Progr. des Realgymn. des Johanneums in Hamburg 1907.

Gebilde. Da wir nur einen positiven Sinn haben, so kehren bei Umkehr desselben beide Faktoren der Potenz ihr Vorzeichen um; das Vorzeichen der Potenz ist invariant; und zwar haben ungleichlaufende projektive Gebilde eine positive, gleichlaufende eine negative Potenz.

Betrachten wir, um dies zu erkennen, zuerst Punktreihen, der bequemen Ausdrucksweise halber auf einer horizontalen Gerade; wir wollen dabei die Namen der Punkte der ersten Reihe oberhalb der gemeinsamen Trägergerade, die der zweiten unterhalb schreiben. Die unendlich fernen Punkte decken sich, wir denken uns aber den Doppelnamen Q_∞, R'_∞ an beiden Seiten geschrieben. Ihnen entsprechen die Fluchtpunkte R, Q'[1]); liegt nun X links von R, so daß der Sinn RXQ_∞ nach links geht, so muß bei ungleichlaufenden Reihen $R'_\infty X'Q'$ nach rechts gehen, also X' links von Q' liegen, und wenn X rechts von R liegt, dann liegt X' ebenfalls rechts von Q'; mithin haben RX und $Q'X'$ dasselbe Vorzeichen, die Potenz ist positiv.

Bewegt sich X also von R nach links bis Q_∞, so läuft X' von R'_∞ nach rechts bis Q', und geht X von R nach rechts bis Q_∞, dann geht X' von R'_∞ nach links bis Q'. Wir sehen, daß X und X' sich in jedem der beiden Bestandteile von $R \cdot Q'$ begegnen müssen.

Sind aber die Punktreihen gleichlaufend, so bewegt sich, wenn X von R nach links bis Q_∞ geht, X' ebenfalls von R'_∞ nach links bis Q', und wenn X von R nach rechts bis Q_∞ geht, so geht X' nach rechts von R'_∞ bis Q'; also haben RX und $Q'X'$ ungleiche Vorzeichen, die Potenz ist negativ, und Begegnung entsprechender Punkte kann nur in RQ' stattfinden, aber sie ist nicht notwendig, da die Punkte in gleichem Sinne laufen.

Bei ungleichlaufenden Reihen gibt es immer reelle sich selbst entsprechende Punkte, Koinzidenzpunkte[2]), bei gleichlaufenden möglicherweise keine reellen.

Es seien wieder st, $s't'$ die entsprechenden rechten (vollen) Winkel in projektiven Büscheln, die ineinander liegen, und diesen 4 Elementen seien solche positiven Sinne gegeben, daß st und $s't'$ gleichen Sinn haben. Liegen x und x' zugleich bzw. in st und $s't'$ oder zugleich in $s \cdot t$, $s' \cdot t'$, so sind die entsprechenden Sinne sxt[3]), $s'x't'$ dieselben, die Büschel gleichlaufend. Aber die spitzen Winkel tx und $s'x'$ haben ungleiche Vorzeichen, also ihre Kotangenten auch und die Potenz ist negativ. Liegt dagegen x in st oder $s \cdot t$, x' in $s' \cdot t'$ oder $s't'$, so sind die entsprechenden Sinne sxt und $s'x't'$ ungleich, die

1) In der geometrischen Optik heißen sie Brennpunkte.

2) Oft auch Doppelpunkte genannt, was nur so lange unbedenklich ist, als es sich um eindeutige Verwandtschaften handelt.

3) sxt ist der Sinn, bei dem man von s über x nach t kommt.

Büschel ungleichlaufend, die spitzen Winkel tx und $s'x'$ von gleichem Vorzeichen, die Potenz positiv.

Werden die beiden ineinander liegenden projektiven Büschel von derselben Transversale geschnitten, so entstehen ebenfalls ineinander liegende projektive Punktreihen, die ebenso gleichlaufend oder ungleichlaufend sind wie jene und deren Koinzidenzpunkte durch die Koinzidenzelemente der Büschel eingeschnitten werden, also in gleicher Weise reell oder imaginär sind.

Aber zu den Koinzidenzelementen führt auch die bilineare Relation sofort; wir setzen in ihr $\xi' = \xi$ und haben die quadratische Gleichung: 68

$$\lambda\xi^2 + (\mu + \mu')\xi + \nu = 0,$$

welche die Parameter jener Elemente liefert: wir sehen jetzt, daß wir zwei haben. Bei ungleich laufenden projektiven Punktreihen enthält also jeder der beiden Teile von $R \cdot Q'$ einen und nur einen reellen Koinzidenzpunkt.

Zwei ineinander liegende projektive Gebilde haben zwei reelle oder imaginäre Koinzidenzelemente.

Haben sie mehr als zwei, so decken sich alle entsprechenden Elemente, denn aus

$$(ABCX) = (A'B'C'X')$$

folgt $X' \equiv X$, wenn $A' \equiv A$, $B' \equiv B$, $C' \equiv C$.

Gehen z. B. von einem Strahlenbüschel, der zu einer Punktreihe projektiv ist, drei Strahlen durch ihre entsprechenden Punkte, so tun es alle; die Gebilde sind perspektiv. Denn durch den Strahlenbüschel entsteht auf dem Träger der Punktreihe eine zu ihr projektive zweite Reihe.

Die Wurzeln der obigen quadratischen Gleichung sind:

$$\frac{-(\mu + \mu') \pm \sqrt{(\mu + \mu')^2 - 4\lambda\nu}}{2\lambda};$$

es ist nun $(\mu + \mu')^2 - 4\lambda\nu = (\mu - \mu')^2 + 4(\mu\mu' - \lambda\nu)$.

Wenn nun ξ und ξ' Abszissen von Punkten sind, so ist $\mu\mu' - \lambda\nu > 0$ oder < 0, je nachdem die Potenz positiv oder negativ. Man sieht, daß im ersten Falle die Wurzeln notwendig reell sind, im zweiten aber können sie reell, vereinigt, imaginär sein.

Diesen Satz über die Zahl 2 der Koinzidenzelemente ineinander liegender projektiver oder, wie wir sie kürzer nennen wollen, konjektiver Gebilde werden wir bald zu zahlreichen Folgerungen verwerten, später aber zu einem allgemeineren Satze, dem Chaslesschen Korrespondenzprinzip, erweitern.

69 Dem Elemente $X \equiv Y'$ entsprechen in beiderlei Sinn im allgemeinen zwei verschiedene Elemente X', Y. Wir fragen uns nun: Kommt es vor, daß diese beiden Elemente sich vereinigen, so daß dann zwei Elemente vorliegen, die sich in beiderlei Sinn oder doppelt entsprechen, jedem als Elemente des ersten Gebildes das andere im zweiten? Natürlich kann es sich nur um zwei getrennte Elemente handeln, denn für die Koinzidenzelemente ist es selbstverständlich. Da besteht nun der folgende fundamentale Satz:

Wenn bei zwei konjektiven Gebilden einmal zwei (getrennte) Elemente sich in beiderlei Sinne oder doppelt entsprechen, so geschieht dies durchweg.

Vorausgesetzt ist, daß dem Elemente $X \equiv Y'$ zwei sich ebenfalls deckende und von ihm verschiedene Elemente X', Y entsprechen; ist dann $Z \equiv W'$ ein drittes Element, so fallen, das ist die Behauptung, auch die beiden ihm entsprechenden Elemente Z' und W zusammen. In der Tat, wir haben zwei entsprechende Würfe, also ist:

$$(XYZW) = (X'Y'Z'W');$$

wegen der vorausgesetzten Identitäten ist:

$$(X'Y'Z'W') = (YXZ'Z),$$

bekanntlich ist:

$$(YXZ'Z) = (XYZZ');$$

daher:

$$(XYZW) = (XYZZ'),$$

d. h. $W \equiv Z'$[1]).

Daraus folgt nun, daß bei konjektiven Punktreihen, welche der jetzigen Voraussetzung genügen, auch die beiden dem unendlich fernen Punkte entsprechenden Fluchtpunkte Q' und R sich vereinigen; wählen wir als neutralen Namen für diesen Punkt O, so geht die Potenz $RX \cdot Q'X'$ über in $OX \cdot OX'$.

Wir sehen: Die Paare der durchweg in beiderlei Sinne sich entsprechenden Punkte bilden eine Involution, von der die konstante Größe $OX \cdot OX'$ die Potenz ist, also O der Zentralpunkt, der ja auch zum unendlich fernen Punkte gepaart ist. Infolgedessen nennt man solche konjektive Punktreihen involutorisch; und spricht man von involutorischen projektiven Gebilden, so ist der Zusatz „ineinander liegend“ nicht notwendig.

Man spricht aber auch von involutorischer Lage ungleichartiger projektiver Gebilde, etwa Punktreihe und Ebenenbüschel,

1) Diese Erörterungen setzen voraus, daß es sich um eine nicht ausartende Projektivität handelt; für zwei ineinander liegende Gebilde, die sich in ausgearteter Projektivität befinden, bilden die beiden singulären Elemente ein Paar sich doppelt entsprechender Elemente.

wenn das perspektive Gebilde des einen, das auf dem Träger des anderen entsteht und diesem konjektiv ist, zu ihm involutorische Lage hat.

Werden zwei projektive Punktreihen so auf dieselbe Gerade gelegt, daß die beiden Fluchtpunkte R, Q' auf denselben Punkt O fallen, so entspricht diesem Punkt der unendlich ferne in beiderlei Sinne; also sind die Punktreihen involutorisch geworden, und die Involution ist hyperbolisch oder elliptisch, je nachdem die Punktreihen nunmehr ungleichlaufend oder gleichlaufend sind. In den einen Punkt eines Paares fallen X, Y', in den anderen Y, X', also liegen die gleichen Strecken XY, $X'Y'$ verkehrt aufeinander.

Bei der hyperbolischen Involution haben sich gleiche Strecken aus Γ_1 aufeinander gelegt, welche die Fluchtpunkte ausschließen, weil gepaarte Punkte auf derselben Seite des Zentralpunktes liegen, bei der elliptischen hingegen Strecken aus Γ_2, welche die Fluchtpunkte einschließen.

Durch die Möglichkeit, zwei gegebene projektive Punktreihen sowohl hyperbolisch als elliptisch involutorisch zu machen, sind von neuem die Involutionen der Strecken von Γ_1 und derjenigen von Γ_2 bewiesen, sowie auch die Gleichheit ihrer Potenzen mit derjenigen der gegebenen Projektivität.

Das andere System Γ_2 bzw. Γ_1 ergibt sich vermittelst der Involution, die denselben Zentralpunkt, aber entgegengesetzt gleiche Potenz hat. Seien den Punkten X, X' eines Paares der gegebenen Involution in dieser zweiten Involution Z, Z' gepaart, welche ebenfalls ein Paar der ersten bilden, so sind XZ und $X'Z'$ gleich.

Die Doppelpunkte — dieser Name wird sich bei der Involution als berechtigt herausstellen — sind natürlich die Koinzidenzpunkte der konjektiven Punktreihen, und wir sehen nochmals, warum die elliptische Involution keine reellen hat: die Strecke RQ', innerhalb deren bei gleichlaufenden konjektiven Punktreihen allein Koinzidenzpunkte möglich sind, ist nicht mehr vorhanden.

Es liegen zwei konjektive Büschel vor, welche die 70
Eigenschaft haben, daß alle entsprechenden Elemente in beiderlei Sinne sich entsprechen; sie schneiden dann in eine beliebige Transversale konjektive Punktreihen von derselben Eigenschaft ein. Also bilden nach dem Vorangehenden die in beiderlei Sinne sich entsprechenden Punkte eine Involution, und da die Involution sich durch Projektion überträgt, so gilt dies auch für die sich in beiderlei Sinne entsprechenden Elemente der Büschel. Daher sind dieselben auch involutorisch. Wenn nun s, t die Zentralstrahlen der Involution sind und x, x' zwei gepaarte Elemente, die also in der Projektivität in beiderlei Sinne sich entsprechen, so

ist, wie wir bei der Involution gelernt haben:

$$\operatorname{cotg} sx \cdot \operatorname{cotg} sx' = \frac{1}{\operatorname{cotg} tx \cdot \operatorname{cotg} tx'} = \text{konst.}$$

Wir wissen, s und t sind rechtwinklig und bilden selbst ein Paar der Involution, sind sich also in der Projektivität in beiderlei Sinne entsprechend; d. h. nennen wir s auch t', so ist t auch s'; und st, $s't'$ sind die entsprechenden rechten Winkel der Projektivität, die sich verkehrt aufeinandergelegt haben. Jene Potenzen $\operatorname{cotg} sx \cdot \operatorname{cotg} sx'$ und $\operatorname{cotg} tx \cdot \operatorname{cotg} tx'$ der Involution sind daher auch die Potenzen $\operatorname{cotg} sx \cdot \operatorname{cotg} t'x'$ und $\operatorname{cotg} tx \cdot \operatorname{cotg} s'x'$ der Projektivität.

Man macht also zwei projektive Büschel involutorisch, wenn man die entsprechenden rechten Winkel verkehrt aufeinander legt, t' auf s, s' auf t. Man hat dann ein Paar in beiderlei Sinne sich entsprechender Elemente; also sind es alle. Je nachdem nun die Büschel ungleich- oder gleichlaufend geworden sind, ist die entstandene Involution hyperbolisch oder elliptisch. In jenem Falle haben sich entsprechende gleiche spitze Winkel verkehrt aufeinander gelegt, welche die Schenkel der entsprechenden rechten Winkel ausschließen, während die Nebenwinkel sie einschließen, also aus Γ_1, in diesem Falle hingegen solche gleichen Winkel zwischen entsprechenden Strahlen, welche s und t' einschließen, während die Nebenwinkel t und s' einschließen, also aus Γ_2.

Eine parabolische Involution mit der Potenz 0 muß aus projektiven Gebilden mit dieser Potenz entstehen, also aus ausgeartet-projektiven: man hat diese so aufeinander zu legen, daß die singulären Elemente sich decken.

Wir verstehen nunmehr auch die Involutionsbeziehung (Nr. 11):

$$(X_1 Y_1 X_2 X_3) = (Y_1 X_1 Y_2 Y_3);$$

sie sagt aus, daß in konjektiven Gebilden den X_1, Y_1, X_2, X_3 die Y_1, X_1, Y_2, Y_3 entsprechen, also X_1, Y_1 in beiderlei Sinne; daher sind die Gebilde involutorisch und X_1Y_1, X_2Y_2, X_3Y_3 drei Paare der Involution.

Umgekehrt kann man aus jeder Involution projektive Gebilde bilden; sind AA', BB', CC', DD', ... gepaart, so ist:

$$AA'BB'CC'DD' \ldots \barwedge A'AB'BC'CD'D \ldots$$

Drei Paare entsprechender Elemente bestimmen die Projektivität, zwei Paare AA', BB' eine Involution; dies folgt aus jenem, indem als drittes Paar das eine Paar im umgekehrten Sinne entsprechend zu nehmen ist; die Involution ist als Projektivität durch:

$$ABA' \barwedge A'B'A$$

festgelegt; daß B und B' sich auch doppelt entsprechen, wissen wir aus dem Fundamentalsatze; es folgt aber auch aus:

$$(ABA'B') = (A'B'AB).$$

Halten wir von den bestimmenden Paaren einer Involution AA', BB' die einen Elemente A, B fest, während die andern das Gebilde durchlaufen, so ergibt sich, daß in demselben Gebilde ∞^2 Involutionen möglich sind.

Es seien M, N die Koinzidenzelemente ($M' \equiv M$, $N' \equiv N$) zweier 71
konjektiver Gebilde; sie mögen zunächst reell sein.

Es ist dann:

$$(MNXY) = (MNX'Y');$$

daraus folgt:

$$(MNXX') = (MNYY');$$

folglich hat dieses Doppelverhältnis $(MNXX')$ für alle Paare XX' entsprechender Elemente denselben Wert, ist eine Invariante

Sind die Gebilde involutorisch, so wissen wir von der Involution her, daß diese Invariante -1 ist, können es aber auch aus:

$$(MNXX') = (MNX'X)$$

folgern, indem ja jedes der beiden entsprechenden Elemente X, X zum ersten, das andere zum zweiten Gebilde gerechnet werden kann.

Aus

$$(MNXX') = (MNYY')$$

folgt:

$$(MNXX') = (NMY'Y);$$

dies bedeutet, daß MN, XY', $X'Y$ in Involution sind, wenn M, N die Koinzidenzelemente konjektiver Gebilde und X und X', Y und Y' in ihnen entsprechend sind.

Daraus ergibt sich, daß für alle Projektivitäten zwischen zwei ineinanderliegenden Gebilden, welche zwei Paare entsprechender Elemente AA', BB' gemeinsam haben, die Koinzidenzelemente die durch die Paare AB', BA' bestimmte Involution durchlaufen.

Ist also das eine Koinzidenzelement bekannt, so findet man das andere als sechstes Element in Involution, mithin linear.

Wie sieht die bilineare Relation aus, wenn es sich um involu- 72
torische Gebilde handelt? Nehmen wir an, die beiden (verschiedenen) Elemente ξ_0 und ξ_1 entsprechen sich doppelt; so muß der Relation sowohl durch $\xi = \xi_0$, $\xi' = \xi_1$, als auch durch $\xi = \xi_1$, $\xi' = \xi_0$ genügt werden, also:

$$\lambda \xi_0 \xi_1 + \mu \xi_0 + \mu' \xi_1 + \nu = 0,$$
$$\lambda \xi_1 \xi_0 + \mu \xi_1 + \mu' \xi_0 + \nu = 0;$$

daher durch Subtraktion:

$$(\mu - \mu')(\xi_0 - \xi_1) = 0,$$

demnach:

$$\mu' = \mu .$$

Die bilineare Relation für involutorische Gebilde lautet:

$$\lambda\xi\xi' + \mu(\xi + \xi') + \nu = 0$$

und ist symmetrisch nach ξ und ξ'; diese können vertauscht werden: jede zwei Elemente entsprechen sich doppelt. Unsere früheren Parameterrelationen für Involution waren symmetrisch; wir sehen, das ist notwendig und — wofern es sich um ineinanderliegende Gebilde handelt — charakteristisch.

73 Kehren wir wiederum zu allgemeinen konjektiven Gebilden zurück. Wir haben aus der bilinearen Relation die quadratische Gleichung für die Parameter der Koinzidenzelemente abgeleitet; ihre Wurzeln m, n sind:

$$\frac{-(\mu + \mu') \pm R}{2\lambda},$$

wo $R = \sqrt{(\mu + \mu')^2 - 4\lambda\nu}$, deren Imaginärsein die Koinzidenzelemente imaginär macht; ξ und ξ' seien entsprechende Parameter, die also der bilinearen Relation genügen, so bilden wir das Doppelverhältnis, unbekümmert um etwaige Imaginärietät von m, n:

$$(mn\xi\xi') = \frac{m-\xi}{n-\xi} \cdot \frac{n-\xi'}{m-\xi'} = \frac{-(\mu+\mu') + R - 2\lambda\xi}{-(\mu+\mu') - R - 2\lambda\xi} \cdot \frac{-(\mu+\mu') - R - 2\lambda\xi'}{-(\mu+\mu') + R - 2\lambda\xi'}$$

$$= \frac{2\nu + (\mu+\mu')(\xi+\xi') + R(\xi-\xi') + 2\lambda\xi\xi'}{2\nu + (\mu+\mu')(\xi+\xi') - R(\xi-\xi') + 2\lambda\xi\xi'};$$

darin ist $(\mu + \mu')^2 - R^2$ durch $4\lambda\nu$ ersetzt und durch 2λ gehoben.

Ersetzen wir weiter $2\nu + 2\lambda\xi\xi'$ durch $-2\mu\xi - 2\mu'\xi'$, so ergibt sich, weil $(\mu + \mu')(\xi + \xi') - 2\mu\xi - 2\mu'\xi' = -(\mu - \mu')(\xi - \xi')$ ist:

$$(mn\xi\xi') = \frac{\mu - \mu' - R}{\mu - \mu' + R}.$$

Damit ist die Konstanz von $(MNXX')$ nun auch für imaginäre Koinzidenzelemente festgestellt; es ist im allgemeinen imaginär, weil R imaginär. Sind aber die Gebilde involutorisch, also $\mu = \mu'$, so ist diese Invariante -1, auch wenn R imaginär ist.

Das Doppelverhältnis von zweimal zwei konjugiert imaginären Elementen mit den Parametern $a \pm bi$, $c \pm di$ ist:

$$\frac{(a+bi-c-di)(a-bi-c+di)}{(a-bi-c-di)(a+bi-c+di)} = \frac{(a-c)^2 + (b-d)^2}{(a-c)^2 + (b+d)^2},$$

also reell.

74 Besprechen wir einige interessante Fälle involutorischer Gebilde. Die Elemente λ_1, λ_2 sind zu λ_3, λ_4 harmonisch, wenn (Nr. 22):

$$2\lambda_3\lambda_4 - (\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_3 + \lambda_4) + 2\lambda_1\lambda_2 = 0.$$

Nehmen wir λ_1, λ_2 fest, λ_3, λ_4 veränderlich, so haben wir eine symmetrische bilineare Relation; also bewegen sich, wie wir schon wissen, λ_3, λ_4 involutorisch-projektiv. Halten wir aber zwei nicht zugeordnete Elemente λ_1, λ_3 fest und bewegen λ_2, λ_4, nach denen wir dann anordnen, so ist die Relation bilinear, aber nicht symmetrisch:

$$\lambda_2 \lambda_4 + (\lambda_3 - 2\lambda_1)\lambda_2 + (\lambda_1 - 2\lambda_3)\lambda_4 + \lambda_1 \lambda_3 = 0,$$

es bewegen sich also λ_2, λ_4 projektiv, aber nicht involutorisch.

Zwei ungleichlaufende gleiche Punktreihen, welche ineinander liegen, haben zwei reelle Koinzidenzpunkte; der eine N ist ersichtlich der unendlich ferne Punkt, M sei der andere endliche. Dann ist $MX = - M'X' = - MX'$; also haben alle Strecken XX' zwischen entsprechenden Punkten den Punkt M zum Mittelpunkt: es liegt eine gleichseitig-hyperbolische Involution vor. Ersichtlich ist ja auch, daß, wenn Y in X' fällt, dann Y' in X fallen muß, ferner, daß $(MNXX') = \frac{MX}{MX'} = -1$.

Ebenso haben zwei ungleichlaufende gleiche Büschel, welche ineinander liegen, zwei reelle Koinzidenzelemente. Ist m das eine, so fallen die beiden einander entsprechenden Elemente, welche zu beiden Seiten mit ihm einen rechten Winkel bilden, zusammen, also in das zweite Koinzidenzelement n; nun bilden aber, weil die Büschel gleich- und ungleichlaufend sind, jede zwei andere entsprechenden Elemente x, x' mit m (und demnach auch mit n) entgegengesetzt gleiche Winkel; also sind m, n die Halbierungselemente aller Winkel xx'; es liegt eine gleichseitig-hyperbolische Involution im Büschel vor.

Sind die Büschel aber gleich und gleichlaufend, so ist der Winkel zwischen entsprechenden Elementen konstant. Ist er vom Rechten verschieden, so ergibt sich nicht Involution; denn es sei $x \equiv y'$ ein Element des Büschels und x', y seien die beiden entsprechenden, so ist $xx' = yy' = - y'y$; daher bilden x' und y entgegengesetzt gleiche nicht rechte Winkel mit $x \equiv y'$, fallen also nicht zusammen.

Dies findet aber statt, wenn der konstante Winkel ein rechter ist; es entsteht eben die rechtwinklige Involution.

Im obigen Falle ungleichlaufender Büschel gilt die in Nr. 64 erhaltene Relation mit den untern Zeichen:

$$(1) \qquad \xi\xi' - \mu(\xi + \xi') - 1 = 0,$$

wobei die Winkel, deren Kotangenten ξ, ξ' sind, in unserm Falle — wegen des einheitlichen Parameters — von demselben Anfangsstrahle o ab gezählt werden. Die Beziehung ist für jeden Wert von μ symmetrisch in ξ und ξ'.

Im andern Falle gilt diejenige mit den oberen Zeichen:

$$\xi\xi' + \mu(\xi - \xi') + 1 = 0; \tag{2}$$

der Winkel $ox' - ox$, dessen Kotangente μ ist, ist der konstante Winkel xx'. Die Relation ist nur symmetrisch, wenn $\mu = 0$, also $xx' = \frac{\pi}{2}$ ist.

Die Relation für die rechtwinklige Involution ist daher:

$$\xi\xi' + 1 = 0;$$

wie ja auch aus Nr. 15 unmittelbar hervorgeht. Für die Doppelelemente gilt:

$$\xi^2 + 1 = 0.$$

Also bilden diese imaginären Doppelelemente mit dem Anfangselemente — einem beliebigen Elemente des Büschels — Winkel, deren Kotangenten $i = \sqrt{-1}$, $-i$ sind, die Tangenten also $-i$, i.

Dieselbe quadratische Gleichung ergibt sich aber aus (2) auch bei beliebigem μ, also für die Konzidenzelemente gleicher gleichlaufender ineinander liegender Büschel, welches auch der konstante Winkel xx' ist.

Also bei zwei ineinander liegenden gleichen und gleichlaufenden Büscheln, die man ja am einfachsten durch Drehung eines konstanten Winkels xx' erhält, sind die imaginären Konzidenzelemente immer dieselben, welches auch dieser Winkel sei, mithin identisch mit den imaginären Doppelelementen der rechtwinkligen Involution im Büschel. Sie bleiben bei der genannten Drehung fest.

Nennen wir diese Elemente i^+, i^-, so wissen wir: das Doppelverhältnis $(xx'i^+i^-)$ ist konstant, der Winkel $\varphi = xx'$ ist es aber auch; also ist eine Beziehung zwischen beiden zu vermuten, aus der diese gleichzeitige Konstanz folgt. Wir haben bei beliebigem Anfangsstrahle o, indem wir die bequemeren Tangenten als Parameter benutzen:

$$(xx'i^+i^-) = \frac{\operatorname{tang} oi^+ - \operatorname{tang} ox}{\operatorname{tang} oi^+ - \operatorname{tang} ox'} : \frac{\operatorname{tang} oi^- - \operatorname{tang} ox}{\operatorname{tang} oi^- - \operatorname{tang} ox'},$$

oder noch einfacher, wenn x als Anfangsstrahl genommen wird:

$$(xx'i^+i^-) = \frac{\operatorname{tang} xi^+}{\operatorname{tang} xi^+ - \operatorname{tang}\varphi} : \frac{\operatorname{tang} xi^-}{\operatorname{tang} xi^- - \operatorname{tang}\varphi} = \frac{-i}{-i - \operatorname{tang}\varphi} : \frac{i}{i - \operatorname{tang}\varphi}$$

$$= \frac{i - \operatorname{tang}\varphi}{i + \operatorname{tang}\varphi} = \frac{1 + i\operatorname{tang}\varphi}{1 - i\operatorname{tang}\varphi} = \frac{\cos\varphi + i\sin\varphi}{\cos\varphi - i\sin\varphi} = \frac{e^{i\varphi}}{e^{-i\varphi}} = e^{2i\varphi}.$$

Daher:

$$\varphi = \frac{1}{2i}\, l(xx'i^+i^-).$$

In dieser Beziehung steht also der Winkel zweier Elemente x, x' zu dem natürlichen Logarithmus des Doppel-

verhältnisses, das durch die beiden Elemente und die imaginären Doppelelemente der rechtwinkligen Involution in ihrem Büschel gebildet wird.[1]) Die Gleichheit zweier Winkel ist zurückgeführt auf die Gleichheit zweier Doppelverhältnisse.

Diese Definition des Winkels gestattet die Verallgemeinerung in diejenige der Metrik der nichteuklidischen Geometrie.

Wir haben eben einen speziellen Fall gehabt, in welchem die 75
Koinzidenzelemente konjektiver Gebilde mit den Doppelelementen einer Involution in demselben Gebilde identisch sind. Da die Involution eine einfachere Figur ist, als allgemein konjektive Gebilde, so liegt der Wunsch nahe, in jedem Falle konjektiver Gebilde eine solche Ersatz-Involution zu haben.

Ein Element Z des Trägers heiße als Element des ersten Gebildes X, als Element des zweiten Y'; ist nun Z_1 das vierte harmonische Element, dem Z zugeordnet in bezug auf die beiden entsprechenden Elemente X' und Y, so beschreiben die Paare ZZ_1 eine Involution, und ihre Doppelelemente sind mit den Koinzidenzelementen M, N der gegebenen Gebilde identisch.

In der Tat, wir fanden (Nr. 71), daß MN, XY', $X'Y$ in Involution sind. Daher ist Z, in dem sich X und Y' vereinigt haben, das eine Doppelement dieser Involution, und das zu ihm harmonische Element Z_1 in bezug auf das Paar $X'Y$ ist das andere Doppelelement; zu ihnen sind M, N, die ebenfalls ein Paar dieser Involution bilden, harmonisch; also erzeugen die Z, Z_1 die Involution mit den Doppelelementen M, N; sie ist bestimmt, wenn zwei Paare ZZ_1 hergestellt sind.

Oder, indem wir Punktreihen betrachten, was ja genügt, da es sich um projektive Eigenschaften handelt, so seien R, Q' die Fluchtpunkte der konjektiven Reihen, p ihre Potenz; wir setzen $RQ' = 2d$. Für einen Koinzidenzpunkt M (oder N) ist: $RM \cdot Q'M = p$ und $RM - Q'M = 2d$; daraus folgt die quadratische Gleichung:

$$RM^2 - 2d \cdot RM = p,$$

und dieselbe für RN. Also ist RM die eine, RN die andere Wurzel:

$$RM = d + \sqrt{d^2 + p}, \quad RN = d - \sqrt{d^2 + p};$$

daher einfacher, wenn O die Mitte von RQ' ist, so daß $RO = d$, $Q'O = -d$:

$$OM = +\sqrt{d^2 + p}, \quad ON = -\sqrt{d^2 + p}.$$

---

1) Zum ersten Male von Laguerre ausgesprochen: Nouvelles Annales de Mathématiques 1853 S. 57.

Bilden wir nun die Potenz mit den entsprechenden Punkten X und X' oder Z und X', so ist $RZ \cdot Q'X' = (OZ + d)(OX' - d) = p$, also:

$$OX' = \frac{p}{OZ + d} + d, \quad ZX' = OX' - OZ = \frac{p + d^2 - OZ^2}{OZ + d}.$$

Ebenso ist $RY \cdot Q'Z = p$, $(OY + d)(OY - d) = p$, $ZY = \frac{p + d^2 - OZ^2}{OZ - d}$.
Da aber Z und Z_1 zu X' und Y harmonisch sind, so ist (Nr. 7):

$$\frac{2}{ZZ_1} = \frac{1}{ZX'} + \frac{1}{ZY};$$

also:

$$ZZ_1 = \frac{p + d^2 - OZ^2}{OZ}, \quad OZ_1 = OZ + ZZ_1 = \frac{p + d^2}{OZ};$$

mithin

$$OZ \cdot OZ_1 = p + d^2;$$

folglich beschreiben Z und Z_1 eine Involution mit dem Zentralpunkte O und der Potenz $p + d^2$; ihre Doppelpunkte haben also von O die Entfernungen $\pm\sqrt{p + d^2}$, folglich dieselben wie die Koinzidenzpunkte M, N der gegebenen konjektiven Punktreihen.[1])

Für den Fall, daß die Koinzidenzelemente imaginär sind, haben wir in dieser Involution, welche vollständig reell konstruiert werden kann, den „reellen Repräsentanten“ (Nr. 29).

Überzeugen wir uns für ungleichlaufende konjektive Punktreihen, daß die Involution notwendig hyperbolisch ist. Dem unendlich fernen Punkte sind die beiden Fluchtpunkte Q', R, entsprechend; die Mitte M von RQ' ist ihm in der Involution gepaart, also ihr Zentralpunkt, wie das ja auch im vorangehenden gefunden wurde. Wir nehmen die Figur von Nr. 67, wo gefunden wurde, daß, wenn X von R nach links bis Q_∞ geht, dann X' von R'_∞ nach rechts bis Q' geht. Mit R sei S' identisch; weil S' links von Q' liegt (den wir rechts von R liegend annehmen wollen), so muß S links von R liegen; dem R entspricht R'_∞, der vierte harmonische Punkt, dem $R \equiv S'$ in bezug auf R'_∞ und S zugeordnet, liegt doppelt so weit von R als S, also links von M, ebenso wie R und die Potenz ist positiv. Wenn die Punktreihen gleichlaufend sind, so liegt S rechts von R; es kann aber der doppelt so weite Punkt zu beiden Seiten von M oder in M selbst liegen, so daß alle drei Involutionen möglich werden.

Fallen für zwei verschiedene Elemente Z die zugehörigen vierten harmonischen Z_1 zusammen, so wird die Involution parabolisch; durchweg fällt dann Z_1 in dieses Element, in welchem die Koinzidenzelemente der konjektiven Gebilde sich vereinigt haben.

1) Beweis von Schröter: Steiner-Schröter's Vorlesungen 3. Aufl. Nr. 46.

Zwei rechtwinklige Strahleninvolutionen in derselben Ebene 76
(oder in parallelen Ebenen) sind parallel, d. h. zu jedem Strahlenpaare der einen gibt es ein paralleles in der andern: diese beiden Paare schneiden daher in die unendlich ferne Gerade der Ebene (oder die gemeinsame Gerade der beiden Ebenen) dasselbe Punktepaar ein. Daraus ergibt sich:

Alle rechtwinkligen Involutionen einer Ebene (und jeder zu ihr parallelen Ebene) schneiden in die unendlich ferne Gerade dieselbe feste Involution, in welcher zwei Punkte gepaart sind, die in zueinander rechtwinkligen Richtungen unendlich fern sind. Wir wollen sie die absolute Involution der Ebene (und jeder parallelen Ebene) nennen, und ihre imaginären Doppelpunkte die absoluten Punkte der Ebene, Punkte, die von der größten Wichtigkeit in der modernen Geometrie geworden sind. In der absoluten Involution haben wir ihren reellen Repräsentanten.

Strahlen der Ebene, welche nach einem dieser absoluten Punkte gehen, mögen isotrope Strahlen heißen (nach der Terminologie der Franzosen); die Doppelstrahlen i^+, i^- jeder rechtwinkligen Involution oder allgemeiner die Koinzidenzstrahlen zweier gleichen und gleichlaufenden konzentrischen Strahlenbüschel der Ebene sind isotrope Strahlen. Und umgekehrt, die beiden isotropen Strahlen eines Strahlenbüschels sind immer die Doppelstrahlen der rechtwinkligen Involution in ihm. Für sie gilt:

$$\operatorname{cotg} oi^+ = i, \quad \operatorname{cotg} oi^- = -i,$$

wo o ein beliebiger Strahl des Büschels ist.

Zwei isotrope Strahlen, welche nach demselben absoluten Punkte gehen, sind sowohl parallel, weil sie eben denselben unendlich fernen Punkt haben, als normal, weil sie nach einem sich selbst gepaarten Punkte der absoluten Involution gehen. Ihr Winkel ist ganz unbestimmt. Denn welches auch der konstante Winkel $\varphi = xx'$ zweier gleicher und gleichlaufender konzentrischer Strahlenbüschel ist, in jedem der beiden isotropen Strahlen vereinigen sich entsprechende Strahlen, und die parallelen Strahlen, in welche zwei so vereinigte Strahlen durch Parallelverschiebung des einen Büschels übergehen, bilden den Winkel φ.

Nachdem die absolute Involution der Ebene eingeführt ist, sind zwei zueinander rechtwinklige Strahlen der Ebene als solche zu definieren, welche nach gepaarten Punkten der Involution gehen; was zu einer Verallgemeinerung des Begriffs normal führen wird.

Für gleiche Strahlenbüschel, im allgemeinen in verschiedenen Ebenen gelegen, fanden wir die bilineare Relation (Nr. 64):

$$\xi\xi' \pm \mu(\xi \mp \xi') \pm 1 = 0,$$

in welcher $\xi = \operatorname{cotg} ox$, $\xi' = \operatorname{cotg} o_1'x'$ und o, o_1' beliebige Strahlen der Büschel sind. Sie wird, im Falle der oberen Zeichen, durch

$$\xi = i,\ \xi' = i;\ \xi = -i,\ \xi' = -i,$$

im Falle der unteren Zeichen durch:

$$\xi = i,\ \xi' = -i;\ \xi = -i,\ \xi' = i$$

befriedigt; d. h. die isotropen Strahlen des einen Büschels korrespondieren denen des andern.

Umgekehrt, zwei projektive Strahlenbüschel, in denen die isotropen Strahlen entsprechend sind, sind gleich.

Es ist bequemer, die Anfangsstrahlen o und o' entsprechend zu nehmen, sowie die Tangenten zu benutzen. Die bilineare Relation sei:

$$\lambda \operatorname{tang} ox \cdot \operatorname{tang} o'x' + \mu \operatorname{tang} ox + \mu' \operatorname{tang} o'x' = 0,$$

das absolute Glied ν muß fehlen, weil x und x' gleichzeitig nach o und o' fallen. Fallen x und x' in entsprechende isotrope Strahlen, so ist bei dem einen Paare: $\operatorname{tang} ox = i$, $\operatorname{tang} o'x' = \pm i$, bei dem andern: $\operatorname{tang} ox = -i$, $\operatorname{tang} o'x' = \mp i$. Jene Werte führen eingesetzt zu: $\mp \lambda + (\mu \pm \mu')\, i = 0$, diese zu: $\mp \lambda - (\mu \pm \mu')\, i = 0$; daraus folgt: $\lambda = 0$, $\mu \pm \mu' = 0$. Die bilineare Relation ist also:

$$\operatorname{tang} ox = \pm \operatorname{tang} o'x';\quad \text{oder: } ox = \pm\, o'x';$$

womit die Gleichheit bewiesen ist.

Das Entsprechen der isotropen Strahlen bedeutet ja auch, daß die rechtwinkligen Involutionen in den Büscheln, deren Doppelstrahlen sie sind, entsprechend sind, jedem Paare der einen ein Paar der andern, jedem rechten Winkel des einen Büschels ein rechter Winkel im andern, womit auch die Gleichheit ausgesprochen ist.

Liegen die gleichen Büschel in derselben Ebene, so entspricht den obern Zeichen Gleichsinnigkeit, den untern Ungleichsinnigkeit; $\operatorname{tang} ox = i$, $\operatorname{tang} o'x' = i$ bedeutet das Hingehen von x, x' nach demselben absoluten Punkte, während bei $\operatorname{tang} ox = i$, $\operatorname{tang} o'x' = -i$, x und x' nach verschiedenen absoluten Punkten gehen.

Also: Zwei projektive Strahlenbüschel derselben Ebene (oder in parallelen Ebenen) sind gleich und gleichsinnig oder ungleichsinnig, wenn die entsprechenden isotropen Strahlen nach demselben oder nach verschiedenen absoluten Punkten gehen.

Das bedeutet, im letzteren Falle, involutorisches Entsprechen der isotropen Strahlen, wenn die Büschel ineinander liegen.

Durch Umklappung der Ebene vertauscht man die absoluten Punkte, Gleichsinnigkeit und Ungleichsinnigkeit.

§ 12. Weitere Sätze über die Involution. Multiplikation von Verwandtschaften.

Eine Involution ist durch die symmetrische bilineare Relation 77
definiert:

$$\lambda \xi \xi' + \mu(\xi + \xi') + \nu = 0;$$

ihre Doppelelemente genügen der Gleichung:

$$\lambda \xi^2 + 2\mu \xi + \nu = 0$$

und sind reell oder imaginär, je nachdem $\mu^2 - \lambda\nu > 0$ oder < 0 ist. Wenn sie Paare mit konjugiert imaginären Elementen besitzt, so muß der Relation mit

$$\xi = x + yi, \quad \xi' = x - yi$$

genügt werden können, wo x, y reell sind. Dies gibt

$$\lambda(x^2 + y^2) + 2\mu x + \nu = 0$$

oder:

$$(\lambda x + \mu)^2 + \lambda^2 y^2 + (\lambda\nu - \mu^2) = 0.$$

Im Falle der elliptischen Involution, wo $\lambda\nu - \mu^2 > 0$ ist, kann dieser Gleichung nicht durch reelle Werte von x, y, bei denen alle drei Glieder links positiv sind, genügt werden.

Die elliptische Involution besitzt daher keine Paare aus zwei konjugiert imaginären Elementen; das ist auch aus dem Fehlen reeller Doppelelemente zu folgern, denn diese bilden ja den Übergang von den Paaren mit reellen Elementen zu denen mit konjugiert imaginären Elementen.

Die Wurzeln einer quadratischen Gleichung mit reellen Koeffizienten sind reell oder konjugiert imaginär; sind sie also die Parameter eines Paares einer elliptischen Involution, so sind sie reell.

Es seien nun zwei Involutionen auf dem nämlichen Träger gegeben; wir fragen, ob es ein gemeinsames Paar gibt. Die Relationen (in *derselben* parametrischen Bestimmung) seien:

$$\lambda \xi \xi' + \mu (\xi + \xi') + \nu = 0,$$
$$\lambda_1 \xi \xi' + \mu_1(\xi + \xi') + \nu_1 = 0;$$

die Parameter des gemeinsamen Paares haben beiden zu genügen; wir erhalten zunächst durch Auflösung nach $\xi\xi'$ und $\xi + \xi'$, in denen die Gleichungen linear sind:

$$\xi\xi' = \frac{\mu\nu_1 - \nu\mu_1}{\lambda\mu_1 - \mu\lambda_1}, \quad \xi + \xi' = -\frac{\lambda\nu_1 - \nu\lambda_1}{\lambda\mu_1 - \mu\lambda_1};$$

daher sind ξ und ξ' die Wurzeln der quadratischen Gleichung:

$$(\lambda\mu_1 - \mu\lambda_1)\xi^2 + (\lambda\nu_1 - \nu\lambda_1)\xi + (\mu\nu_1 - \nu\mu_1) = 0,$$

welche reelle Koeffizienten hat. Das gemeinsame Paar hat daher entweder zwei reelle Elemente oder zwei konjugiert imaginäre. Ist demnach mindestens eine der Involutionen elliptisch, so kann nur das erste der Fall sein.

Zwei auf demselben Träger befindliche Involutionen haben ein aus reellen Elementen bestehendes Paar gemein, wenn mindestens eine von ihnen elliptisch ist.

Für den Fall, daß die beiden Involutionen ungleichartig sind, erkennen wir es aus der Diskriminante der obigen quadratischen Gleichung sofort, dieselbe ist:

$$(\lambda\nu_1 - \nu\lambda_1)^2 - 4(\lambda\mu_1 - \mu\lambda_1)(\mu\nu_1 - \nu\mu_1),$$

kann auch in der Form:

$$(\lambda\nu_1 + \nu\lambda_1 - 2\mu\mu_1)^2 - 4(\mu^2 - \lambda\nu)(\mu_1^2 - \lambda_1\nu_1)$$

geschrieben werden; sie ist > 0, wenn die beiden Diskriminanten $\mu^2 - \lambda\nu$, $\mu_1^2 - \lambda_1\nu_1$ ungleiche Vorzeichen haben.

Wie bei zwei hyperbolischen Involutionen das gemeinsame Paar beschaffen ist, ist in Nr. 22 erörtert worden.

Daraus folgt, daß eine elliptische Involution ein reelles Paar enthält, das zu einem gegebenen Paar, insbesondere einem, das zur Involution gehört, harmonisch ist: es ist das gemeinsame Paar der gegebenen und derjenigen, welche die Elemente des gegebenen Paares zu Doppelelementen hat.

78 Wir haben (Nr. 29), mit Staudt, jedes der beiden imaginären Doppelelemente einer elliptischen Involution mit einem der beiden Sinne behaftet, um sie so voneinander zu unterscheiden, daß jedes von ihnen bei projektiven Operationen für sich verfolgt werden kann.

Es seien jetzt in einer Ebene zwei Paare von konjugiert imaginären Punkten gegeben, repräsentiert durch zwei elliptische Involutionen auf u, u_1; wir wollen die vier imaginären Verbindungslinien der einen Punkte mit den andern haben. Gelingt es uns, eine Strahleninvolution herzustellen, welche zu beiden Punktinvolutionen perspektiv ist, so sind ihre Doppelstrahlen zwei von jenen gesuchten Geraden. Wir machen aber eine Strahleninvolution perspektiv zu einer Punktinvolution, wenn zwei Strahlenpaare von jener über zwei Punktepaaren von dieser stehen. Der Schnittpunkt der beiden Träger der gegebenen Punktinvolutionen sei A, A_1; A', A_1' seien die ihm in den Involutionen gepaarten Punkte und BB' sei das Paar der ersten Involution, das zu AA' harmonisch ist, ebenso B_1B_1' das der zweiten, welches zu A_1A_1' harmonisch ist.[1]) Durch diese Paare seien die Involutionen bestimmt

1) Für das Paar aus dem Zentralpunkte und dem unendlich fernen Punkte haben wir es in Nr. 14 konstruiert. Wir projizieren ein beliebiges Paar in dieses und das erhaltene harmonische Paar zurück.

und die Doppelpunkte der einen haben die Sinne $ABA'B'$ und $AB'A'B$, die der andern die Sinne $A_1B_1A_1'B_1'$ und $A_1B_1'A_1'B_1$. Nun ist, wegen der Harmonizität:

$$AA'BB' \barwedge A_1A_1'B_1B_1';$$

der gemeinsame Punkt A, A_1 entspricht sich selbst, daher sind die beiden Würfe perspektiv: es laufen $a' = A'A_1'$, $b = BB_1$, $b' = B'B_1'$ in einen Punkt U zusammen; geht noch a von diesem nach dem gemeinsamen Punkte A, A_1, so stehen aa', bb' über beiden Paaren der einen Involution und beiden Paaren der andern; die durch sie bestimmte Involution ist zu beiden gegebenen Involutionen perspektiv; der Doppelstrahl (mit dem Sinne) $aba'b'$ verbindet die Punkte $ABA'B'$ und $A_1B_1A_1'B_1'$ und der andere $ab'a'b$ die Punkte $AB'A'B$ und $A_1B_1'A_1'B_1$.

Es ist aber auch:

$$AA'BB' \barwedge A_1B_1'A_1'B_1;$$

es laufen daher $a' = A'A_1'$, $b_1' = BB_1'$, $b_1 = B'B_1$ in einen Punkt U_1 zusammen; ist a_1 dessen Verbindungsstrahl mit dem gemeinsamen Punkt, so haben wir in $(a_1a', b_1'b_1)$ eine zweite zu den gegebenen Involutionen perspektive Involution, und in ihren Doppelstrahlen $a_1b_1'a'b_1$ und $a_1b_1a'b_1'$ die beiden Geraden, welche $ABA'B'$ mit $A_1B_1'A_1'B_1$ und $AB'A'B$ mit $A_1B_1A_1'B_1'$ verbinden.

Die Punkte U, U_1, die reellen Punkte, welche je den konjugiert imaginären unter den Verbindungslinien gemeinsam sind, liegen auf a', welche die dem gemeinsamen Punkte uu_1 gepaarten Punkte verbindet, und zwar werden sie, wie das Viereck $BB'B_1B_1'$ lehrt, durch u, u_1 harmonisch getrennt.

Die Punkte U, U_1 bestimmen auf a' eine dritte Involution mit ihnen als Doppelpunkten, welche zu den gegebenen in einer Beziehung steht, die bald besprochen werden wird.

Man behandele die feldduale Aufgabe.

Die eine der beiden Involutionen sei, beispielsweise, die absolute auf der unendlich fernen Gerade u_1, die andere auf u eine beliebige elliptische. Der Punkt A, A_1 ist der unendlich ferne von u, A' ist der Zentralpunkt der endlichen Involution, A_1' der unendlich ferne Punkt in senkrechter Richtung zu u, a' also die Senkrechte auf u in A'. Das Paar B, B' der Involution auf u ist dasjenige, welches durch A' halbiert wird, B_1, B_1' sind unendlich fern auf den Halbierungslinien der Winkel von u und a', also U und U_1 die Schnitte, mit a', der Parallelen zu ihnen durch B (oder B'), daher gleichweit von A' entfernt, ebensoweit wie B und B'. Die Potenz der Involution auf u ist $A'B \cdot A'B'$, die der Involution auf a' ist $A'U^2 = A'U_1^2$, also jener entgegengesetzt gleich.

Ähnlich kann die Aufgabe gelöst werden: eine Projektivität reell zu bestimmen, wenn ein Paar reeller Elemente und zwei Paare von konjugiert imaginären Elementen als entsprechend gegeben sind. Diese imaginären Elemente seien durch die Involutionen I und I_1 gegeben, und es muß genauer festgestellt werden, welche Sinne einander entsprechen sollen. Die gegebenen reellen Elemente seien A und A_1, ihnen in den Involutionen gepaart A', A_1', und wiederum seien BB'; B_1B_1' diejenigen Paare derselben, welche zu AA', bzw. A_1A_1' harmonisch sind. Wählen wir den Wurf $ABA'B'$ und von den beiden Würfen $A_1B_1A_1'B_1'$, $A_1B_1'A_1'B_1$ denjenigen, welcher den entsprechenden Sinn hat, was etwa für den ersteren gelte, so ist die Projektivität reell durch diese beiden projektiven Würfe bestimmt (oder durch drei Paare entsprechender Elemente aus ihnen).

79 Eine gegebene elliptische Punktinvolution I_P soll aus einem Punkte durch eine rechtwinklige Strahleninvolution projiziert werden. In jeder Ebene durch den Träger u von I_P gibt es zwei reelle Punkte, aus denen eine solche Projektion möglich ist. Da auch der Zentralpunkt O und der unendlich ferne Punkt von u durch einen rechten Winkel zu projizieren sind, so müssen die gesuchten Punkte auf dem Lote sich befinden, welches in O auf u errichtet ist. Wenn ferner EE' ein anderes Paar von I_P ist, so haben wir die Punkte auf dem Kreise K^2 über EE' als Durchmesser zu suchen; weil E, E' zu verschiedenen Seiten von O liegen, sind die Schnitte U, U_1 dieses Kreises mit jenem Lote reell, liegen symmetrisch in bezug auf u, was von vornherein zu erwarten war, und für die Entfernung OU gilt: $OU^2 = EO \cdot OE'$; das ist der absolute Wert der Potenz von I_P.

Diese zwei rechtwinkligen Paare der projizierenden Involution machen sie ganz rechtwinklig.

In jeder Ebene durch den Träger u einer elliptischen Punktinvolution I_P gibt es also zwei reelle Punkte, aus denen sie durch eine rechtwinklige Strahleninvolution projiziert wird; sie befinden sich auf dem Lote, das auf u im Zentralpunkte errichtet ist, zu beiden Seiten in der Entfernung der Wurzel aus der absoluten Potenz der Involution.

Durch sie gehen alle Kreise, welche wie K^2 zu den übrigen Paaren der Involution gehören.

Die sämtlichen Ebenen durch u liefern dann als Ort aller Punkte, aus denen I_P durch eine rechtwinklige Involution projiziert wird, den Kreis um den Zentralpunkt O in der Ebene, die in ihm auf u senkrecht steht, und mit der genannten Wurzel als Radius.

80 Wir wenden uns zu den analogen Aufgaben:

Es soll erstens eine gegebene elliptische Strahleninvolution I_g im Büschel (O, ω) durch eine rechtwinklige Ebeneninvolution projiziert werden. Die Axe v muß durch O gehen. Es sei st das rechtwinklige Paar von I_g; der rechte Winkel st liegt im rechten Flächenwinkel $v(s, t)$; dann muß (Nr. 62) einer der Schenkel s, t zur Kante v normal sein.

Wenn aber t normal zu v und zur Ebene vs ist, so ist es auch die durch t gehende Ebene ω, oder vs ist die Ebene σ, welche in s auf ω senkrecht steht; also befindet sich v in dem Büschel (O, σ). Und für jeden Strahl v dieses Büschels gilt, daß s und t aus ihm durch rechtwinklige Ebenen projiziert werden; denn t ist rechtwinklig zu σ, mithin die Ebene vt normal zu vs oder σ.

Wenn also σ und τ die Ebenen sind, welche auf ω in s und t senkrecht stehen, so haben wir die fraglichen Axen v allein in den Büscheln (O, σ), (O, τ) zu suchen. Auf eine im ersteren Büschel befindliche v sei eine senkrechte Ebene ε gelegt, sie schneidet aus der projizierenden rechtwinkligen Ebeneninvolution eine rechtwinklige Strahleninvolution um den Punkt $V = v\varepsilon$. Diese steht über der Punktinvolution, welche von der Schnittlinie $\varepsilon\omega = u$ aus I_g ausgeschnitten wird. Da ε und ω zu σ normal sind, so ist es auch u, also ist u normal zu s und parallel zu t; daher wird $S = su$ Zentralpunkt dieser Involution, und der Kreis der Punkte, aus denen sie durch eine rechtwinklige Strahleninvolution projiziert wird, liegt in σ, die in S auf u senkrecht steht, und hat S zum Mittelpunkt. Es muß also V auf diesem Kreise liegen. Da aber $v = OV$ zu ε normal ist, so sind auch OV und SV rechtwinklig; d. h. OV ist Tangente aus O an diesen Kreis. Wenn ee' irgend ein Paar von I_g ist und EE' das perspektive Paar auf u, so ist der Radius des Kreises $\sqrt{ES \cdot SE'}$.

Ähnliches gilt für τ. Aber die beiden Ebenen unterscheiden sich. Es sei s derjenige Strahl des rechtwinkligen Paares, der in den spitzen Winkeln aller Paare liegt (Nr. 20), und t der in den stumpfen Winkeln befindliche. Weil $\sphericalangle EOE' < \frac{\pi}{2}$, so ist $OS^2 > ES \cdot SE'$; folglich liegt O außerhalb des Kreises und es sind 2 reelle Tangenten OV möglich. Dagegen bei der Ebene τ wird O innerhalb liegen.

Wir haben also zwei reelle und zwei imaginäre Axen, die einen in σ, die andern in τ; und jene ergeben sich folgendermaßen:

Man bestimme denjenigen Strahl s des rechtwinkligen Paares, der innerhalb aller spitzen Winkel der Paare liegt, und die Ebene σ, die in ihm senkrecht auf ω steht. Wenn dann I_g in einer Punktinvolution durch eine Transversale u, welche senkrecht zu s (und zu σ) ist, geschnitten wird, so werde in σ um den Punkt us der Kreis geschlagen, dessen Radius gleich der Wurzel aus der absoluten Potenz dieser

Involution ist; die reellen Tangenten aus O an ihn sind die gesuchten Axen, offenbar symmetrisch zueinander in bezug auf ω.

In der analogen Ebene τ gibt es zwei imaginäre.

81 Nunmehr soll aus einer gegebenen elliptischen Ebeneninvolution I_e um u eine rechtwinklige Strahleninvolution geschnitten werden.

Es sei $\sigma\tau$ das rechtwinklige Paar und davon τ diejenige Ebene, welche in allen stumpfen Winkeln der Paare liegt. Wir wissen schon, jeder aus $\sigma\tau$ ausgeschnittene rechte Winkel hat seinen einen Schenkel normal auf u; ist es der in σ, so steht dieser dann auf τ senkrecht und damit auch die einschneidende Ebene. Also kann es sich nur um Ebenen handeln, die zu τ oder σ normal sind, und diese schneiden umgekehrt auch alle rechte Winkel aus $\sigma\tau$. Parallelverschiebung ist offenbar hier gestattet; also kann man die Beschränkung auferlegen, daß die gesuchte Ebene durch eine gegebene Senkrechte p auf τ oder σ gehe. Es sei p eine Senkrechte auf τ. Die Involution, die auf ihr durch I_e entsteht, hat $\tau p = T$ zum Zentralpunkt und der Kreis der Scheitel der projizierenden rechtwinkligen Strahleninvolutionen um ihn liegt in τ und kann daher die Axe u schneiden; denn auf dieser müssen die Scheitel der gesuchten Strahleninvolutionen liegen. Und in τ geschieht es reell, in σ nicht. Weil p rechtwinklig zu τ und daher auch zu u ist, so geht durch sie eine Ebene normal zu u, welche also den Büschel u in einem gleichen Strahlenbüschel U schneidet. TU ist die Entfernung der u von T; sind wieder E, E' gepaart auf p, vom Paare $\varepsilon\varepsilon'$ herrührend, so ist der Winkel EUE' stumpf, also $TU^2 < ET \cdot TE'$, daher TU kleiner als der Radius jenes Kreises, und dieser wird von u geschnitten; in σ sind die Schnitte imaginär. Demnach führt τ zu zwei reellen, σ zu zwei imaginären Büscheln von Parallelebenen, welche rechtwinklige Strahleninvolutionen aus I_e schneiden. Jede Senkrechte p zu τ führt zu einer Ebene aus jedem Büschel. Man konstruiert in τ um den Punkt τp den Kreis, dessen Radius gleich der Wurzel aus der absoluten Potenz der in p durch I_e eingeschnittenen Involution ist; seine reellen Schnitte mit der Axe u der gegebenen Ebeneninvolution geben mit p verbunden die gesuchten Ebenen.

Durch jeden Punkt gehen also zwei reelle und zwei imaginäre Ebenen.

Endlich, wenn eine elliptische Punktinvolution I_P auf u gegeben ist, so projiziere man sie zunächst aus einem beliebigen Punkte P durch eine Strahleninvolution; es gehen also durch einen Punkt vier Axen, zwei reelle und zwei imaginäre, aus

denen sie durch eine rechtwinklige Ebeneninvolution projiziert wird.

Ist eine Ebene ε gegeben, so sei E' dem Schnitte $E = \varepsilon u$ gepaart und O der Fußpunkt der Lotes aus E' auf ε; dem Büschel (O, ε) müssen die in ε befindlichen Axen angehören. Ersichtlich bilden OE und OE' das rechtwinklige Paar der aus O projizierenden Strahleninvolution, und ε ist σ oder τ; eine Ebene enthält darnach zwei reelle oder imaginäre Axen[1]).

Es soll jetzt gezeigt werden, wie aus zwei Involutionen $(\mathfrak{a})$, $(\mathfrak{b})$ 82
auf $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ eine dritte abgeleitet werden kann, welche mit ihnen verbunden ist. $\mathfrak{C}$ sei der Schnittpunkt von $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}$ seien ihm in $(\mathfrak{a})$, $(\mathfrak{b})$ gepaart, $\mathfrak{c}$ die Verbindungslinie $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$. Aus einem zunächst festgehaltenen Punktepaare AA' von $(\mathfrak{a})$ projizieren wir sämtliche Punktepaare von $(\mathfrak{b})$ auf $\mathfrak{c}$, und zwar immer den einen Punkt aus A, den andern aus A' und dann auch umgekehrt, weil die beiden Punkte des projizierten Paares ja vertauscht werden können. Da wir die $(\mathfrak{b})$ in zwei konjektive Punktreihen auflösen können, so entstehen projektive Strahlenbüschel um A und A' und konjektive Punktreihen auf $\mathfrak{c}$. Diese sind aber involutorisch; denn zu $(\mathfrak{b})$ gehört auch $\mathfrak{C}\mathfrak{A}$; projizieren wir $\mathfrak{C}$ aus A, $\mathfrak{A}$ aus A', so ergeben sich $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}$; projizieren wir aber $\mathfrak{A}$ aus A, $\mathfrak{C}$ aus A', dann $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$; also entsprechen diese beiden Punkte sich doppelt, folglich geschieht dies durchweg. Nimmt man ebenso ein festes Paar BB' aus $(\mathfrak{b})$ und projiziert in derselben Weise die $(\mathfrak{a})$ auf $\mathfrak{c}$, so ergibt sich ebenfalls eine Involution, für welche wir aber schon drei gemeinsame Paare mit der vorigen angeben können, so daß sie identisch sind; eins ist $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ und die beiden andern werden durch $(AB, A'B')$, $(AB', A'B)$ eingeschnitten.

Wird aus einem andern Paare A_1A_1' von $(\mathfrak{a})$ wiederum $(\mathfrak{b})$ projiziert, so sehen wir ebenso ein, daß die erhaltene Involution auf $\mathfrak{c}$ mit der bei BB' erhaltenen und also mit der bei AA' erhaltenen identisch ist, denn mit jener hat sie $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ und die durch $(A_1B, A_1'B')$, $(A_1B', A_1'B)$ sich ergebenden Paare gemein. Und ebenso können wir ein anderes Paar von $(\mathfrak{b})$ nehmen, die Involution $(\mathfrak{c})$ auf $\mathfrak{c}$ bleibt immer dieselbe.

Wenn also auf zwei Geraden $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ zwei Involutionen $(\mathfrak{a})$, $(\mathfrak{b})$ gegeben sind und $\mathfrak{c}$ die beiden Punkte $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}$ verbindet, welche dem gemeinsamen Punkte $\mathfrak{C} = \mathfrak{a}\mathfrak{b}$ gepaart sind, so gehören alle die Punktepaare, die sich ergeben, wenn man $\mathfrak{c}$ mit $(AB, A'B')$ oder $(AB', A'B)$ schneidet, wo AA' irgend ein Paar von $(\mathfrak{a})$ und BB' irgend eins von $(\mathfrak{b})$ ist, zu der nämlichen Involution $(\mathfrak{c})$. In ihr sind auch $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}$ gepaart. Nennen wir sie den Involutionen $(\mathfrak{a})$, $(\mathfrak{b})$ verbunden.

1) Diese Kongruenz 4. Ordnung 2. Klasse subsumiert sich (dual) der in der Liniengeometrie Bd. II Nr. 488 besprochenen.

Liegen A, B, C auf $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ in gerader Linie, und seien A', B', C' zu ihnen in $(\mathfrak{a}), (\mathfrak{b}), (\mathfrak{c})$ gepaart, so muß $(AB, A'B')$ in $\mathfrak{c}$ ein Paar einschneiden, d. h. C' liegt auf $A'B'$.

Zu drei Punkten auf $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$, welche in gerader Linie liegen, sind in den drei Involutionen $(\mathfrak{a}), (\mathfrak{b}), (\mathfrak{c})$ drei ebenfalls in gerader Linie liegende Punkte gepaart.

Daraus aber erhellt, daß aus jeden zwei von den drei Involutionen die dritte in der nämlichen Weise sich ergibt; daher nennen wir sie kürzer drei verbundene Involutionen. Und umgekehrt, wenn drei Involutionen auf den Seiten eines Dreiecks so liegen, daß je die Ecken ein Paar bilden und einmal drei in gerader Linie liegenden Punkten A, B, C drei wiederum in gerader Linie liegende Punkte A', B', C' gepaart sind, so geschieht dies durchweg; die Involution auf $\mathfrak{c}$ hat ja mit derjenigen, welche den beiden andern verbunden ist, die beiden Paare $\mathfrak{B}\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{c}(AB, A'B') = C, C'$ gemeinsam.

Durch das Dreieck $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ und zwei Transversalen ABC, $A'B'C'$ sind die drei verbundenen Involutionen vollständig und eindeutig bestimmt.

Es sei nun die eine ABC so gezogen, daß sie die drei Außenstrecken $\mathfrak{B}\cdot\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}\cdot\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{B}$ trifft, so kann die zweite $A'B'C'$ entweder ebenso beschaffen sein, oder sie trifft nur eine Außenstrecke und zwei Innenstrecken (Nr. 52). Wird eine Seite von beiden Transversalen gleichartig oder ungleichartig getroffen, so ist die auf ihr entstehende Involution hyperbolisch oder elliptisch.

Von drei verbundenen Involutionen sind entweder alle drei hyperbolisch oder nur eine und die beiden andern elliptisch.

Lassen wir A und A' in einen Doppelpunkt zusammenrücken, ebenso B und B', dann vereinigt sich AB mit $A'B'$, also auch C mit C'.

Auf jeder Verbindungslinie zweier Doppelpunkte zweier von drei verbundenen Involutionen liegt einer der dritten Involution. Daraus folgt, daß die sechs Doppelpunkte der drei Involutionen ein vollständiges Vierseit bilden, in welchem je zwei zusammengehörige Gegenecken sind und das gegebene Dreiseit das Diagonaldreiseit ist.

Im ersten Falle, wo die Involutionen sämtlich hyperbolisch sind, ist dies Vierseit vollständig reell, im andern aber sind seine Seiten und zwei Paare Gegenecken imaginär, und nur das dritte Paar ist reell.

Ist D ein reeller Doppelpunkt, etwa auf $\mathfrak{c}$, AA' wiederum ein beliebiges Paar von $(\mathfrak{a})$, so schneiden DA, DA' in $\mathfrak{b}$ ein Paar ein; jedes Strahlenpaar aus D, das nach einem Paare von $(\mathfrak{a})$ geht, geht

auch nach einem von ($\mathfrak{b}$). D ist Scheitel einer Strahleninvolution, die mit beiden Involutionen ($\mathfrak{a}$), ($\mathfrak{b}$) zugleich perspektiv ist.

Wenn ($\mathfrak{a}$), ($\mathfrak{b}$) gleichartig sind, so ist ($\mathfrak{c}$) jedenfalls hyperbolisch. Aus jedem der Doppelpunkte der hyperbolischen Involution, welche zwei gleichartigen Involutionen verbunden ist, werden diese durch die nämliche Strahleninvolution projiziert, und die Doppelstrahlen dieser Involution gehen durch die Doppelpunkte der einen und der andern.

Sind ($\mathfrak{a}$) und ($\mathfrak{b}$) elliptisch, so sind dies die Punkte U, U_1, die wir in Nr. 78 konstruiert haben, und diese beiden Strahleninvolutionen stellen je zwei konjugiert imaginäre von den vier Verbindungslinien der imaginären Doppelpunkte dar.

Jedes vollständige Vierseit führt, umgekehrt, zu drei verbundenen Involutionen auf den Diagonalen, von welchen die Gegenecken Doppelpunkte sind. Denn auf jeder sind die beiden Diagonalpunkte gepaart, weil harmonisch zu den Gegenecken; und ein Tripel von Doppelpunkten auf einer Seite des Vierseits zeigt, daß auch die gepaarten und mit ihnen identischen Punkte in gerader Linie liegen.

Es seien zwei verschiedenartige Involutionen auf rechtwinkligen Geraden $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ gegeben, für welche der Schnitt $\mathfrak{C}$ gemeinsamer Zentralpunkt ist und deren Potenzen entgegengesetzt gleich sind. Aus dem Zentralpunkt $\mathfrak{C}$ folgt, daß die dritte Gerade $\mathfrak{c}$ die unendlich ferne ist. Seien AA', BB' zwei Paare und ($\mathfrak{a}$) elliptisch, so ist $A\mathfrak{C}\cdot\mathfrak{C}A'$ $= \mathfrak{C}B\cdot\mathfrak{C}B'$, oder $\frac{A\mathfrak{C}}{\mathfrak{C}B} = \frac{\mathfrak{C}B'}{\mathfrak{C}A'}$, also sind die rechtwinkligen Dreiecke $A\mathfrak{C}B$ und $B'\mathfrak{C}A'$ ähnlich, mithin $\sphericalangle\, \mathfrak{C}A'B'$ gleich mit $\mathfrak{C}BA$ und komplementär zu $\mathfrak{C}AB$; d. h. $A'B'$ ist normal zu AB. Die dritte Involution ist die absolute. Und umgekehrt, kombiniert man die absolute Involution mit einer beliebigen ($\mathfrak{a}$), so steht der Träger $\mathfrak{b}$ der dritten im Zentralpunkte von ($\mathfrak{a}$) auf $\mathfrak{a}$ senkrecht, und die beiden endlichen Involutionen haben entgegengesetzt gleiche Potenz.

Drei verbundene Involutionen ($\mathfrak{A}$), ($\mathfrak{B}$), ($\mathfrak{C}$) um die Ecken 83
eines Dreiecks haben die Seiten je zu gepaarten Strahlen und drei Strahlen, die in einen Punkt zusammenlaufen, sind in ihnen drei ebensolchen Strahlen gepaart, und wenn bei drei Involutionen ($\mathfrak{A}$), ($\mathfrak{B}$), ($\mathfrak{C}$), in denen je die Seiten des Dreiecks gepaart sind, das einmal geschieht, so geschieht es durchweg, und die drei Involutionen sind verbunden.

Mit zwei rechtwinkligen Involutionen ($\mathfrak{A}$), ($\mathfrak{B}$) ist verbunden eine gleichseitig-hyperbolische Involution mit unendlich fernem Scheitel in senkrechter Richtung zu $\mathfrak{AB}$, deren Doppelstrahlen die unendlich ferne Gerade und die Mittelsenkrechte auf $\mathfrak{AB}$ sind; denn in diese beiden Geraden schneiden die beiden Involutionen je dieselbe Involution ein.

Wenn drei Punktinvolutionen $(\mathfrak{a})$, $(\mathfrak{b})$, $(\mathfrak{c})$ verbunden sind, so sind auch die drei Strahleninvolutionen, welche sie je aus der Gegenecke $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ projizieren, verbunden.

Betrachten wir zuerst den Fall, daß die Involutionen sämtlich hyperbolisch sind. Es seien dann $D_\mathfrak{a}$, $D_\mathfrak{b}$, $D_\mathfrak{c}$ drei in gerader Linie liegende Doppelpunkte; weil der zweite $D_\mathfrak{c}'$ zu $D_\mathfrak{c}$ harmonisch ist in bezug auf $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$, so liegt er (Nr. 52) so, daß $\mathfrak{A}D_\mathfrak{a}$, $\mathfrak{B}D_\mathfrak{b}$, $\mathfrak{C}D_\mathfrak{c}'$ in einen Punkt zusammenlaufen; das sind aber drei Doppelstrahlen von $(\mathfrak{A})$, $(\mathfrak{B})$, $(\mathfrak{C})$; die drei ihnen gepaarten Strahlen, mit ihnen identisch, tun es also ebenfalls, folglich sind die drei Strahleninvolutionen verbunden.

Sind aber zwei der Involutionen, etwa $(\mathfrak{b})$, $(\mathfrak{c})$ elliptisch, so sei CC' das reelle Paar von $(\mathfrak{c})$, das zu $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ harmonisch ist; es seien nun in $(\mathfrak{a})$, $(\mathfrak{b})$ zwei Paare AA', BB' derartig, daß A, B, C in gerader Linie liegen und also A', B', C' ebenfalls; dann laufen $\mathfrak{A}A$, $\mathfrak{B}B$, $\mathfrak{C}C'$ in einen Punkt zusammen (Nr. 52) und ebenso sind $\mathfrak{A}A'$, $\mathfrak{B}B'$, $\mathfrak{C}C$ konkurrent. Diese Strahlen sind aber jenen in $(\mathfrak{A})$, $(\mathfrak{B})$, $(\mathfrak{C})$ gepaart; also sind diese drei Involutionen verbunden.

84 Wir wollen jetzt die Figur auf den Raum erweitern. Es seien auf die drei Kanten eines Dreikants Involutionen gelegt; dem gemeinsamen Punkte $\mathfrak{D}$ seien gepaart $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$; auf $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ werden die verbundenen Involutionen hergestellt bzw. zu denen auf $\mathfrak{D}\mathfrak{B}$, $\mathfrak{D}\mathfrak{C}$; $\mathfrak{D}\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}\mathfrak{A}$; $\mathfrak{D}\mathfrak{A}$, $\mathfrak{D}\mathfrak{B}$. Dann sind diese drei Involutionen untereinander verbunden. Wenn nämlich E, F, G, H, I, K die Schnitte einer Ebene mit $\mathfrak{D}\mathfrak{A}$, $\mathfrak{D}\mathfrak{B}$, $\mathfrak{D}\mathfrak{C}$, $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ sind und $E', \ldots, K'$ ihnen in den Involutionen gepaart, so sind je in gerader Linie gelegen: F, G, H; G, E, I; E, F, K; H, I, K; daher auch F', G', H'; G', E', I'; E', F', K'; folglich sind diese sechs Punkte in einer Ebene befindlich und H', I', K' in gerader Linie.

Diese sechs verbundenen Involutionen auf den Kanten eines Tetraeders sind bestimmt je durch die beiden Ecken und die Schnittpunktenpaare mit zwei Ebenen. Es sind je sechs Punkten auf den Kanten, die in einer Ebene liegen, sechs ebenso beschaffene Punkte gepaart.

Bei sechs verbundenen Ebeneninvolutionen um die Kanten eines Tetraeders sind je drei verbunden um Kanten aus einer Ecke. Projiziert man die vorherigen Punktinvolutionen je aus der Gegenkante, so ergeben sich sechs Ebeneninvolutionen, welche verbunden sind, denn es sind verbunden die drei Strahleninvolutionen, welche die auf den Seiten eines Dreiecks liegenden Punktinvolutionen je aus der Gegenecke projizieren, und daher auch die über ihnen stehenden Ebeneninvolutionen um die Kanten aus diesen drei Ecken nach der vierten.

Die zwölf Doppelpunkte von sechs verbundenen Involutionen

liegen, außer in den Tetraederebenen, zu je sechs in acht Ebenen, und in jeder je drei in vier Geraden, den Schnitten mit den Tetraederebenen.

Wenn auf dem nämlichen Träger zwei Involutionen I_1, I_2 85
gegeben sind, so können zwei verschiedene Operationen mit ihnen vorgenommen werden. Das eine Mal werde die eine Involution I_1 durch die andere I_2 transformiert, oder, wie man auch sagt, auf I_1 werde mit I_2 operiert; d. h. wir nehmen zu den Elementen eines Paars von I_1 die ihnen in I_2 gepaarten; die neuen Paare, die sich dadurch ergeben, bilden wiederum eine Involution $\bar{I}_1$.

In der Tat, I_1 sei in konjektive Gebilde aufgelöst:

$$AA'BB'CC' \ldots \barwedge A'AB'BC'C \ldots;$$

den $A, A', B, B', \ldots$ seien in I_2 gepaart: $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}', \mathfrak{B}, \mathfrak{B}', \ldots$; also ist:

$$AA'BB'CC' \ldots \barwedge \mathfrak{A}\mathfrak{A}'\mathfrak{B}\mathfrak{B}'\mathfrak{C}\mathfrak{C}' \ldots;$$

oder, was dasselbe ist:

$$A'AB'BC'C \ldots \barwedge \mathfrak{A}'\mathfrak{A}\mathfrak{B}'\mathfrak{B}\mathfrak{C}'\mathfrak{C} \ldots;$$

demnach:

$$\mathfrak{A}\mathfrak{A}'\mathfrak{B}\mathfrak{B}'\mathfrak{C}\mathfrak{C}' \ldots \barwedge \mathfrak{A}'\mathfrak{A}\mathfrak{B}'\mathfrak{B}\mathfrak{C}'\mathfrak{C} \ldots .$$

Die Paare $\mathfrak{A}\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}\mathfrak{B}'$ ... bilden die neue Involution $\bar{I}_1$.

Das gemeinsame Paar von I_1, I_2 geht, seine Elemente vertauschend, in sich selbst über und gehört zu allen drei Involutionen.

Transformiert man I_2 durch I_1, so ergibt sich eine andere Involution $\bar{I}_2$.

Nehmen wir aber an, daß ein vom gemeinsamen Paare verschiedenes Paar AA' von I_1 durch I_2 in ein Paar $\mathfrak{A}\mathfrak{A}'$ übergeht, welches ebenfalls zu I_1 gehört, so wird $\bar{I}_1$ mit I_1 identisch; denn zu beiden gehört jenes gemeinsame Paar von I_1 und I_2 und das Paar $\mathfrak{A}\mathfrak{A}'$, und sofort erkennt man auch AA', das aus dem Paare $\mathfrak{A}\mathfrak{A}'$ von I_1 hervorgeht, als I_1 und $\bar{I}_1$ gemeinsam. Ferner geht auch I_2 durch I_1 in sich selbst über, denn die Paare $A\mathfrak{A}$, $A'\mathfrak{A}'$ von I_2 gehen durch I_1 in $A'\mathfrak{A}'$, $A\mathfrak{A}$ über.

Wenn also bei zwei Involutionen I_1, I_2 auf dem nämlichen Träger ein — vom gemeinsamen Paare verschiedenes — Paar der einen I_1 durch die andere I_2 in ein Paar übergeht, das wiederum zu I_1 gehört, so geschieht dies durchweg; I_1 wird durch I_2 in sich selbst übergeführt, aber auch I_2 durch I_1, so daß die Beziehung gegenseitig ist.

Wir wollen von zwei Involutionen in dieser Beziehung sagen, daß sie sich stützen. Sie werden auch konjugierte, harmonische oder vertauschbare Involutionen genannt. Man kann

auch die beiden durch die Involutionen dargestellten Punktepaare als sich stützende bezeichnen und im folgenden durchweg die Involutionen durch diese Punktepaare ersetzen[1]).

Jedes Doppelelement der einen Involution geht durch die andere in ein Doppelelement über, also im vorliegenden Falle das zweite Doppelelement jener Involution. Die Doppelelemente jeder der beiden sich stützenden Involutionen bilden daher in der andern ein Paar; also sind die einen zu den andern harmonisch, woraus die eine der obigen Benennungen sich ergibt. Und umgekehrt, wenn die einen Doppelelemente zu den andern harmonisch sind, so liegt unsere Beziehung vor; denn dann führt jede von den beiden Involutionen das eine Paar der andern mit vereinigten Punkten in das andere derartige Paar über.

Wir erhalten aus einer Involution I_1 eine zu ihr in dieser Beziehung befindliche I_2, wenn wir bei zwei Paaren AB, CD jener die Zuordnung vertauschen, I_2 durch AC, BD bestimmen, und sofort eine andere ebenfalls zu I_1 in dieser Beziehung stehende I_3, bestimmt durch AD, BC; und ersichtlich stehen auch I_2 und I_3 in dieser Beziehung.

Wir haben also drei gegenseitig sich stützende Involutionen I_1, I_2, I_3, und da ihre bestimmenden Paare:

$$AB, CD; \quad AC, BD; \quad AD, BC$$

aus demselben Quadrupel von vier Elementen genommen sind, so wissen wir, daß zwei von ihnen hyperbolisch, die dritte elliptisch ist. Von drei gegenseitig harmonischen Paaren ist eins imaginär.

Von zwei sich stützenden Involutionen ist daher höchstens eine elliptisch.

Jedes weitere Element A' ruft bei jenem Tripel von Involutionen ein solches Quadrupel hervor; es seien ihm B', C', D' in den drei Involutionen gepaart, so hat man wegen der zweiten:

$$ABCA' \barwedge CDAC',$$

wegen der dritten:

$$ABCA' \barwedge DCBD';$$

also:

$$CDAC' \barwedge DCBD';$$

d. h. $C'D'$ gehört zur ersten Involution (AB, CD), und ebenso $B'D'$ zur zweiten, $B'C'$ zur dritten.

Demnach sind dem B' gepaart in den drei Involutionen A', D', C', dem C': D', A', B' und dem D': C', B', A'; so daß von jedem der vier Elemente ausgegangen werden kann.

1) Thieme, Archiv f. Math. u. Phys., 3. Reihe, Bd. 10, S. 137.

Zu einer gegebenen Involution I_0 gibt es ∞^1 Involutionen I, die sich auf sie stützen (oder auf welche sie sich stützt); wir können einem festen Elemente A jedes Element X paaren; sind den A, X in I_0 die B, Y gepaart, so ist BY ein zweites Paar für eine der I. Den Inbegriff der I nennt man einen Büschel von Involutionen. Die Doppelelemente von I_0 bilden ein allen I gemeinsames Paar, und die Paare der Doppelelemente der I bilden die I_0. Auf die Reihe der Elemente X ist der Büschel der Involutionen (oder die Reihe der Elementenpaare der I_0) eindeutig bezogen.

Wenn I_0 elliptisch ist, so sind alle I hyperbolisch; wenn I_0 parabolisch ist, so ist das singuläre Element, in dem die Doppelelemente sich vereinigen, gemeinsames Doppelelement für alle I; und wenn I_0 hyperbolisch ist, so enthält der sich stützende Büschel Involutionen von allen drei Arten: die parabolischen haben ihre singulären Elemente in dem einen und dem andern Doppelelemente von I_0.

Auf eine gleichseitig-hyperbolische Punktinvolution I_0 stützen sich alle diejenigen Involutionen, welche den endlichen Doppelpunkt (Mittelpunkt) von I_0 zum Zentralpunkt haben.

Alle auf eine gleichseitig-hyperbolische Strahleninvolution I_0 sich stützenden haben dasselbe rechtwinklige Paar, zu ihnen gehört die rechtwinklige Involution; und auf eine rechtwinklige Involution stützen sich sämtliche gleichseitig-hyperbolischen des Strahlenbüschels.

Zu zwei Involutionen I', I'' gibt es eine I_0, auf die sich beide stützen; sie hat die Elemente des gemeinsamen Paars zu Doppelelementen. Damit ist gesagt, daß wenn dem A die Punkte B, C in I', I'' gepaart sind und Y, Z dem X, während X über den Träger sich bewegt, es einmal vorkommt, daß AX, BY, CZ in Involution sind; denn diese stützt sich auf I' und I''.

Sämtliche auf I_0 sich stützenden Involutionen bilden dann den Büschel, zu dem I', I'' gehören.

Auf einen Büschel von Involutionen stützt sich eine Involution I_0, auf einen andern eine zweite I_0'; auf diese beiden stützt sich eine Involution, welche also jenen Büscheln gemeinsam ist. Zwei Büschel von Involutionen haben eine Involution gemeinsam; was im Grunde nur der Satz vom gemeinsamen Paare zweier Involutionen ist.

Nennt man den Inbegriff der Involutionen, welche aus dreien I_1, I_2, I_3 so entstehen, daß eine von ihnen I_3 mit allen Involutionen des Büschels $I_1 I_2$ durch Büschel verbunden ist, ein Netz oder einen Bündel von Involutionen, so folgt, daß jede vierte Involution I_4 diesem Netze angehört; denn weil die Büschel $I_1 I_2$ und $I_3 I_4$ eine Involution gemeinsam haben, so befindet sich I_4 in einem der erzeugenden Büschel des Netzes.

Alle von demselben Gebilde getragenen Involutionen bilden ein Netz.

86 Die zweite Operation an zwei Involutionen I_1, I_2 desselben Trägers besteht darin, daß man sie, in bestimmter Reihenfolge, hintereinander vornimmt. Man bestimme, wenn I_1, I_2 die Reihenfolge ist, zu einem Elemente X des Trägers das gepaarte X' in I_1, und dann zu diesem das gepaarte X'' in I_2; Ergebnis ist die Verwandtschaft, in welcher dem X das Element X'' zugeordnet ist. Weil wegen der Involutionen sich X und X'' projektiv zu X' bewegen, so sind sie selbst in projektiver Verwandtschaft, und diese Projektivität $P = (X, X'')$ ist das Ergebnis. Es hat sich als geeignet herausgestellt, diesen Prozeß als Multiplikation und dementsprechend I_1, I_2, P als Faktoren und Produkt zu bezeichnen, aber mit bestimmter Reihenfolge der Faktoren, also:

$$I_1 \cdot I_2 = P.$$

Daß diese Faktoren im allgemeinen nicht vertauscht werden können, unterscheidet diese Multiplikation wesentlich von der gewöhnlichen; sie ist nicht kommutativ.

Das Produkt P muß noch etwas genauer präzisiert werden. Rechnen wir X zum ersten, X'' zum zweiten der beiden projektiven Gebilde, so führt unsere Multiplikation $I_1 \cdot I_2$ vom ersten ins zweite Gebilde; der Projektivität wird ein bestimmter Transformationssinn gegeben[1]) und P ist die Projektivität mit diesem Sinne. Es ist üblich geworden, die Umkehrung, die Projektivität mit dem umgekehrten Sinne, bei welchem aus dem zweiten ins erste Gebilde transformiert wird, mit P^{-1} zu bezeichnen. Die Reihenfolge I_2, I_1 führt zu P^{-1}; denn X'' geht durch I_2 in X', dies durch I_1 in X über. Folglich:

$$I_1 \cdot I_2 = P, \qquad I_2 \cdot I_1 = P^{-1}.$$

Wenn also an und für sich dieselbe Projektivität bei beiden Reihenfolgen sich ergeben hat, so liegt doch der Unterschied des Sinnes vor, und deshalb sehen wir die Produkte nicht als identisch an; später werden wir Produkte, bei der einen und der Reihenfolge sich ergebend, kennen lernen, die noch mehr sich unterscheiden.

Wir führen noch die Unterscheidung von: vor- und nachmultiplizieren ein; in $I_1 \cdot I_2$ ist I_1 mit I_2 nachmultipliziert, I_2 mit I_1 vormultipliziert.

Das Produkt $I \cdot I$ oder I^2 führt X über X' in X über, also jedes Element in sich über; die entstehende Projektivität ist Identität, und weil eine Multiplikation mit dieser nichts ändert, so ver-

1) Mir scheint, daß man das Wort „Transformation" für Verwandtschaften reservieren sollte, die mit einem Sinne behaftet sind.

hält sie sich in unserer Multiplikation wie die 1 in der gewöhnlichen und wird deshalb in den Formeln auch mit 1 bezeichnet; also $I^2 = 1$.

Das Quadrat einer Involution ist die Identität. Ersichtlich ist auch:

$$P \cdot P^{-1} = P^{-1} \cdot P = 1.$$

Die Involution ist mit ihrer Umkehrung identisch und hat keinen bestimmten Sinn; $I^{-1} = I$.

P^2 dagegen bedeutet Überführung von X in $X' \equiv Y$ und von Y in Y', ist also die Projektivität der beiden verschiedenen Elemente X und Y', die in P demselben Elemente $X' \equiv Y$ korrespondieren.

Wegen der beiden Sinne einer Projektivität und der beiden Reihenfolgen führen zwei Projektivitäten, je mit zwei Sinnen: P_1, P_1^{-1}; P_2, P_2^{-1} zu acht Produkten:

$$P_1 P_2, \quad P_1 P_2^{-1}, \quad P_1^{-1} P_2, \quad P_1^{-1} P_2^{-1};$$
$$P_2 P_1, \quad P_2^{-1} P_1, \quad P_2 P_1^{-1}, \quad P_2^{-1} P_1^{-1}.$$

Deshalb wollen wir zunächst mit nichtinvolutorischen Projektivitäten noch nicht in dieser Weise operieren. Bei den Involutionen liegen die Verhältnisse einfacher; da macht nur die Reihenfolge der Faktoren einen Unterschied.

In der gewöhnlichen Multiplikation besteht das Gesetz der Associativität:

$$abc = (ab)c = a(bc).$$

Das gilt auch hier, immer mit Beachtung der Reihenfolge:

$$I_1 I_2 I_3 = (I_1 I_2) I_3 = I_1 (I_2 I_3).$$

Durch I_1 gehe X in X' über, dieses durch I_2 in X'' und dieses durch I_3 in X''' über; dann sind in $I_1 I_2$ entsprechend X im ersten, X'' im zweiten Gebilde, in $I_2 I_3$ X' im ersten, X''' im zweiten, in $I_1 I_2 I_3$, sowie in $(I_1 I_2) I_3$ und $I_1 (I_2 I_3)$: X im ersten, X''' im zweiten. Man kann also in jedem mehrfaktorigen Produkt immer aufeinanderfolgende Faktoren durch ihr Produkt ersetzen.

Dieser Multiplikation entspricht keine Division; man entfernt Faktoren durch Multiplikation. Z. B. aus $I_1 \cdot I_2 = P$ ergibt sich durch Vormultiplizieren mit I_1:

$$I_1^2 \cdot I_2 = I_1 P \quad \text{oder} \quad I_2 = I_1 P,$$

weil $I_1^2 = 1$; und ebenso erhält man durch Nachmultiplizieren mit I_2:

$$I_1 = P \cdot I_2.$$

Im allgemeinen ist $I_1 \cdot I_2$ eine nichtinvolutorische Projektivität. 87
Wir fassen nun den Spezialfall ins Auge, wo eine Involution sich ergibt:

$$I_1 I_2 = I.$$

Bei derselben Reihenfolge müssen wir nicht nur von X zu X'', sondern auch von X'' zu X übergehen; es muß also ein Element X_1' geben, so daß aus X'' durch I_1 X_1', aus diesem durch I_2 X sich ergibt. Damit ist gesagt, daß das Paar XX' von I_1 durch I_2 (also vermittelst der früheren Operation) in $X_1'X''$ übergeht, das ein Paar von I_1 ist, (oder XX_1' von I_2 durch I_1 in $X'X''$ von I_2). Die beiden Involutionen I_1, I_2 stützen sich also, und umgekehrt wenn sie dies tun, also XX' von I_1 durch I_2 in $X_1'X''$ von I_1 übergeht, so führt $I_1 I_2$ das Element X über X' in X'' und X'' über X_1' in X über. Aber auch $I_2 I_1$ führt X über X_1' in X'' und X'' über X' in X über. Beide Reihenfolgen führen zu demselben Ergebnisse, was ja auch aus: $I_2 I_1 = I^{-1} = I$ folgt.

Dann und nur dann, wenn die beiden Involutionen sich stützen, ist die Multiplikation kommutativ, die Faktoren können vertauscht werden; deshalb nennt man so beschaffene Involutionen auch vertauschbar.

Die in $P = I_1 I_2$ entsprechenden Elemente X und X'' sind je demselben Elemente X' in I_1 und I_2 gepaart. Folglich durchlaufen die je demselben Elemente des Trägers gepaarten Elemente zweier Involutionen projektive Gebilde, welche involutorisch werden, sobald die beiden Involutionen sich stützen.

Es sei MN das gemeinsame Paar von I_1, I_2, so geht M durch I_1 in N, dieses durch I_2 in M über. Es sind also M, N die Koinzidenzelemente von P und im speziellen Falle die Doppelelemente von I; daraus folgt, daß I sich auf I_1 und I_2 stützt, und wir haben ein Tripel von sich gegenseitig stützenden Involutionen erhalten. Das leuchtet aber auch daraus ein, daß wir ja in $XX'X_1'X''$ ein Quadrupel besitzen, das in jede der Involutionen zwei Paare liefert:

$$XX',\, X_1'X'' \text{ in } I_1, \quad XX_1',\, X'X'' \text{ in } I_2, \quad XX'',\, X'X_1' \text{ in } I;$$

nur letzteres ist noch darzutun: X_1' geht durch $I_1 I_2$ über X'' in X' über oder X' durch $I_2 I_1$ über X'' in X_1'.

Hier zeigt sich unmittelbar, daß jedes Element X ein solches Quadrupel festlegt; und sind X', X_1', X'' die ihm gepaarten in I_1, I_2, I, so sind dann X_1', X'' in I_1, $X'X''$ in I_2, $X'X_1'$ in I gepaart.

Daß alle drei Involutionen gleichartig auftreten und aus jeden zwei die dritte als Produkt in beiden Reihenfolgen sich ergibt, läßt sich auch durch Rechnung nachweisen.

Wird von den beiden Gleichungen:

$$I_1 \cdot I_2 = I, \quad I_2 \cdot I_1 = I$$

die erste mit I_1 vor-, die zweite mit I_1 nachmultipliziert, so ergibt sich:

$$I_2 = I_1 I, \quad I_2 = I I_1,$$

und ebenso:

$$I_1 = II_2, \quad I_1 = I_2 I.$$

Werden drei verbundene Involutionen (𝔞), (𝔟), (𝔠) aus einem Punkte ihrer Ebene projiziert, so ergeben sich drei Strahleninvolutionen, welche sich auf eine und dieselbe Involution stützen, also demselben Büschel angehören. 88

Sind jene sämtlich hyperbolisch, so bilden die Doppelpunkte die Gegenecken eines reellen vollständigen Vierseits, die Paare der Doppelstrahlen der projizierenden Involutionen gehen nach diesen Gegenecken, bilden also drei Paare einer Involution, und diese ist diejenige, auf welche alle drei sich stützen.

Wenn (𝔞), (𝔟) elliptisch sind und (𝔠) hyperbolisch, so haben die (𝔞), (𝔟) projizierenden Involutionen ein reelles Paar gg' gemeinsam; diese Geraden g, g' projizieren ein Paar von (𝔞) und eins von (𝔟), daher auch ein Paar von (𝔠) und bilden auch in der dritten Strahleninvolution ein Paar. Die Involution, welche g, g' zu Doppelstrahlen hat, ist die gesuchte.

Will man mit imaginären Elementen arbeiten, so gilt jeder dieser Beweise auch für den andern Fall; das vorangehende Verfahren ist jedenfalls vorzuziehen.

Beispiele von drei Involutionen, welche sich gegenseitig stützen, sind folgende:

Zwei Involutionen mit demselben Zentralpunkte und entgegengesetzt gleichen Potenzen und die gleichseitig-hyperbolische Involution, welche jenen Zentralpunkt zum endlichen Doppelpunkt oder Symmetriepunkt hat; die rechtwinklige Involution und zwei gleichseitig-hyperbolische, bei denen von den Doppelstrahlen jedes Paar die Winkel des andern halbiert. Eine Transversale, senkrecht zu einem dieser Doppelstrahlen, gibt die vorangehenden Punktinvolutionen.

Stellt man bei drei sich gegenseitig stützenden Punktinvolutionen über die elliptische eine rechtwinklige Strahleninvolution, so stehen von selber über den beiden hyperbolischen gleichseitig-hyperbolische der eben beschriebenen Art.

Im vorangehenden sind die drei Involutionen immer als reell angenommen. Wir werden später noch den zweiten Fall erkennen, daß eine reell und die beiden andern zu einander konjugiert imaginär sind.

§ 13. Projektive Punktreihen oder Strahlenbüschel in derselben Ebene.

Die in § 5 erörterte räumliche Folge von projektiven Operationen, 89
die von einer von zwei projektiven Punktreihen zur andern führt, wird illusorisch, wenn sie in derselben Ebene liegen. Wir wollen daher die Überführung durch eine andere ganz in der Ebene

verbleibende Operationenfolge vornehmen. Wenn wieder A, B, C auf u den A', B', C' auf u' entsprechen, so seien auf eine der drei Verbindungslinien entsprechender Punkte, etwa auf AA', zwei beliebige Punkte S, S' gelegt; die Strahlenbüschel, welche die Punktreihe auf u aus S und diejenige auf u' aus S' projizieren, sind perspektiv, weil der Strahl $SS' = AA'$ sich selbst entspricht; daher schneiden sich die weiteren entsprechenden Strahlen auf der Perspektivitätsaxe u'', die durch die Punkte $(SB, S'B')$, $(SC, S'C')$ festgelegt wird. Wir können mit ihrer Hilfe beliebige weitere entsprechende Punkte X, X' herstellen; es müssen immer SX und $S'X'$ sich auf u'' schneiden. Die Operationenfolge von u zu u' ist: Projektion von u aus S, Schnitt mit u'', Projektion aus S', Schnitt mit u' oder kürzer ausgedrückt: Projektion von u aus S auf u'', Projektion von u'' aus S' auf u'. Man ermittle die Fluchtpunkte R, Q' von u, u' und die dem gemeinsamen Punkte E, F' entsprechenden Punkte E', F.

Liegen, ebenfalls in einer Ebene, zwei Strahlenbüschel U, U' vor, in denen den a, b, c die a', b', c' entsprechen, so verfährt man felddual, nämlich, wenn s, s' durch aa' gelegt sind, so bestimmt man den Punkt U'' durch die Verbindungslinien $(sb, s'b')$, $(sc, s'c')$. Zwei Strahlen x, x' von U, U' sind entsprechend, wenn die Gerade $(sx, s'x')$ durch U'' geht. Die Operationenfolge ist hier: Schnitt des Büschels U mit s, Projektion aus U'', Schnitt mit s', Projektion aus U'.

Man bestimme die Strahlen e', f, welche dem gemeinsamen Strahle e, f' korrespondieren.

Spezielle Lagen von S, S' geben Vereinfachungen. Man lege S in (AA', BB'), S' in (AA', CC'); dann fällt $(SB, S'B')$ in den Punkt B' und $(SC, S'C')$ in den Punkt C, also ist $u'' = B'C$. Auf ihr schneiden sich SD und $S'D'$, wenn D, D' ein viertes Paar entsprechender Punkte ist, oder $SD, S'D', B'C$ gehen durch einen Punkt. Bilden wir nun aus den beiden Trägern u, u' und den vier Verbindungslinien AA', BB', CC', DD' oder a, b, c, d das einfache Sechsseit $abu'duc$, dessen Ecken sind: $S = ab$, $B' = bu'$, $D' = u'd$, $D = du$, $C = uc$, $S' = ca$, so verbinden unsere drei in einen Punkt zusammenlaufenden Geraden die Gegenecken dieser Figur, sind ihre Hauptdiagonalen, und wir haben den Satz:

Bei zwei projektiven Punktreihen derselben Ebene kann man aus den beiden Trägern und vier Verbindungslinien entsprechender Punkte (und zwar auf 24 Weisen) ein Sechsseit bilden, dessen Hauptdiagonalen in einem Punkt zusammenlaufen.

Durch die duale Konstruktion, bei welcher s die Verbindungslinie (aa', bb') und s' die (aa', cc') ist, erhält man:

Bei zwei projektiven Strahlenbüscheln derselben Ebene kann man aus den Scheiteln und vier Schnittpunkten ent-

sprechender Strahlen ein Sechseck herstellen, dessen Gegenseiten sich in drei Punkten schneiden, die in einer geraden Linie liegen.

Eine zweite Spezialisierung besteht darin, daß man S in A', S' 90
in A legt. Auf der Gerade u'', die sich dann ergibt, liegen die Schnittpunkte $(A'B, AB')$, $(A'C, AC')$, $(A'X, AX')$, ..., also auch $(A'E, AE')$ und $(A'F, AF')$, wo wieder E, F' die im Schnittpunkte uu' liegenden Punkte der beiden Reihen sind. Aber $(A'E, AE')$ ist E' und $(A'F, AF')$ ist F. Folglich ist die Gerade u'' die Verbindungslinie der beiden Punkte F' und E, die dem Schnittpunkte entsprechen, demnach eine feste Gerade, welche sich nicht ändern wird, wenn wir A', A durch B', B oder C', C oder irgend ein Paar entsprechender Punkte X', X ersetzen. Wir haben also:

Auf der Gerade, welche bei zwei projektiven Punktreihen u, u' derselben Ebene die dem Schnittpunkte entsprechenden Punkte verbindet, liegen alle Punkte:

$$(A'B, AB'),\ (A'C, AC'),\ (A'X, AX'),\ (A'Y, AY'),\ \ldots$$
$$(B'A, BA'),\ (B'C, BC'),\ (B'X, BX'),\ \ldots,$$

oder allgemein:

$$(X'Y,\ XY'),$$

wo X, X' und Y, Y' irgend zwei Paare entsprechender Punkte sind.

Aus jedem Punkte O auf dieser Gerade $E'F$ und nur aus Punkten dieser Gerade werden die beiden projektiven Punktreihen durch involutorische Strahlenbüschel projiziert.

Denn wenn irgend ein Strahl durch O die u und u' in X, Y' trifft, so begegnet sich die Gerade XY' mit der $X'Y$ auf $E'F$, also in O; in diese beiden von O ausgehenden Strahlen sind also sowohl die projizierenden Strahlen x, x' von X, X' als auch die y', y von Y', Y gefallen; sie entsprechen sich in der Projektivität der Büschel in beiderlei Sinne, dieselbe ist involutorisch. Und umgekehrt, wenn zwei projektive Punktreihen aus einem Punkte O durch involutorische Büschel projiziert werden, so muß O auf $E'F$ liegen; denn dem Strahle aus O nach E, F' muß ein Strahl aus O entsprechen, der zugleich E' und F enthält; oder allgemeiner, einem Strahle aus O, der nach X und Y' auf u, u' geht, muß der Strahl aus O entsprechen, der nach X' und Y geht; d. h. O ist $(XY', X'Y)$ und liegt deshalb auf $E'F$.

Wir wollen deshalb die Gerade $E'F$ die involutorische Axe der beiden projektiven Punktreihen nennen.

In allen diesen Involutionen sind der Strahl $E'F$ und der Strahl nach E, F' gepaart.

Sind die Punktreihen u, u' perspektiv, so fallen E', F in den Punkt uu', weil er sich selbst entspricht; er heißt dann besser E, E'.

Jedenfalls geht unsere Gerade durch ihn. Das vollständige Viereck $XX'YY'$, von dem u, u' zwei Gegenseiten, das Perspektivitätszentrum (XX', YY') und der auf ihr gelegene Punkt $(XY', X'Y)$ Diagonalpunkte sind, lehrt, daß sie vom Zentrum durch die beiden Träger harmonisch getrennt wird.

Die duale Betrachtung führt für zwei projektive Strahlenbüschel U, U' in derselben Ebene zu folgendem Ergebnisse: Durch den Schnittpunkt der dem gemeinsamen Strahle e, f' entsprechenden Strahlen e', f gehen alle Verbindungslinien $(x'y, xy')$.

Alle Geraden durch diesen Punkt und nur diese Geraden schneiden die beiden Büschel in involutorischen Punktreihen. Er heiße das involutorische Zentrum der beiden projektiven Büschel.

In allen diesen Involutionen sind der genannte Punkt und der Schnitt mit dem gemeinsamen Strahle gepaart.

Sind die Büschel perspektiv, so liegt dieser ausgezeichnete Punkt auf dem gemeinsamen sich selbst entsprechenden Strahle und wird von der Perspektivitätsaxe durch die beiden Scheitel harmonisch getrennt.

Man übertrage diese Resultate in den Bündel durch Projektion oder durch Dualisierung im Raume.

Die Strahlen, welche zwei projektive Ebenenbüschel in involutorischen Punktreihen schneiden, sind im Raume so verteilt, daß in jeder Ebene ein Strahlenbüschel liegt und von jedem Punkte einer ausgeht; sie bilden dasjenige Strahlengebilde, das wir später einen linearen Komplex oder ein Gewinde nennen werden.

Und ähnliches gilt für die Strahlen, aus denen zwei projektive Punktreihen durch involutorische Ebenenbüschel projiziert werden.

§ 14. Erzeugnisse projektiver Gebilde. Kurven und Kegel zweiten Grades.

91 Wir betrachten die Erzeugnisse in der Ebene und im Bündel. Das Erzeugnis projektiver Strahlenbüschel in derselben Ebene ist der Ort der Schnittpunkte entsprechender Strahlen. Schneiden wir mit einer Gerade, so ergeben sich zwei konjektive Punktreihen und die beiden (reellen oder imaginären) Koinzidenzpunkte sind die Schnitte der Gerade mit dem Erzeugnisse. Wegen der Zahl 2 dieser Schnitte nennen wir das Erzeugnis eine Kurve zweiter Ordnung.

Im Scheitel U begegnet sich der Strahl f' von U' mit seinem entsprechenden Strahle f, also liegt U auf der Kurve; die beiden unendlich nahen entsprechenden Strahlen f_1 und f_1' treffen sich im unendlich nahen Punkte der Kurve neben U und f_1 ist die Verbindungs-

linie beider Punkte, die Tangente in U; auf der Grenze geht sie in f über.

Die erzeugte Kurve geht durch die Scheitel U, U' und hat die Strahlen f, e' in denselben zu Tangenten; das involutorische Zentrum fe' ist Berührungspol für diese Punkte, wenn wir so den Schnittpunkt ihrer Tangenten nennen.

Der Kreis wird in dieser Weise erzeugt.

Es seien U, U' zwei feste Punkte auf ihm, welche die Scheitel der erzeugenden Büschel werden sollen, X, Y zwei beliebige Punkte, zunächst auf dem größeren Bogen UU', x, y, x', y' die Strahlen aus U, U' nach ihnen. Die spitzen Winkel xy, $x'y'$ sind gleich und gleichlaufend. Das bleibt bestehen, wenn wir Y z. B. durch einen Scheitel, etwa U, oder einen Punkt Z des kleineren Bogens ersetzen. Im letzteren Falle sind die spitzen Winkel xz, $x'z'$ wiederum gleich und gleichlaufend, und im Übergangsfalle gilt es für die spitzen Winkel xf und $x'f'$. Es sind gleiche und gleichlaufende, also projektive Strahlenbüschel entstanden, deren Erzeugnis der Kreis ist. Der spitze Winkel xx' bleibt nach Größe und Sinn konstant für alle Punkte X des Kreises.

Legt man insbesondere die Scheitel in die Endpunkte eines Durchmessers, so sind entsprechende Strahlen x und x' durchweg rechtwinklig; die in die unendlich ferne Gerade eingeschnittenen konjektiven Punktreihen bilden die absolute Involution; ihre Doppelpunkte sind die Koinzidenzpunkte, also die Schnitte der Kurve mit jener Gerade.

Alle Kreise einer Ebene (und der parallelen Ebenen) schneiden die unendlich ferne Gerade in denselben imaginären Punkten, den absoluten Punkten; weshalb diese Punkte auch die unendlich fernen imaginären Kreispunkte der Ebene heißen.

Aber auch, wenn wir den Kreis aus zwei beliebigen Punkten auf ihm durch gleiche und gleichlaufende Strahlenbüschel, mit einem nichtrechten konstanten Winkel entsprechender Strahlen, erzeugen, ergeben sich die absoluten Punkte als Koinzidenzpunkte der auf der unendlichen fernen Gerade eingeschnittenen konjektiven Punktreihen. Denn an diesen wird durch eine Parallelverschiebung des einen Büschels nichts geändert; machen wir sie konzentrisch, dann gehen die Koinzidenzstrahlen nach den Koinzidenzpunkten; diese sind aber die isotropen Strahlen im Büschel.

Auch umgekehrt ist, wenn zwei gleiche und gleichlaufende Strahlenbüschel in derselben Ebene vorliegen, das Erzeugnis ein Kreis, der durch die Scheitel geht und in ihnen die dem gemeinsamen Strahle entsprechenden Strahlen tangiert. Denn da die spitzen Winkel xy, $x'y'$ gleich und gleichsinnig sind, so gilt dies auch für die spitzen

Winkel xx', yy'. Also bleibt der spitze Winkel UXU' konstant; und X beschreibt einen Kreis.

92 Die in der analytischen Geometrie durch eine Gleichung 2. Grades in Punktkoordinaten definierten Kurven 2. Ordnung werden von einer Geraden zweimal (reell oder imaginär) geschnitten. Ist der eine Schnitt reell und bekannt, so ist es der andere ebenfalls und wird dann durch eine Gleichung 1. Grades geliefert. Sind also zwei Punkte auf eine solche Kurve gelegt, so schneidet jeder Strahl durch den einen noch einmal reell, und dieser Schnittpunkt bestimmt eindeutig den Strahl des andern Büschels nach ihm, und zwar immer algebraisch wegen der algebraischen Gleichung der Kurve. Folglich muß zwischen den Parametern der Strahlen eine algebraische ein-eindeutige, also bilineare Beziehung statthaben: die Büschel sind projektiv.

Bei dieser Gelegenheit mag auf einen Irrtum hingewiesen werden, welcher leicht begangen werden kann. Es gibt z. B. Kurven 4. Ordnung, welche von keiner einzigen Gerade in vier reellen Punkten geschnitten werden: die durch Rotation eines Kreises um eine in seiner Ebene befindliche Axe entstehende Ringfläche (Torus), welche 4. Ordnung ist, kann man in solchen Kurven schneiden. Werden auf eine derartige Kurve zwei Büschelscheitel gelegt, so darf man nicht etwa auf eindeutige durch die Kurve vermittelte Verwandtschaft zwischen den Büscheln schließen, weil jeder Strahl des einen oder andern nur noch einmal reell trifft. Dieser reelle Schnitt ergibt sich durch die eine reelle Wurzel einer kubischen Gleichung, deren andere beiden Wurzeln konjugiert imaginär sind; und diese dürfen nicht ignoriert werden; jene Wurzel ist nicht rational trennbar von diesen. In Wirklichkeit haben wir hier eine mehrdeutige Verwandtschaft.

Noch weniger liegt unsere algebraisch definierte eindeutige Verwandtschaft vor, wenn mit transzendenten Gebilden gearbeitet wird; bei der gemeinen Zykloide z. B. könnte man irrtümlich geneigt sein, auf eine eindeutige Verwandtschaft auf der geraden Rollbahn zu schließen, in welcher der Fußpunkt der Ordinate des Zykloidenpunktes und der Berührungspunkt der Rollbahn mit dem rollenden Kreise in der zugehörigen Lage sich entsprechen. Aber man sieht sofort, daß es hier nicht zwei, sondern unendlich viele Koinzidenzen gibt. Jede Ordinatenlinie hat zwar nur einen reellen, aber unendlich viele imaginäre Schnitte mit der Zykloide.

Man darf auf unsere algebraische eindeutige Verwandtschaft sowie die weiter zu betrachtenden algebraischen Verwandtschaften nur schließen, wenn man sicher ist, daß man es nur mit algebraischen Beziehungen zu tun hat, und darf niemals imaginäre Lösungen unberücksichtigt lassen.

Als Kegelschnitt wird seit dem Altertum jede Kurve definiert, welche durch eine Ebene aus einem Kegel ge-

schnitten werden kann, der einen Kreis aus einem beliebigen Punkte projiziert. Nun gehen aber die den Kreis erzeugenden projektiven Büschel durch Projektion in ebensolche über; daher wird auch der Kegelschnitt durch projektive Büschel erzeugbar.

Sind die projektiven Strahlenbüschel in perspektiver Lage, so besteht das Erzeugnis 2. Ordnung aus der Perspektivitätsaxe und dem gemeinsamen Strahle, bei dem, weil er sich selbst entspricht, der Schnittpunkt unbestimmt ist. Ebenfalls ein Geradenpaar entsteht, wenn die Projektivität der Büschel eine ausgeartete ist; es besteht aus den beiden singulären Strahlen.

Dem Erzeugnisse projektiver Büschel steht in der Ebene dual 93
gegenüber das Erzeugnis projektiver Punktreihen u, u', die Kurve, welche die Verbindungslinien entsprechender Punkte zu Tangenten hat, von ihnen umhüllt wird: ihre Enveloppe.

Von jedem Punkte kommen zwei (reelle oder imaginäre) von diesen einhüllenden Geraden: die Koinzidenzstrahlen der beiden konjektiven Strahlenbüschel, durch welche die Punktreihen aus dem Punkte projiziert werden. Deshalb heißt die Kurve 2. Klasse[1]).

Die Träger u, u' gehören zu den Tangenten; denn u verbindet F mit F', u' verbindet E mit E'. Nehmen wir die beiden entsprechenden Punkte F_1 und F_1' unendlich nahe neben F und F' auf u, u', so ist F_1F_1' die Nachbartangente von $u = FF'$, also F_1, oder auf der Grenze F, der Schnittpunkt von u mit dieser Nachbartangente, der Berührungspunkt von u.

Die Träger u, u' der erzeugenden Punktreihen gehören auch zu den Tangenten der Kurve und werden von ihr in den Punkten F, E' berührt, welche dem Schnittpunkte uu' entsprechen.

Die involutorische Axe ist Berührungssehne für die Tangenten u, u'.

Der Kreis läßt sich auch auf diese Weise erzeugen. Es seien u, u' irgend zwei Tangenten desselben, welche in F, E' berühren, X, X' die Schnitte derselben mit einer beweglichen Tangente, so bleibt, wenn M der Mittelpunkt ist, der spitze Winkel der beiden Strahlen MX, MX' der Größe und dem Sinne nach fest; er ist die Hälfte des Winkels der Radien MF und ME'. Also beschreiben jene Strahlen zwei gleichlaufende gleiche Strahlenbüschel und schneiden in u und u' zwei projektive Punktreihen.

Fällt MX in MF oder MX' in ME', so fällt MX', bzw. MX in den Strahl von M nach dem Schnittpunkt uu', so daß dieser F', bzw. E ist.

1) Den Begriff Klasse hat Gergonne eingeführt.

Wir schließen wie oben, daß jeder Kegelschnitt ebenso erzeugt werden kann; und für eine durch eine analytische Gleichung 2. Grades in Linienkoordinaten definierte Kurve gilt das nämliche.

Es seien U ein fester, X ein beweglicher Punkt eines Kreises, u, x die zugehörigen Tangenten, M der Mittelpunkt; so sind der Strahl UX und die Verbindungslinie von M mit dem Schnittpunkte ux rechtwinklig; also beschreiben sie gleiche (und gleichlaufende) Strahlenbüschel. Daher sind der von UX um U beschriebene Büschel und die von ux auf u beschriebene Punktreihe projektiv derartig, daß der Strahl aus U nach einem Punkte des Kreises und der Schnitt von u mit dessen Tangente entsprechend sind.

Dies Resultat ist projektiv und geht vom Kreis auf den Kegelschnitt über.

Sind zwei Punktreihen perspektiv, so zerfällt der Inbegriff der Verbindungslinien in zwei Strahlenbüschel als Ausartung einer Kurve 2. Klasse; der eine hat das Perspektivitätszentrum zum Scheitel, der andere den Schnittpunkt uu', bei dem, weil er sich selbst entspricht, der Verbindungsstrahl unbestimmt geworden ist und sich auf den ganzen Strahlenbüschel erweitert hat.

Zwei Punktreihen in ausgearteter Projektivität erzeugen ebenfalls ein Büschel- oder Punktepaar: das der beiden singulären Punkte.

Sind die beiden Punktreihen ähnlich, so gehört die unendlich ferne Gerade der Ebene zu den Tangenten (Parabel).

Durch Projektion übertragen wir die Ergebnisse in den Bündel und erhalten den Kegel 2. Ordnung als Erzeugnis zweier projektiven Ebenenbüschel um sich schneidende Axen, den Kegel 2. Klasse als Erzeugnis projektiver Strahlenbüschel aus demselben Scheitel. Dort sind erzeugende Elemente die Kanten als Schnittlinien entsprechender Ebenen: in jeder Ebene des Bündels liegen zwei reelle oder imaginäre; hier sind es die Berührungsebenen als Verbindungsebenen entsprechender Strahlen; durch jeden Strahl des Bündels gehen zwei.

Im ersteren Falle sind die Ebenen, welche der gemeinsamen Ebene der Büschel entsprechen, Tangentialebenen des Kegels längs der Axen; im zweiten Falle berühren die Ebenen der Strahlenbüschel den Kegel längs derjenigen Strahlen, welche dem gemeinsamen Strahle entsprechen.

Und umgekehrt kann man von den Kegeln zu den Kurven durch Schnitt übergehen.

§ 15. Fortsetzung. Die Regelschar.

Nun bleiben die drei Fälle im Raume. Beliebig im Raume ge- 94
legene projektive Strahlenbüschel führen zu nichts, weil entsprechende Strahlen im allgemeinen sich nicht schneiden. Die beiden andern Fälle sind: projektive Ebenenbüschel um windschiefe Axen, projektive Punktreihen auf windschiefen Trägern.

Im ersteren Falle, wo die Axen l, l' seien, sind erzeugende Elemente die Schnittlinien g entsprechender Ebenen, welche alle die beiden Axen treffen und daher untereinander windschief sind, weil dies für l und l' gilt. Aber sie haben nicht bloß diese Leitgeraden, sondern einfach unendlich viele. Denn nehmen wir drei von den g; sie mögen a, b, c heißen, als Schnittlinien $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$. So wissen wir, es gibt (Nr. 34) eine Regelschar $[abc]$, zu der offenbar l, l' gehören. Sei l'' eine beliebige dritte Gerade derselben, so trifft dieselbe nicht bloß a, b, c, sondern jede g, etwa $x = \xi\xi'$. Die beiden entsprechenden Würfe $\alpha\beta\gamma\xi$ und $\alpha'\beta'\gamma'\xi'$ schneiden in l'' zwei Punktwürfe gleichen Doppelverhältnisses ein; aber α und α', β und β', γ und γ' schneiden in denselben Punkten, denen, wo a, b, c die l'' treffen, also müssen auch die Schnitte von ξ und ξ' mit l'' dieselben sein, weil durch das Doppelverhältnis der vierte Punkt eindeutig bestimmt ist; d. h. l'' wird von x getroffen.

Der Inbegriff der Geraden g ist also die Regelschar $[ll'l'']$. Jede Gerade l, welche drei von den Geraden g schneidet, schneidet auch die übrigen.

Damit sind wir zu der Fundamental-Eigenschaft verbundener Regelscharen, unter Benutzung von Doppelverhältnissen, gelangt. In Nr. 49 haben wir sie, ohne jede metrische Eigenschaft, allein auf Grund von Lageneigenschaften erhalten.

Gehen wir jetzt von der Entstehung der Regelschar $[ll'l'']$ aus drei Leitgeraden aus. Wir erhielten in Nr. 34 die Geraden g der Regelschar, indem wir einen beweglichen Punkt einer der drei Leitgeraden, etwa der l'', mit l und l' durch Ebenen verbanden und diese Ebenen schnitten. Dadurch machen wir die beiden Ebenenbüschel l, l' perspektiv zur Punktreihe auf l'', also untereinander projektiv, und wir haben die Regelschar als Erzeugnis projektiver Ebenenbüschel.

Wir erzeugten aber die Regelschar $[ll'l'']$ noch in einer zweiten dualen Weise; wir schnitten irgend eine Ebene durch l'' mit l, l' und verbanden die Schnittpunkte. Dadurch werden die Punktreihen auf l, l' perspektiv zu dem Ebenenbüschel l'', also untereinander projektiv; die Regelschar wird so das Erzeugnis der Verbindungsstrahlen entsprechender Punkte projektiver Punktreihen. Und wenn wir wieder zur Erzeugung durch die projektiven Ebenenbüschel um l, l' zurückgehen,

so können wir aus dieser direkt die duale Erzeugung ableiten. Jeder von diesen Büscheln schneidet in die andere Axe eine Punktreihe ein; und diese Punktreihen sind infolgedessen projektiv. Wenn X' auf l' und X auf l von den entsprechenden Ebenen ξ und ξ' von l und l' herrühren, so sind sie in dieser Projektivität entsprechend. Aber X sowohl wie X' liegen in beiden Ebenen ξ, ξ'; daher ist $XX' \equiv \xi\xi'$; die Verbindungslinien entsprechender Punkte der Punktreihen sind identisch mit den Schnittlinien entsprechender Ebenen der Büschel. Es entsteht beidemal die nämliche Regelschar.

Und umgekehrt kann man auch von dieser Erzeugung durch projektive Punktreihen ausgehen.

Wir haben also drei Erzeugungsweisen der Regelschar:

1. als Inbegriff der Geraden, die sich auf drei windschiefe Geraden stützen,

2. als Inbegriff der Schnittlinien entsprechender Ebenen projektiver Ebenenbüschel um windschiefe Axen,

3. als Inbegriff der Verbindungslinien entsprechender Punkte projektiver Punktreihen auf windschiefen Trägern.

Jede der drei Erzeugungen läßt sich in die beiden andern umwandeln.

Die Leitgeraden von 1., die Axen von 2., die Träger von 3. gehören zur Leitschar und sind beliebige Geraden derselben.

Eine Regelschar kann also auf ∞^3 Weisen nach 1., auf ∞^2 Weisen nach 2. oder 3. erzeugt werden.

Zu jeder Gerade l der einen Regelschar gibt es eine parallele in der andern; denn sind l', l'' zwei andere Geraden jener Schar, so kommt eine g aus dem unendlich fernen Punkte von l, die Schnittlinie der beiden Ebenen durch l', l'', welche zu l parallel sind.

95 Mit jedem Punkt, jeder Ebene einer Gerade der einen von zwei verbundenen Regelscharen ist eine Gerade aus der andern inzident, die Gerade durch den Punkt, in der Ebene, welche irgend zwei Geraden der ersteren Schar, und damit alle, trifft.

Die Ebenenbüschel um zwei Gerade l, l' der einen Schar sind so projektiv, daß zwei Ebenen sich entsprechen, welche nach derselben g gehen; denn sie gehen dann nach dem Punkte gl'', wo l'' irgend eine dritte Gerade der ersteren Schar ist; und beide Ebenenbüschel projizieren die Punktreihe auf l''.

Ebenso sind die Punktreihen auf l, l' projektiv mit den von derselben g herrührenden Punkten lg, $l'g$ als entsprechenden; denn diese Punkte liegen in der Ebene $l''g$, und die beiden Punktreihen werden durch den Ebenenbüschel l'' eingeschnitten.

Demnach sind alle Ebenenbüschel von $l, l', l'', \ldots$ untereinander projektiv mit entsprechenden Ebenen $lg, l'g, l''g \ldots$, ebenso

alle Punktreihen auf l, l', l'', ... mit entsprechenden Punkten lg, $l'g$, $l''g$, ..., endlich jede Punktreihe auf einer l und jeder Ebenenbüschel um eine l', wobei sich Punkt lg und Ebene $l'g$ entsprechen; sie sind sogar perspektiv, wenn die beiden l verschieden sind. Dasselbe gilt für die Ebenenbüschel um g, g', g'', ... und die Punktreihen auf ihnen.

Wir erhalten so zwei Scharen von projektiven Ebenenbüscheln um die Geraden der einen und der andern Regelschar. Entsprechende Ebenen der Büschel der einen Schar bilden einen Büschel der andern. Reye nennt sie[1]) sich stützende Scharen von projektiven Ebenenbüscheln. Ingleichen ergeben sich zwei sich stützende Scharen von projektiven Punktreihen auf den Geraden der einen und der andern Regelschar; entsprechende Punkte der Reihen der einen Schar bilden eine Reihe der anderen.

Durch drei Leitgeraden l, l', l'' oder drei Geraden aus der Leitschar ist die Regelschar eindeutig bestimmt und wurde mit $[l\ l'\ l'']$ bezeichnet; sie ist aber auch durch drei Geraden g, g', g'' aus ihr selbst eindeutig bestimmt; denn diese bestimmen als Leitgeraden die Leitschar der l und drei aus dieser, gleichgültig welche, die Regelschar der g. Für diese Bestimmung einer Regelschar durch drei ihr selbst angehörige Geraden sei die Bezeichnung $(gg'g'')$ angewandt.

Beide Regelscharen der g und der l werden von der- 96
selben Oberfläche getragen: die Schnittpunkte gl sind die Punkte derselben; in jedem ihrer Punkte schneiden sich zwei Geraden aus verschiedenen Scharen.

Jede durch gerade Linien erzeugte Fläche heißt Regelfläche; unsere Fläche — und sie allein — ist in zweierlei Weise Regelfläche, denn jede von den beiden Regelscharen füllt die Fläche schon aus[2]).

Auf einer Gerade m entstehen durch zwei projektive Ebenenbüschel, welche die eine Regelschar erzeugen, konjektive Punktreihen. Die Koinzidenzpunkte sind Punkte, in denen eine Schnittlinie entsprechender Ebenen die Gerade m trifft, also Schnitte der Fläche mit m. Folglich ist die Trägerfläche 2. Ordnung.

Insofern aber zwei Geraden einer Regelschar die m treffen, sagt man auch: die Regelschar ist eine Regelfläche 2. Grades.

---

1) Journal f. Mathem., Bd. 104, S. 213.

2) Diese in zwei Weisen als Regelfläche sich ergebende Fläche wurde zuerst am Ende des 18. Jahrhunderts in der polytechnischen Schule von Paris (unter Monge) gefunden; während der spezielle Fall des geradlinigen Rotationshyperboloides schon durch Wren im 17. Jahrhundert bekannt wurde. — Klassisch ist Steiners Darstellung der beiden Regelscharen in der Systematischen Entwickelung (Bd. I der Gesammelten Werke) Nr. 50 ff.

Nicht jede Fläche 2. Ordnung hat zwei reelle Regelscharen; die einzige von den drei allgemeinen Flächen 2. Ordnung: Ellipsoid, einmanteliges (hyperbolisches) Hyperboloid, zweimanteliges (elliptisches) Hyperboloid, welche reelle Geraden hat, ist die mittlere; so lange wir mit den andern beiden noch nicht zu tun haben, kann der Name „Hyperboloid" ohne Zusatz genügen; wir ziehen jedoch vor: Trägerfläche einer Regelschar (und der verbundenen). Einen Spezialfall werden wir bald zu erwähnen haben.

Wir fanden: Zwei Geraden einer Regelschar $[l, l' \ l'']$ treffen eine beliebige Gerade l'''; also:

Vier beliebige Geraden l, l', l'', l''' haben zwei (reelle oder imaginäre) Treffgeraden.

Dieser Satz stellt sich als Analogon neben die beiden — freilich wesentlich einfacheren — Sätze: Drei Ebenen haben einen Punkt, drei Punkte haben eine Ebene gemein, unterscheidet sich aber auch wesentlich von ihnen. Bei diesen haben wir die Anzahl 1 und immer Realität, beim jetzigen Satze die Anzahl 2 und eventuell Imaginarietät.

Die Konstruktion der beiden Treffgeraden hat zuerst Steiner[1]) gelehrt.

Wir wissen, die beiden mit der Punktreihe auf l'' perspektiven und untereinander projektiven Ebenenbüschel um l, l' schneiden in l''' konjektive Punktreihen ein; deren Koinzidenzpunkte sind die Schnitte der Trägerfläche von $[ll'l'']$ mit l'''; durch sie sind die Geraden nach zweien der Geraden l, l', l'' zu ziehen; das sind die Treffgeraden. Wir stellen also, drei Punkte von l'' mit l, l' verbindend, drei Paare entsprechender Ebenen her, die mit l''' in A, A'; B, B'; C, C' geschnitten werden, und haben es mit der fundamentalen quadratischen Aufgabe zu tun, deren — ebenfalls Steiner zu verdankende — Lösung wir bald geben werden:

Von zwei konjektiven Gebilden sind drei Paare entsprechender Elemente gegeben; die Koinzidenzelemente (ev. eine repräsentierende Involution) zu konstruieren.

Wir kommen auf dieselbe Fundamentalaufgabe, wenn wir eine Kurve 2. Ordnung mit einer Gerade ihrer Ebene schneiden, an eine Kurve 2. Klasse aus einem Punkte der Ebene die Tangenten ziehen oder die entsprechenden Aufgaben am Kegel 2. Ordnung, bzw. 2. Klasse lösen wollen.

Weil l, l', l'', l''' zwei Treffgeraden besitzen, so haben die beiden Regelscharen $[ll'l'']$ und $[ll'l''']$ zwei Geraden gemein; den Regelscharen $(ll'l'')$ und $(ll'l''')$ sind l und l' gemeinsam. Also:

Wenn zwei Regelscharen zwei Geraden gemeinsam haben, so gilt dies auch für die ihnen verbundenen Regelscharen.

---

1) Gesammelte Werke, Bd. I, S. 147, S. 402.

Werden die beiden projektiven Ebenenbüschel, welche eine Regelschar erzeugen, mit einer Ebene geschnitten, so ergeben sich projektive Strahlenbüschel. 97

Der Schnitt einer Regelschar, zugleich aber auch der Trägerfläche und der verbundenen Regelschar mit einer Ebene ist eine Kurve 2. Ordnung.

Von dieser Kurve ist klar, daß sie durch projektive Strahlenbüschel um jede zwei ihrer Punkte erzeugt werden kann, weil die Regelschar durch projektive Ebenenbüschel um jede zwei beliebigen Geraden der Leitschar erzeugt wird und durch jeden Punkt der Kurve eine Gerade der Leitschar geht.

Wir sagten schon, die ∞^2 Punkte gl sind die Punkte der Trägerfläche. Was sind die ∞^2 Ebenen gl für diese Fläche? Jede durch eine g oder l gehende Ebene ist eine solche Ebene, enthält eine l oder g.

Wir betrachten eine solche Ebene $\tau = gl$; U sei der zugehörige Schnittpunkt gl, durch ihn legen wir einen ebenen Schnitt in ε; die Regelschar der g werde durch die projektiven Ebenenbüschel erzeugt: um die in unserer Ebene τ liegende l und um irgend eine zweite l', deren Spur in der Ebene ε U' sei; in ihnen entsprechen sich unsere Ebene lg und die Ebene $l'g$. Der Schnitt wird erzeugt durch projektive Strahlenbüschel um U, U', in denen die Schnitte mit den Ebenen lg und $l'g$ entsprechend sind; letzterer ist $U'U$, denn U' und U sind die Spuren von l' und g in der Ebene ε. Folglich ist ersterer die Tangente in U an die Schnittkurve. Für jede durch U gehende ebene Schnittkurve der Trägerfläche ist die Schnittlinie mit τ die Tangente in U; folglich ist τ die Berührungsebene von U.

Die Ebenen gl sind die Berührungsebenen der Trägerfläche, und jede berührt im zugehörigen Punkte gl.

Das sind Berührungsebenen, welche die Fläche schneiden: je in dem Geradenpaare gl, und unterscheiden sich dadurch wesentlich von Berührungsebenen, wie sie z. B. die Kugel hat.

Die Zahl der Berührungsebenen durch eine gegebene Gerade m ist die Zahl der Ebenen durch m, welche eine g enthalten, denn dann enthalten sie auch eine l, also die Zahl der Geraden g, welche m schneiden, mithin 2.

Diese Zahl der Tangentialebenen einer Fläche, die durch eine Gerade gehen, ist die Klasse der Fläche. Die Trägerfläche ist also 2. Klasse. Aber unsere Betrachtung lehrt uns, daß bei ihr die drei Fragen nach der Ordnung, der Klasse der Trägerfläche und nach dem Grade der Regelschar als Regelfläche identisch sind.

Verbinden wir einen Punkt O mit allen Geraden der einen Regelschar, etwa den g, so erhalten wir, da jede der

Ebenen auch eine l enthält, gleichzeitig auch die Ebenen, welche O mit den Geraden l verbinden, eben die durch den Punkt O gehenden Berührungsebenen der gemeinsamen Trägerfläche. Wir denken uns nunmehr die Regelschar erzeugt durch projektive Punktreihen auf l, l'; jede g verbindet zwei entsprechende Punkte; die Ebene, welche sie mit O verbindet, enthält die Strahlen, welche diese Punkte aus O projizieren, also entsprechende Strahlen der beiden projektiven Strahlenbüschel mit gemeinsamem Scheitel O, durch welche die Punktreihen aus O projiziert werden. Demnach umhüllen unsere Ebenen einen Kegel 2. Klasse.

Der der Trägerfläche aus einem Punkte umgeschriebene Berührungskegel ist 2. Klasse.

Auch dieser Kegel 2. Klasse kann durch projektive Strahlenbüschel in zwei beliebigen seiner Berührungsebenen erzeugt werden, weil die Regelschar durch projektive Punktreihen auf irgend zwei Geraden der Leitschar hervorgebracht werden kann.

Zieht man einen Strahl durch den Scheitel des Kegels, so sieht man unmittelbar, daß die Klasse des Kegels, die Zahl seiner Berührungsebenen durch diesen Strahl, mit der Klasse der Fläche gleich sein muß, ebenso wie die Ordnung eines ebenen Schnittes mit der Ordnung der Fläche gleich ist.

Wir machen uns nun klar, daß jede durch O gehende Berührungsebene gl der Fläche den Berührungskegel längs des Strahles von O nach dem zugehörigen Berührungspunkte gl tangiert. Das ist dual zu dem obigen Satze, daß die Tangente in einem Punkte gl an eine durch ihn gehende Schnittkurve in der zugehörigen Ebene gl liegt. In der Tat, wir erzeugen die Regelschar der g durch projektive Punktreihen, von denen die eine auf der in der betrachteten Ebene gl liegenden l sich befindet, die andere auf einer beliebigen zweiten l'; so sind entsprechend in ihnen die Punkte lg und $l'g$. Die Büschel, welche den Berührungskegel erzeugen, liegen in den Ebenen Ol, Ol', von denen erstere gl ist. In ihnen sind entsprechend die Strahlen von O nach lg und $l'g$. Der zweite Strahl aber ist Schnittlinie beider Trägerebenen, denn beide Punkte O und $l'g$ liegen in beiden Ebenen, letzterer als Punkt von g in Olg, als Punkt von l' in Ol'. Also ist der erstere die Kante, längs deren der Kegel von der Trägerebene $Ol = gl$ berührt wird.

98 Wir wollen nunmehr beweisen, daß die zu den Berührungsebenen gl des Tangentialkegels aus O gehörigen Punkte gl alle in einer Ebene liegen und daher die Schnittkurve 2. Ordnung erzeugen. Die Geraden g und l je in einer dieser Berührungsebenen mögen zugeordnet heißen. Eine feste Berührungsebene des Kegels mit den Geraden g_0, l_0 wird von den andern Berührungsebenen des Kegels in einem Strahlenbüschel geschnitten (dem erzeugenden in der

Ebene Ol_0, wenn wir die Regelschar durch die Punktreihe auf l_0 und einer andern l erzeugen); und wo ein Strahl dieses Büschels die l_0 und g_0 trifft, da werden diese Geraden geschnitten bzw. von der g und der l in der Berührungsebene, von welcher der Strahl herrührt. Somit werden die Reihen der Punkte l_0g, g_0l zu diesem Strahlenbüschel und untereinander perspektiv.

Jetzt seien zunächst drei Berührungsebenen des Kegels $l'g'$, $l''g''$, $l'''g'''$ betrachtet, also drei Paare zugeordneter Geraden. Die drei Berührungspunkte $l'g'$, $l''g''$, $l'''g'''$ mit der Trägerfläche bestimmen eine Ebene ω, in der auch die Berührungspunkte der anderen Tangentialebenen des Kegels liegen sollen. In der Tat, wir projizieren aus l' und g' bzw. zugeordnete Geraden g und l, so ergeben sich zwei projektive Ebenenbüschel; denn zwei solche Ebenen $l'g$, $g'l$ gehen nach den Punkten l_0g, g_0l, die in der obigen Perspektivität entsprechend sind. Schneiden wir diese projektiven Ebenenbüschel mit der Ebene ω, so erhalten wir projektive Strahlenbüschel, welche denselben Scheitel haben, den Punkt $g'l'$, in dem beide Axen die ω treffen. In diesen konjektiven Strahlenbüscheln decken sich dreimal entsprechende Strahlen und daher alle, denn erstens ist in den Ebenenbüscheln die Ebene $l'g' \equiv g'l'$ sich selbst entsprechend und das gilt daher auch für den eingeschnittenen Strahl; für die Ebenen $l'g''$ und $g'l''$ fällt die Schnittlinie, welche die Punkte $l'g'$, $l''g''$ verbindet, in die Ebene ω, wir haben einen zweiten sich selbst entsprechenden Strahl, und die Ebenen $l'g'''$, $g'l'''$ liefern einen dritten. Daher schneiden jede zwei entsprechenden Ebenen $l'g$, $g'l$ die ω in demselben Strahle, also fällt ihre Schnittlinie und damit der Punkt gl in ω.

Die Berührungsebenen der Trägerfläche in den Punkten des Schnitts einer Ebene ω gehen durch einen Punkt O und umhüllen deshalb einen Kegel 2. Klasse. Wir können dies dual beweisen oder kürzer so: Die Berührungsebenen von drei Punkten des Schnitts haben einen Punkt O gemeinsam; die ebene Berührungskurve des Tangentialkegels aus O enthält die drei Punkte; ihre Ebene ist also mit ω identisch, die Kurve mit der gegebenen Kurve.

Es wird so, in bezug auf die Trägerfläche verbundener Regelscharen, jedem Punkte O eine Ebene ω und jeder Ebene ω ein Punkt O eindeutig zugeordnet, welche Pol und Polarebene bezüglich der genannten Fläche heißen.

Eine durch zwei projektive Strahlenbüschel derselben Ebene er- 99
zeugte Kurve 2. Ordnung liege vor; wir legen durch die Scheitel der Büschel zwei windschiefe Geraden, ans denen die Büschel durch projektive Ebenenbüschel projiziert werden. Die durch diese erzeugte Regelschar und ihre Trägerfläche geht durch die gegebene Kurve. Daher gilt für jede durch zwei projektive Strahlenbüschel er-

zeugte Kurve 2. Ordnung, daß sie aus jeden zwei ihrer Punkte in dieser Weise erzeugt werden kann. Der längs der Kurve der Trägerfläche umgeschriebene Kegel ist 2. Klasse und kann durch projektive Strahlenbüschel aus dem Scheitel erzeugt werden; seine Berührungsebenen gehen durch die Tangenten der gegebenen Kurve. Folglich umhüllen diese Tangenten eine Kurve 2. Klasse (den Schnitt des Kegels), welche durch projektive Punktreihen erzeugt werden kann, die von jenen Strahlenbüscheln herrühren.

Jede Kurve, welche durch projektive Strahlenbüschel erzeugt wird, kann auch durch projektive Punktreihen erzeugt werden.

Es liege nunmehr ein Kegel 2. Klasse vor, erzeugt durch zwei projektive Strahlenbüschel; in deren Ebenen lege man bzw. zwei windschiefe Geraden. Auf ihnen entstehen durch die Büschel projektive Punktreihen, und der Trägerfläche der Regelschar, welche durch sie erzeugt wird, ist unser Kegel umgeschrieben.

Wir sehen, daß jeder durch projektive Strahlenbüschel erzeugte Kegel 2. Klasse aus jeden zwei Berührungsebenen so erzeugt werden kann.

Die Berührungskurve unseres Kegels ist eine ebene Kurve 2. Ordnung, welche durch projektive Strahlenbüschel erzeugt wird; jede Berührungsebene des Kegels berührt ihn längs des Strahls vom Scheitel nach dem Berührungspunkte der Ebene mit der Fläche; die Kanten des Kegels gehen daher durch die Punkte der Kurve; der Kegel ist also 2. Ordnung und kann durch projektive Ebenenbüschel erzeugt werden.

Jeder Kegel, welcher durch projektive Strahlenbüschel erzeugt wird, kann auch durch projektive Ebenenbüschel erzeugt werden.

Jene Ergebnisse übertragen sich durch Projektion auf den Kegel 2. Ordnung, diese durch Schnitt auf die Kurve 2. Klasse.

Damit ist der sogenannte Identitätsbeweis — und zwar durch räumliche Betrachtungen — geführt.

Weil nun bei unsern Kurven und Kegeln und der Trägerfläche verbundener Regelscharen die Ordnung mit der Klasse übereinstimmt, heißen sie 2. Grades.

Es sind also die Kegelschnitte der Alten solche Kurven 2. Grades. Bemerken wir, daß in diesem Worte der Bestandteil „Kegel“ nur die Bedeutung „Kegel 2. Grades“ hat, während es auch Kegel höherer Ordnung und Klasse gibt. Es ist also nicht jeder ebene Schnitt [..]es Kegels ein Kegelschnitt im Sinne der Alten, sondern nur der [..]s Kegels 2. Grades.

Wir wollen schon jetzt das Wort „Kegelschnitt“ gleichbedeutend mit „Kurve 2. Grades“ gebrauchen, d. h. für jede Kurve, die durch projektive Strahlenbüschel oder projektive Punktreihen erzeugt wird. Wenn bewiesen sein wird, daß jede solche Kurve in einen Kreis projiziert werden kann, ist die Übereinstimmung mit der Terminologie der Alten festgestellt.

Je nachdem ein Kegelschnitt die unendlich ferne Gerade in zwei getrennten reellen Punkten trifft, sie berührt oder imaginär schneidet, heißt er — mit den Namen, die ebenfalls aus dem Altertum stammen — Hyperbel, Parabel, Ellipse. Die zu den unendlich fernen Punkten der Hyperbel gehörigen Tangenten heißen — ebenfalls mit dem Namen der Alten — Asymptoten; bei der Ellipse sind sie imaginär.

Nehmen wir an, die beiden projektiven Punktreihen l, l', durch 100
welche eine Regelschar entsteht, seien ähnlich[1]); dann gehört zur Regelschar eine unendlich ferne Grade g_∞, welche die einander entsprechenden unendlich fernen Punkte der Punktreihen verbindet, und die Punktreihen auf je zwei Geraden der Leitschar sind ähnlich. Durch zwei von den Geraden der Regelschar lege man die beiden Parallelebenen und schneide dann mit den weiteren Ebenen von dieser Stellung die Geraden l, l'; es entstehen dadurch ersichtlich ähnliche Punktreihen, welche mit den gegebenen zwei Paare entsprechender Punkte gemein haben, also identisch sind (Nr. 63). Mithin liegt jede Gerade g unserer Regelschar in einer dieser parallelen Ebenen. Diese durch die g gehenden parallelen Ebenen heißen deshalb die Leitebenen der Regelschar im vorliegenden Spezialfalle. Die unendlich ferne Axe dieses Ebenenbüschels wird also von allen Geraden g getroffen und gehört zur Leitschar: l_∞. Alle l der Leitschar müssen aber auch die Gerade g_∞ der Regelschar treffen; folglich liegen sie in den Ebenen des Büschels, welcher g_∞ zur Axe hat, und diese Ebenen sind die Leitebenen für die Geraden l. Weil unter diesen Geraden sich auch eine unendlich ferne befindet, sind auch die Punktreihen auf den Geraden g ähnlich.

Wenn die eine von zwei verbundenen Regelscharen eine unendlich ferne Gerade enthält, so gilt dies auch für die andere; und die Projektivität der Punktreihen auf den einen wie auf den andern Geraden ist Ähnlichkeit.

Mit dem später zu entwickelnden Begriff der unendlich fernen Ebene des Raumes folgt aus dem Satz, daß jede Ebene durch eine Gerade der einen von zwei verbundenen Regelscharen eine Gerade der andern enthält, aus der Existenz einer unendlich fernen Gerade in der einen Schar, zu deren Ebenenbüschel ja die unendlich ferne Ebene

1) Steiner, Gesammelte Werke, Bd. I, Systematische Entwickelung, Nr. 52.

gehört, das Vorhandensein einer solchen Gerade auch in der andern Schar.

Die Trägerfläche heißt in diesem besonderen Falle **hyperbolisches Paraboloid**; die unendlich ferne Ebene befindet sich unter seinen Berührungsebenen.

Jede Richtung in einer der Leitebenen ist durch eine Gerade der betreffenden Regelschar vertreten; denn durch jeden Punkt von l_∞ bzw. g_∞ geht eine Gerade g oder l. Projiziert man parallel auf eine Ebene durch Strahlen, welche parallel etwa den Leitebenen der g sind, so werden diese Geraden g in parallele Strahlen projiziert, die Spuren der Leitebenen, die Geraden l aber in einen Büschel mit endlichem Scheitel, nämlich der Spur derjenigen Gerade g, welche die Richtung der Projektionsstrahlen hat. Sind diese aber zu den einen und den andern Leitebenen parallel, also zu ihren gegenseitigen Schnittlinien, die ja alle dieselbe Richtung haben: nach dem Punkte $g_\infty l_\infty$, so werden beide Regelscharen in Parallelstrahlenbüschel projiziert.

Sind die einen Leitebenen zu den andern normal — **gleichseitiges hyperbolisches Paraboloid** —, so sind die Senkrechten auf den einen parallel den andern. In jeder der beiden Regelscharen gibt es dann eine Gerade, die zu den Leitebenen der andern senkrecht ist und daher die Geraden dieser andern Schar rechtwinklig schneidet, das kürzeste Lot zwischen je zweien ist.

Am einfachsten kommt man zu der Figur zweier paraboloidischen Regelscharen, wenn man von einem windschiefen Vierecke $ABCD$ ausgeht, jedes Paar Gegenseiten mit den Ebenen schneidet, welche zu den andern Gegenseiten parallel sind, und die Schnittpunkte verbindet. Wir wollen uns mit Hilfe des Satzes von **Menelaus** klar machen, daß jede Gerade der einen Schar mit jeder der andern in einer Ebene liegt. Es seien E und G zwei entsprechende Punkte auf AB und DC, ebenso F und H auf BC und AD, so daß (auch dem Vorzeichen nach):

$$\frac{AE}{BE}=\frac{DG}{CG}, \quad \frac{BF}{CF}=\frac{AH}{DH}.$$

Die Diagonale AC liegt sowohl mit EF, als mit GH in einer Ebene, ihre Schnitte mit ihnen seien I und K, so hat man wegen des genannten Satzes (für die Dreiecke ABC und ADC):

$$1=\frac{AE}{BE}\cdot\frac{BF}{CF}\cdot\frac{CI}{AI}=\frac{AH}{DH}\cdot\frac{DG}{CG}\cdot\frac{CK}{AK},$$

also: $\frac{CI}{AI}=\frac{CK}{AK}$; d. h. I und K sind identisch; die Geraden EF und GH liegen in derselben Ebene, in der dann auch EG und FH gelegen sind.

Jede von den Leitebenen, welche die endlichen Strecken AB, DC trifft, schneidet das Tetraeder $ABCD$ in einem Parallelogramme, von

dem die zugehörige Regelschar-Gerade EG Diagonale ist; folglich halbiert der vom Viereck umschlossene Teil der Paraboloidfläche den Körperraum des Tetraeders $ABCD$.

Wenn auf drei von einem Punkte ausgehenden Geraden je zwei 101
Punkte liegen: A', A''; B', B''; C', C'', so gehören

$$A'B'',\ B'C'',\ C'A'';$$
$$A''B',\ B''C',\ C''A'$$

zu zwei verbundenen Regelscharen, oder dual, wenn durch drei Geraden einer Ebene je zwei Ebenen gehen: α', α''; β', β''; γ', γ'', so gilt dasselbe für die Schnittlinien

$$\alpha'\beta'',\ \beta'\gamma'',\ \gamma'\alpha'';$$
$$\alpha''\beta',\ \beta''\gamma',\ \gamma''\alpha'.$$

Auch die regelmäßigen Polyeder bieten einfache Beispiele von Geradengruppen, welche zu verbundenen Regelscharen gehören. Die 10 Kanten eines Dodekaeders, welche, wenn dasselbe auf eine Ebene (orthogonal) projiziert wird, die zu zwei Seitenflächen parallel ist, sich in den Umriß projizieren, gehören abwechselnd zu der einen und der andern von zwei verbundenen Regelscharen; und ebenso führt das Ikosaeder zu zwei Gruppen von je fünf Geraden aus verbundenen Regelscharen, wenn es auf eine Ebene projiziert wird, welche zu einer Hauptdiagonale normal ist; wiederum sind es die in den Umriß sich projizierenden Kanten.

Ein weiteres elementares Beispiel von Geraden aus verbundenen Regelscharen liefert ein beliebiges Tetraeder.

Die vier Höhen eines Tetraeders $ABCD \equiv \alpha\beta\gamma\delta$ sind vier Geraden einer Regelschar, und zur verbundenen Regelschar gehören die vier Lote auf den Ebenen in den Höhenpunkten ihrer Dreiecke.

Wir haben nachzuweisen, daß irgend eine von diesen Geraden jene Geraden trifft. Die Höhen seien $h_\alpha, \ldots h_\delta$ und diese Lote $p_\alpha, \ldots p_\delta$. Es ist p_δ zu h_δ parallel und trifft sie im Unendlichen; ferner die Ebene, welche durch h_α senkrecht zu δ gelegt ist, ist auch zu α senkrecht und daher zur Kante $\alpha\delta = BC$; also ist ihre Spur in δ die Höhe des Dreiecks aus A; folglich fällt p_δ, in dem Höhenpunkt, einem Punkte dieser Spur, errichtet, in diese Ebene und trifft h_α, und aus ähnlichen Gründen auch h_β und h_γ.

Es läßt sich leicht noch eine zweite Gruppe von vier Geraden aus der Leitschar nachweisen. Jede der vier Ecken besitzt einen Höhenstrahl $q_A, \ldots q_D$. In ihm laufen die drei Ebenen zusammen, welche durch die Kanten der Ecke senkrecht zu den Gegenflächen gelegt sind. Man ziehe an der Ecke D die beiden durch DA und DB gehenden Ebenen, welche auf α und β senkrecht sind; sie schneiden sich in einer durch D gehenden Gerade q_D. Eine auf

dieser Gerade senkrechte Ebene σ schneide die Ecke in $\mathfrak{ABC}$, so sind die beiden eben genannten Ebenen senkrecht zu $\alpha\sigma = \mathfrak{BC}$ und $\beta\sigma = \mathfrak{AC}$, also ihre Spuren in σ zwei Höhen von $\mathfrak{ABC}$ und der Spurpunkt von q_D der Höhenpunkt; die Ebene durch DC und die dritte Höhe in σ geht durch q_D. Die Gerade $\mathfrak{AB}$ ist normal zu q_D und der dritten Höhe, also zu dieser Ebene, und daher ist auch γ senkrecht zu ihr, d. h. die Ebene ist dritte Höhenebene des Dreikants.

Weil aber diese drei Höhenebenen durch A, B, C gehen und zu α, β, γ normal sind, so enthalten sie die Höhen h_α, h_β, h_γ, welche daher alle die gemeinsame Gerade q_D treffen; q_D und h_δ treffen sich in D. Die vier Höhenstrahlen gehören also zur zweiten Regelschar.

Im allgemeinen sind demnach die vier Höhen eines Tetraeders windschief zueinander.

Wenn aber in besonderem Falle zwei von ihnen sich treffen, h_α und h_β, so ist ihre Ebene senkrecht zu α und β, und daher zur Schnittlinie CD, welche dadurch normal wird zu der in dieser Ebene gelegenen Kante AB. Und umgekehrt, wenn AB und CD normal zueinander sind, so geht durch AB eine Ebene, welche normal zu CD ist, daher auch zu α, β und deshalb die beiden Höhen h_α, h_β in sich aufnimmt.

Also, wenn zwei Gegenkanten eines Tetraeders rechtwinklig zueinander sind, so schneiden sich die Höhen aus den Ecken der einen und diejenigen aus den Ecken der andern, im allgemeinen in zwei verschiedenen Punkten.

Die Höhen h_α, h_β liegen in der Ebene $\eta_{\alpha\beta}$ durch AB, welche senkrecht zu CD ist, h_γ, h_δ in derjenigen $\eta_{\gamma\delta}$ durch CD, welche senkrecht zu AB ist; die Schnittlinie dieser beiden Ebenen ist daher das gemeinsame Lot auf AB und CD. Auf dieser Schnittlinie liegen die beiden Schnittpunkte $H_{\alpha\beta}$, $H_{\gamma\delta}$. Denn es sei E der Punkt, in dem die Ebene $\eta_{\alpha\beta}$ die Kante CD schneidet und auf ihr senkrecht steht, so sind h_α, h_β zwei Höhen von ABE, $H_{\alpha\beta}$ der Höhenpunkt und die dritte Höhe steht als solche auf AB senkrecht und als Gerade von $\eta_{\alpha\beta}$ auf CD, ist also jene Schnittlinie, $H_{\alpha\beta}$ liegt auf ihr und ebenso $H_{\gamma\delta}$.

Wir lernen durch diesen Spezialfall, in welcher Weise Regelscharen ausarten können. Sie sind nämlich in Strahlenbüschel-Paare ausgeartet; diejenige, zu welcher die vier Höhen gehören, besteht aus den Büscheln $(H_{\alpha\beta}, \eta_{\alpha\beta})$, $(H_{\gamma\delta}, \eta_{\gamma\delta})$, die andere aus den Büscheln $(H_{\alpha\beta}, \eta_{\gamma\delta})$, $(H_{\gamma\delta}, \eta_{\alpha\beta})$; in der Tat treffen alle Strahlen der beiden Büschel des einen Paars alle Strahlen derjenigen des andern.

Man zeige, daß in dem Büschel $(H_{\alpha\beta}, \eta_{\gamma\delta})$ die Lote p_γ, p_δ und die Höhenstrahlen q_C, q_D und in dem Büschel $(H_{\gamma\delta}, \eta_{\alpha\beta})$ die p_α, p_β, q_A, q_B sich befinden.

Wegen der Rechtwinkligkeit von AB und CD sind auch die Ebenen $\eta_{\alpha\beta}$ und $\eta_{\gamma\delta}$ rechtwinklig.

Wenn noch zwei weitere Gegenkanten AC, BD rechtwinklig sind, so schneiden sich auch noch h_α und h_γ, h_β und h_δ; demnach treffen h_γ und h_δ, in $\eta_{\gamma\delta}$ gelegen, die Schnittlinie $\eta_{\alpha\beta}\eta_{\gamma\delta}$ dort, wo sie von h_α und h_β getroffen wird, die in $\eta_{\alpha\beta}$ liegen, d. h. in $H_{\alpha\beta}$, mit dem sich $H_{\gamma\delta}$ vereinigt. Alle vier Höhen gehen durch denselben Punkt H, und man erhält ein Tetraeder mit Höhenschnitt. Weil nun auch h_α und h_δ, h_β und h_γ sich schneiden, sind auch die dritten Gegenkanten AD und BC rechtwinklig. Die Ebene $\eta_{\gamma\delta}$ steht senkrecht auf AB, also auf γ und nimmt daher den Höhenstrahl q_D in sich auf, ihre Spur in δ ist die Höhe aus C; daher enthält sie, weil senkrecht auf δ, das Lot p_δ; dasselbe gilt für $\eta_{\beta\delta}$; das bedeutet, daß q_D und p_δ sich mit h_δ vereinigen.

Wenn zweimal zwei Gegenkanten eines Tetraeders rechtwinklig sind, so sind es auch die dritten. Die vier Höhen laufen durch einen Punkt, treffen die Seitenflächen in den Höhenpunkten und vereinigen sich mit den Höhenstrahlen der Ecken. Durch diesen Höhenschnitt gehen auch die drei gemeinsamen Lote auf den Gegenkanten; sie bilden das Diagonaldreikant des Vierkants der Höhen.

Das gilt beim regelmäßigen Tetraeder, aber nicht bloß bei demselben; es gibt vielmehr gestaltlich ∞^4 Tetraeder mit Höhenschnitt[1]).

§ 16. Die Kurve und der Kegel zweiten Grades und die Regelschar als projektiv beziehbare Gebilde.

Durch die im vorangehenden besprochenen Erzeugnisse wird das 102
Gebiet der projektiv beziehbaren Gebilde, als welche wir bis jetzt nur die (gerade) Punktreihe und die beiden Büschel hatten — die Grundgebilde —, erweitert. Die krumme Punktreihe auf einem Kegelschnitt, Punktreihe 2. Ordnung, wird aus jeden zwei Punkten desselben durch projektive Strahlenbüschel projiziert; und wir erhalten ∞^1 Strahlenbüschel, deren Scheitel die krumme Punktreihe ausfüllen und welche alle so projektiv sind, daß entsprechende Strahlen je nach demselben Punkte der Reihe hingehen. Die Strahlenwürfe, welche nach vier festen zu einem Wurfe angeordneten Punkten der krummen Punktreihe gehen, haben alle dasselbe Doppelverhältnis; man überträgt deshalb diesen Begriff, spricht vom Doppelverhältnisse des Wurfs in dieser Punktreihe 2. Ordnung und versteht darunter das konstante Doppelverhältnis der ∞^1 aus den Punkten der Reihe ihn projizierenden Strahlenwürfe; speziell hat man auch harmonische Würfe.

1) H. Vogt, Progr. des Friedr. Gymn. Breslau 1881.

Ferner, da die Punkte dieser Punktreihe eindeutig den Strahlen eines jeden dieser ∞^1 untereinander projektiven Büschel und den Strahlen die Punkte, als die zweiten Schnitte mit dem Kegelschnitte, zugeordnet sind, so ist man imstande, die Punktreihe 2. Ordnung auf ein anderes (projektiv beziehbares) Gebilde 𝔊 projektiv zu beziehen, indem man zunächst einen dieser Strahlenbüschel auf 𝔊 bezieht. Entspricht der Strahl x des Büschels dem Elemente X' von 𝔊, so wird dann der Punkt X der krummen Punktreihe, durch welchen x geht, dem X' zugeordnet. Auch hierbei haben entsprechende Würfe das nämliche Doppelverhältnis.

Was eben für die Punktreihe eines Kegelschnitts gesagt wurde, gilt auch für den Tangentenbüschel um ihn, Strahlenbüschel 2. Klasse; er macht die Punktreihen auf allen Tangenten des Kegelschnitts untereinander so projektiv, daß entsprechende Punkte von denselben Tangenten eingeschnitten werden. Das Doppelverhältnis eines Tangentenwurfs ist das konstante Doppelverhältnis des Wurfs, den seine vier Tangenten in irgendeine der Tangenten einschneiden.

Wiederum steht der Strahlenbüschel 2. Klasse in eindeutiger Beziehung zur Punktreihe auf einer Tangente u; denn jeder von seinen Strahlen schneidet in sie einen Punkt ein, und durch jeden Punkt der Tangente u geht eine zweite Tangente an den Kegelschnitt. Indem man zunächst diese Punktreihe auf ein anderes Gebilde projektiv bezieht, hat man auch den Büschel 2. Klasse projektiv bezogen.

Ähnliches gilt, wie der Übergang vom Felde in den Bündel lehrt, für die Kantenreihe eines Kegel 2. Grades und den Büschel der Tangentialebenen desselben (Kantenreihe 2. Ordnung, Ebenenbüschel 2. Klasse).

Ferner macht eine Regelschar alle Punktreihen auf den Geraden der Leitschar und alle Ebenenbüschel um sie projektiv. Vier Geraden aus ihr, zu einem Wurfe angeordnet, rufen Würfe von Punkten oder Ebenen hervor, alle von dem nämlichen Doppelverhältnis, welches dann das Doppelverhältnis des Wurfs in der Regelschar heißt.

Zu allen diesen Grundgebilden auf oder um Leitgeraden steht die Regelschar in eindeutiger Beziehung; ist l eine Leitgerade, so bestimmt jede g der Regelschar einen Punkt lg, oder eine Ebene lg, und umgekehrt durch jeden Punkt auf l geht eine g, jede Ebene durch l enthält eine g. Indem man die Punktreihe oder den Ebenenbüschel von l auf ein anderes Gebilde projektiv bezieht, bezieht man auch die Regelschar projektiv.

Wir können die Grundgebilde oder linearen Gebilde $𝔊_1$, mit Elementen die eines der neuen Gebilde $𝔊_2$ — die alle als Ge- 2. Grades bezeichnet werden können — inzident sind, per- iv zu ihm nennen; man hat eine parametrische Bestim-

mung in einem $\mathfrak{G}_2$, wenn man eine in einem perspektiven Gebilde $\mathfrak{G}_1$ herstellt und jedem Elemente von $\mathfrak{G}_2$ denselben Parameter gibt, wie dem inzidenten Elemente von $\mathfrak{G}_1$.

Es sind dann z. B. vier Elemente eines $\mathfrak{G}_2$ mit den Parametern λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 harmonisch, wenn:

$$\lambda_1 \lambda_2 + \tfrac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_3 + \lambda_4) + \lambda_3 \lambda_4 = 0;$$

denn die inzidenten Elemente des $\mathfrak{G}_1$ haben die nämlichen Parameter und sind auch harmonisch.

Wir können aber, nachdem für die neuen Gebilde der Begriff Doppelverhältnis definiert ist, direkt Doppelverhältnis-Parameter $(ABCX)$ einführen.

Für eine durch Projektion aus dem Kreise sich ergebende Kurve 103
2. Grades, den Kegelschnitt der Alten, haben wir uns schon klar gemacht (Nr. 93), daß, wenn U ein fester Punkt, X ein beweglicher Punkt derselben, u und x die zugehörigen Tangenten sind, der Büschel UX zu der Punktreihe ux projektiv ist, also, wie wir jetzt sagen können, die Punktreihe 2. Ordnung der X zu dem Büschel 2. Klasse der x, wo immer ein Punkt X und die zugehörige Tangente x entsprechend sind.

Beweisen wir es für die Kurve 2. Grades mit Hilfe der Regelschar und etwas allgemeiner, indem ein Punkt U und eine beliebige Tangente u' benutzt werden.

Durch die gegebene Kurve 2. Grades K sei, wie in Nr. 99, eine Regelschar G gelegt; ihre Ebene sei ω; längs K sei der Trägerfläche F der Kegel 2. Grades k, mit der Spitze O, umgeschrieben, eingehüllt von den Berührungsebenen der F in den Punkten von K. Es seien U, U' zwei beliebige Punkte auf K, l, l' die durchgehenden Leitgeraden, τ' die Tangentialebene von U', welche l' enthält und (Nr. 97) k längs OU' berührt, und u' die Tangente von K in U', die Schnittlinie $\omega\tau'$. Eine beliebige Gerade g aus G treffe K in X, die diesem Punkte zugehörige Berührungsebene sei ξ: sie enthält g, berührt k (längs OX); und ihr Schnitt mit ω ist die Tangente x von X an K. Wenn g die G durchläuft, werden der Ebenenbüschel lg und die Punktreihe $l'g$ perspektiv, wobei von derselben g herrührende Elemente entsprechend sind. Auf der Schnittlinie $\tau'\xi$ der beiden Berührungsebenen von k liegt die Kegelspitze O, ferner die Punkte $l'g$ und $u'x$; denn l' und u' liegen in τ', g und x in ξ. Während ξ mit g sich bewegt, durchläuft $\tau'\xi$ den Strahlenbüschel (O, τ').

Dieser Strahlenbüschel macht die Punktreihen der $l'g$ und $u'x$ auf l' und u' perspektiv; mit jener ist der Ebenenbüschel lg perspektiv, und dieser andererseits mit dem Strahlenbüschel UX in ω perspektiv; folglich sind der Strahlenbüschel UX und die Punktreihe $u'x$ projektiv, also der Strahlenbüschel um einen Punkt U von K und

die Punktreihe auf einer Tangente u', wobei ein Strahl und ein Punkt entsprechend sind, die mit einem Punkt X von K und der zugehörigen Tangente x inzidieren.

Demnach sind die Punktreihe 2. Ordnung der X und der Büschel 2. Klasse der x projektiv. Ein Punktwurf auf K und der zugehörige Tangentenwurf haben daher dasselbe Doppelverhältnis, sind z. B. zugleich harmonisch.

Sind also zwei Punktreihen 2. Ordnung auf demselben oder auf verschiedenen Kegelschnitten projektiv, so sind es auch die zugehörigen Büschel 2. Klasse, sodaß in entsprechenden Punkten entsprechende Strahlen tangieren; und umgekehrt.

Und ähnliches gilt beim Kegel 2. Grades.

Durch die nunmehr möglichen Projektivitäten kommen wir zu weiteren Erzeugnissen; wenn z. B. zwei projektive Punktreihen 2. Ordnung vorliegen, so haben wir, je nachdem sie in derselben Ebene liegen oder nicht, es mit der Enveloppe der Verbindungslinien entsprechender Punkte oder der durch diese erzeugten Regelfläche zu tun; doch soll darauf hier noch nicht eingegangen werden. Wir haben diese Frage nur angeregt, um einen Ausblick in das neu eröffnete Gebiet von Problemen zu gewähren.

104 Zwei von demselben Kegelschnitte K getragene projektive Punktreihen 2. Ordnung entstehen durch zwei projektive Strahlenbüschel U, U', deren verschiedene oder auch identische Scheitel auf K liegen, und werden aus zwei andern Punkten V und V' von K wiederum durch projektive Büschel projiziert; denn es sind nach Voraussetzung die Büschel U, U' projektiv, ferner U und V, welche dieselbe Punktreihe auf K projizieren, ebenso U' und V', also auch V und V'.

Ist U' mit U identisch, so sind die einschneidenden Büschel konjektiv, erhalten Koinzidenzstrahlen, welche dann die Koinzidenzpunkte der konjektiven Punktreihen auf K einschneiden. Wenn diese im besondern Falle mehr als zwei Koinzidenzen haben, so gilt dies auch für die beiden konzentrischen Büschel U; also deckt sich jeder Strahl des einen mit dem entsprechenden im andern, und dasselbe gilt dann für die konjektiven krummen Punktreihen. Also:

Zwei von demselben Kegelschnitte getragene projektive Punktreihen haben zwei Koinzidenzpunkte; und falls in besonderem Falle mehr, so decken sich durchweg entsprechende Punkte.

Wenn die konjektiven Büschel U involutorisch sind, so überträgt sich das durchgängige Entsprechen in beiderlei Sinne auf die krummen Punktreihen und von diesen wiederum in die Strahlenbüschel, die sie aus einem andern Punkte V von K projizieren. So erwächst der Begriff der Involution in der Punktreihe 2. Ordnung. Sie

wird eingeschnitten durch eine Strahleninvolution, deren Scheitel auf dem Träger liegt, und aus jedem Punkte desselben durch eine Involution projiziert.

Einmaliges Doppelt-Entsprechen zweier getrennter Punkte in zwei konjektiven Punktreihen 2. Ordnung bewirkt durchgängiges.

Ähnliche Betrachtungen gelten im Strahlenbüschel 2. Klasse. Ist der Kegelschnitt der nämliche, so führt eine Konjektivität in der Punktreihe zu einer in dem Tangentenbüschel und umgekehrt; in entsprechenden Punkten beberühren entsprechende Tangenten, in den Koinzidenzpunkten die Koinzidenzgeraden. Insbesondere bewirkt jede Involution der einen Art sofort eine von der andern Art.

Und durch Übergang vom Felde in den Bündel erhalten wir die entsprechenden Ergebnisse für den Kegel 2. Grades.

Ebenso machen wir eine Regelschar in sich projektiv, wenn wir eins der beiden von einer Gerade l der Leitschar getragenen Gebilde $\mathfrak{G}_1$ projektiv zu einem der von einer zweiten l' getragenen Gebilde machen; mit entsprechenden Elementen dieser Gebilde sind entsprechende in der Regelschar inzident.

Eine Involution auf l oder um l bewirkt Involution in der Regelschar und diese dann wieder Involution auf jeder andern Leitgerade und um sie.

Eine elliptische Involution in einer Regelschar ist dann der reelle Repräsentant der windschiefen konjugiert imaginären Doppelstrahlen.

Es seien zwei verbundene Regelscharen G und L zueinander 105
projektiv gemacht, etwa dadurch, daß zwischen den Ebenenbüscheln um l_0 und g_0 eine Projektivität hergestellt ist: entsprechende Geraden g und l liegen in entsprechenden Ebenen von l_0 und g_0. Wir haben es hier mit zwei Örtern zu tun, dem Orte der Schnittpunkte gl und dem Orte der Verbindungsebenen gl, also der Berührungsebenen jener Punkte mit der Trägerfläche F. Auf einem ebenen Schnitte K derselben entstehen durch die projektiven Regelscharen konjektive Punktreihen; denn es seien L_0, G_0, G, L die Spuren von l_0, g_0 und zwei entsprechenden Geraden g und l auf K, so sind $L_0 G$ und $G_0 L$ die Spuren der Ebenen $l_0 g$, $g_0 l$ in der Ebene von K; $l_0 g$, $g_0 l$ erzeugen nach Voraussetzung projektive Ebenenbüschel, also $L_0 G$, $G_0 L$ projektive Strahlenbüschel, daher G, L konjektive Punktreihen auf K.

Nun seien $g_1 l_1, g_2 l_2, g_3 l_3$ die Schnittpunkte von drei Paaren entsprechender Geraden aus G und L, und K der von ihrer Ebene ausgeschnittene Kegelschnitt; die von den Regelscharen auf ihm hervorgerufenen konjektiven Punktreihen haben in jenen drei Punkten drei Koinzidenzen, also sind sie identisch; d. h. zwei entsprechende Ge-

raden g und l treffen durchweg K in demselben Punkte und K ist der Ort der Punkte gl.

Daraus folgt dann, daß die Ebenen gl den Kegel k umhüllen, der der Trägerfläche F längs K umgeschrieben ist, und alle durch seinen Scheitel gehen, den Pol der Ebene von K.

Der Ort der Schnittpunkte entsprechender Geraden zweier verbundener Regelscharen, welche projektiv sind, ist ein ebener Schnitt der Trägerfläche, und die Verbindungsebenen umhüllen den zugehörigen Tangentialkegel.

Umgekehrt, jeder ebene Schnitt von F macht die beiden Regelscharen projektiv; denn stellen wir zwischen ihnen eine Projektivität her, derartig, daß wir dreimal Geraden sich entsprechen lassen, die sich auf der Kurve schneiden, so ist der bei dieser Projektivität sich ergebende ebene Schnitt mit dem gegebenen identisch, weil die Ebenen es sind.

Dual werden die beiden Regelscharen G und L projektiv, wenn man zwei solche Geraden einander zuordnet, die je in derselben Ebene eines Tangentialkegels liegen; sie schneiden sich ja auf der ebenen Berührungskurve desselben.

Zwei Würfe $g_1 g_2 g_3 g_4$, $l_1 l_2 l_3 l_4$ aus G und L mit demselben Doppelverhältnisse sind projektiv; d. h. in der Projektivität, in welcher g_1 und l_1, g_2 und l_2, g_3 und l_3 zugeordnet sind, sind es auch g_4 und l_4. Folglich liegen die Punkte $g_1 l_1, g_2 l_2, g_3 l_3, g_4 l_4$ in einer Ebene und die gleichnamigen Ebenen gehen durch einen Punkt.

Sind daher $g_1 l_1, \ldots g_4 l_4$ vier beliebige Punkte von F, also nicht in derselben Ebene gelegen, so ist der Wurf $g_1 g_2 g_3 g_4$ nicht zu $l_1 l_2 l_3 l_4$ projektiv, und die Doppelverhältnisse der Punkte oder Ebenen $l_0(g_1, g_2, g_3, g_4)$ und $g_0(l_1, l_2, l_3, l_4)$ sind nicht gleich.

106 Jetzt sei ein Kegelschnitt K gegeben und ω seine Ebene; durch ihn sei wiederum die Trägerfläche F zweier verbundener Regelscharen gelegt und derselben längs K der Tangentialkegel k mit der Spitze O, dem Pole von ω in bezug auf F, umgeschrieben. Wir können aber auch annehmen, daß k gegeben ist, die Trägerfläche eingeschrieben wird, und als Berührungskurve K sich ergibt. Wir sind so imstande, für einen beliebigen Kegelschnitt sowohl wie für einen beliebigen Kegel 2. Grades aus derselben Figur dual gegenüberstehende Eigenschaften abzuleiten.

Auf K sei eine Projektivität gelegt: $\Pi(K)$, in welcher die Punkte X und X' entsprechend sind; so entsteht sofort im Tangentialebenen-Büschel von k eine Projektivität $\Pi(k)$, in welcher die Berührungsebenen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}'$ von X und X' korrespondieren, und zugleich entsteht auch eine Projektivität zwischen den beiden Regelscharen, welche mit $\Pi(G,L)$ bezeichnet werde und in welcher die durch X gehende und

daher in ξ liegende Gerade $\mathfrak{x}$ aus der Schar G und die durch X' gehende und in ξ' liegende Gerade $\mathfrak{x}'$ aus der Schar L entsprechend sind.

In der Tat, es möge $\Pi(K)$ durch projektive Büschel um die Punkte L_0, G_0 von K entstanden sein; diese seien die Spuren der Geraden l_0, g_0 aus den Regelscharen, also $L_0 X$, $G_0 X'$ die Spuren der Ebenen $l_0 X$, $g_0 X'$ oder $l_0 \mathfrak{x}$, $g_0 \mathfrak{x}'$. Jene projektiven Büschel L_0, G_0 bewirken, daß diese Ebenenbüschel um l_0, g_0 projektiv werden, und diese wiederum bewirken es für die Regelscharen, wobei die in entsprechenden Ebenen liegenden Geraden $\mathfrak{x}, \mathfrak{x}'$ zugeordnet werden. Damit ist die zweite Behauptung bewiesen. Es seien weiter λ_0, γ_0 die zu L_0, G_0 gehörigen Berührungsebenen von F; sie berühren, weil L_0, G_0 auf K liegen, den Kegel k und enthalten l_0, g_0. Die projektiven Regelscharen G, L rufen nun auf l_0 und g_0 projektive Punktreihen hervor, in denen die Punkte $l_0 \mathfrak{x}$, $g_0 \mathfrak{x}'$ entsprechend sind. Diese machen die Strahlenbüschel aus O in den Berührungsebenen $\lambda_0 = O l_0$, $\gamma_0 = O g_0$ projektiv, und durch die entsprechenden Strahlen, die von O nach $l_0 \mathfrak{x}$, $g_0 \mathfrak{x}'$ gehen, gehen dann die Ebenen ξ, ξ', weil ξ durch O und $\mathfrak{x}$, also durch $l_0 \mathfrak{x}$ und ξ' durch O und $g_0 \mathfrak{x}'$ geht. Folglich ist der Tangentialebenenbüschel von k in sich projektiv geworden, vermittelst zweier projektiver Strahlenbüschel in zwei Tangentialebenen λ_0, γ_0, durch deren entsprechende Strahlen entsprechende Ebenen ξ, ξ' gehen. Und das ist die erste Behauptung.

Gehen wir von dieser Projektivität $\Pi(k)$ aus, so werden die genannten Strahlenbüschel (O, λ_0), (O, γ_0) projektiv, also die Punktreihen $l_0 \mathfrak{x}, g_0 \mathfrak{x}'$, daher die Regelscharen, folglich wiederum die Ebenenbüschel $l_0 \mathfrak{x}, g_0 \mathfrak{x}'$, dann die Strahlenbüschel G_0, L_0 in ω; und es entsteht auf K die Projektivität $\Pi(K)$.

Die Projektivität $\Pi(G, L)$, in der $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}'$ entsprechend sind, führt zu einem ebenen Schnitte K_1 von F in der Ebene σ, dem Orte der Punkte $\mathfrak{x}\mathfrak{x}'$, und zu dem zugehörigen Kegel k_1 mit der Spitze S, der von den zu den Punkten $\mathfrak{x}\mathfrak{x}'$ gehörigen Berührungsebenen $\mathfrak{x}\mathfrak{x}'$ eingehüllt wird. S und σ sind wiederum Pol und Polarebene nach F.

Da X auf $\mathfrak{x}$, X' auf $\mathfrak{x}'$ liegt, so sind die Verbindungslinien XX' die Spuren der Ebenen $\mathfrak{x}\mathfrak{x}'$ in ω und weil diese den Kegel k_1 umhüllen, so umhüllen die Verbindungslinien XX' entsprechender Punkte von $\Pi(K)$ den Kegelschnitt $\mathfrak{K}$, in welchem ω von k_1 geschnitten wird.

Weil $\mathfrak{x}$ in ξ, $\mathfrak{x}'$ in ξ' liegt und beide Ebenen durch O gehen, so ist die Schnittlinie $\xi\xi'$ mit der Gerade von O nach dem Punkte $\mathfrak{x}\mathfrak{x}'$ identisch; die Punkte $\mathfrak{x}\mathfrak{x}'$ erzeugen den Kegelschnitt K_1, folglich erzeugen die Schnittlinien $\xi\xi'$ entsprechender Ebenen von $\Pi(k)$ den Kegel 2. Grades $\mathfrak{k}$, der aus O den K_1 projiziert.

Wir bezeichnen die Schnittlinie $\omega\sigma$ mit s und die Verbindungslinie OS mit $\bar{s}$.

Nunmehr seien, neben X, X', Y und Y' zwei andere entsprechende Punkte von $\Pi(K)$, η, η' die zugehörigen Berührungsebenen von F,

entsprechend in $\Pi(k)$, und $\mathfrak{y}, \mathfrak{y}'$ die mit Y und η, bzw. Y' und η' inzidenten Geraden aus G und L, entsprechend in $\Pi(G,L)$. Es ist dann XY' die Spur, in ω, der Ebene $\mathfrak{x}\mathfrak{y}'$, YX' die von $\mathfrak{y}\mathfrak{x}'$, ihr Schnittpunkt (XY', YX') also die Spur der Schnittlinie $(\mathfrak{x}\mathfrak{y}', \mathfrak{y}\mathfrak{x}')$.

In beiden Ebenen $\mathfrak{x}\mathfrak{y}', \mathfrak{y}\mathfrak{x}'$ liegen beide Punkte $\mathfrak{x}\mathfrak{x}', \mathfrak{y}\mathfrak{y}'$; also ist diese Schnittlinie mit der Verbindungslinie $(\mathfrak{x}\mathfrak{x}', \mathfrak{y}\mathfrak{y}')$ identisch. Diese beiden Punkte liegen aber auf K_1 und σ; folglich muß der Punkt (XY', YX') auf der Schnittlinie $\omega\sigma = s$ liegen.

Die beiden Schnittlinien $\xi\eta', \eta\xi'$ von Berührungsebenen des Kegels k gehen durch die Spitze O, ferner beziehentlich durch die Punkte $\mathfrak{x}\mathfrak{y}', \mathfrak{y}\mathfrak{x}'$, deren Verbindungslinie also in die Verbindungsebene $(\xi\eta', \eta\xi')$ jener Schnittlinien fällt. Durch beide Punkte $\mathfrak{x}\mathfrak{y}', \mathfrak{y}\mathfrak{x}'$ gehen die Ebenen $\mathfrak{x}\mathfrak{x}', \mathfrak{y}\mathfrak{y}'$; also ist die Verbindungslinie der Punkte $\mathfrak{x}\mathfrak{y}', \mathfrak{y}\mathfrak{x}'$ mit der Schnittlinie der Ebenen $\mathfrak{x}\mathfrak{x}', \mathfrak{y}\mathfrak{y}'$ identisch. Diese Ebenen tangieren den Kegel k_1; folglich geht diese Linie durch die Spitze S, und die Ebene $(\xi\eta', \eta\xi')$, welche sie enthält, auch durch S, andererseits durch O, in dem sich die beiden durch sie verbundenen Geraden schneiden, demnach durch $OS = \bar{s}$. Wir haben zunächst folgende zwei räumlich dualen Sätze:

Wenn auf einer Kurve 2. Grades K zwei projektive Punktreihen liegen, so umhüllen die Verbindungslinien XX', YY',... entsprechender Punkte einen Kegelschnitt $\mathfrak{K}$. Ferner gibt es eine ausgezeichnete Gerade s — die Projektivitätsaxe —, auf welcher alle Punkte (XY', YX') liegen.

Wenn in dem Tangentialebenen-Büschel eines Kegels 2. Grades eine Projektivität sich befindet, so erzeugen die Schnittlinien $\xi\xi'$ entsprechender Ebenen einen Kegel 2. Grades $\mathfrak{k}$, und alle Ebenen $(\xi\eta', \eta\xi')$ gehen durch eine feste Gerade $\bar{s}$, die Axe dieser Projektivität.

Es sei M einer der beiden Koinzidenzpunkte von $\Pi(K)$, μ die Berührungsebene, also eine der Koinzidenzebenen von $\Pi(k)$, g, l die beiden Geraden der Regelscharen durch M und in μ, also entsprechend in $\Pi(G, L)$. Folglich liegt M auf K_1 und in σ, also auf s und μ berührt k_1 und geht durch S, daher durch $\bar{s}$.

Die beiden Koinzidenzpunkte M, N von $\Pi(K)$ liegen auf der Projektivitätsaxe s und sind ihre Schnitte mit K. Die beiden Koinzidenzebenen μ, ν von $\Pi(k)$ gehen durch die Projektivitätsaxe $\bar{s}$ und sind die Tangentialebenen aus ihr an k.

Ferner, μ schneidet ω in der Tangente von M an K; weil M auf K_1 liegt, so berührt μ den Kegel k_1 und zwar längs SM; also ist ihr Schnitt mit ω auch Tangente an $\mathfrak{K}$ in M.

Die Kurven K und $\mathfrak{K}$ berühren sich in den Koinzidenzpunkten M, N von $\Pi(K)$.

Die Ebene μ berührt k längs OM; die Tangente ferner an K_1 in M liegt in der Berührungsebene μ; folglich wird μ auch Berührungsebene längs OM für den Kegel $\mathfrak{k}$, welcher K_1 aus O projiziert.

Die beiden Kegel k und $\mathfrak{k}$ werden von den beiden Koinzidenzebenen μ, ν der Projektivität $\Pi(k)$ in denselben Kanten berührt, so daß sie sich längs dieser Kanten tangieren.

Was wir für die Projektivität $\Pi(K)$ auf dem Kegelschnitte K erhalten haben, übertragen wir durch Projektion auf den Kegel k, der ja K aus O projiziert. Wir erhalten dann in dessen Kantenreihe eine Projektivität, in welcher zwei Kanten $O(X, X')$ korrespondieren, welche entsprechende Punkte X, X' projizieren; längs dieser Kanten $O(X, X')$ tangieren $\mathfrak{x}, \mathfrak{x}'$ den Kegel K. Aus dem Kegelschnitt $\mathfrak{K}$, der von den XX' eingehüllt wird, wird der Kegel $O\mathfrak{K}$, der von den Ebenen $O(X, X')$ eingehüllt wird. Aus s wird die Ebene Os — Projektivitätsebene —, auf welcher die Schnittlinien von (OX, OY') und (OY, OX') liegen. Sie schneidet den Kegel k in den Koinzidenzen $O(M, N)$, den Berührungskanten von μ, ν, und längs derselben berühren sich die Kegel k und $O\mathfrak{K}$. 107

Ingleichen übertragen wir, was für $\Pi(k)$ erhalten wurde, durch Schnitt mit ω in den Tangentenbüschel von K. Es ergibt sich in demselben eine Projektivität, in welcher die Schnitte $\omega(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}')$ entsprechend sind, die Tangenten von X, X'. Aus dem Kegel $\mathfrak{k}$ wird ein Kegelschnitt $\omega\mathfrak{k}$, der von den Schnitten dieser entsprechenden Tangenten erzeugt wird. Die Projektivitätsaxe $\bar{s}$ liefert einen Punkt $\omega\bar{s}$, das Projektivitätszentrum. Durch dasselbe gehen alle Verbindungslinien von $(\omega\mathfrak{x}, \omega\eta')$ und $(\omega\eta, \omega\mathfrak{x}')$. Die Tangenten aus ihm an K sind die Koinzidenzen der neuen Projektivität, welche in den Koinzidenzen M, N von $\Pi(K)$ berühren, und in diesen Punkten M, N wird K auch von $\omega\mathfrak{k}$ berührt.

K wird also von beiden Kurven $\mathfrak{K}$ und $\omega\mathfrak{k}$ berührt, die durch die Projektivität in der Punktreihe und die zugehörige im Tangentenbüschel, in der die Tangenten der in jener korrespondierenden Punkte entsprechend sind, sich ergeben: als Enveloppe der Verbindungslinien entsprechender Punkte und als Ort der Schnittpunkte entsprechender Tangenten; und zwar in den Koinzidenzen der Punktreihe, in denen zugleich die Koinzidenzen des Tangentenbüschels berühren.

Und ähnliches gilt am Kegel k.

Wir nehmen nun an, die Projektivität $\Pi(K)$ sei involutorisch, dann ist es die $\Pi(k)$ auch, und die beiden zugehörigen im Tangentenbüschel von K und in der Kantenreihe von k sind es ebenfalls; denn das Doppelt-Entsprechen über- 108

trägt sich unmittelbar. Wir wollen, statt $\Pi(K)$, $\Pi(k)$, lieber $I(K)$, $I(k)$ sagen und die Axen s, bzw. $\bar{s}$ Involutionsaxen nennen.

Auf der Involutionsaxe s liegt, wie im allgemeinen Falle, jeder Punkt (XY', YX'), aber nunmehr noch ein ähnlicher Punkt. Nehmen wir an, Z' decke sich mit Y, dann deckt sich, wegen der Involution, Z mit Y'; es ist zugleich $\eta \equiv \zeta'$, $\eta' \equiv \zeta$, wenn das die zugehörigen Berührungsebenen sind. Auf s liegt also $(XZ', X'Z)$ oder mit anderm Namen: $(XY, X'Y')$. Bilden wir daher aus zwei Paaren XX', YY' der Involution $I(K)$ ein vollständiges Viereck $XX'YY'$, so liegen zwei Diagonalpunkte desselben, nämlich $(XY', X'Y)$ und $(XY, X'Y')$ auf der Involutionsaxe, das sind diejenigen beiden Diagonalpunkte, in denen Gegenseiten sich schneiden, welche nicht gepaarte Punkte verbinden; dies geschieht beim dritten Diagonalpunkte (XX', YY'), zu dem wir gleich kommen werden.

Ebenso gehen durch die Axe $\bar{s}$ der Involution $I(k)$ die Ebenen $(\xi\eta', \xi'\eta)$ und $(\xi\eta, \xi'\eta')$, zwei Diagonalebenen des Vierflachs $\xi\xi'\eta\eta'$ von Tangentialebenen von k.

Ziehen wir durch die mit Y', Y identischen Punkte Z, Z' noch die Geraden $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{z}'$ bzw. aus den Regelscharen G, L; in $\eta \equiv \zeta'$ liegen also $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}'$, in $\eta' \equiv \zeta$ die $\mathfrak{y}'$, $\mathfrak{z}$. Beide Ebenen $\mathfrak{y}\mathfrak{y}'$, $\mathfrak{z}\mathfrak{z}'$ gehen also durch Y, Y'; folglich ist die Schnittlinie $(\mathfrak{y}\mathfrak{y}', \mathfrak{z}\mathfrak{z}')$ identisch mit YY'. Jene Ebenen berühren den Kegel k_1, ihre Schnittlinie geht daher durch S; also liegt dieser Punkt S auf YY' und damit in ω.

Ebenso enthalten die beiden Ebenen η, η' beide Punkte $\mathfrak{y}\mathfrak{y}'$, $\mathfrak{z}\mathfrak{z}'$; so daß deren Verbindungslinie mit $\eta\eta'$ identisch ist. Jene Punkte gehören aber dem K_1 und daher der Ebene σ an, d. h. σ geht durch $\eta\eta'$ und infolgedessen durch O, die Spitze des von η, η' berührten Kegels k.

Jetzt inzidiert also S mit ω und σ mit O.

Die Enveloppe $\mathfrak{K}$ wurde in ω durch den Kegel k_1 mit der Spitze S eingeschnitten und zwar durch die Tangentialebenen; so lange S außerhalb ω liegt, ergibt sich ein allgemeiner Kegelschnitt. Nun aber schneiden die Berührungsebenen von k_1 in ω den Strahlenbüschel (S, ω) ein, und zwar doppelt, weil durch jeden Strahl desselben, als einen Strahl durch diese Spitze, zwei (reelle oder imaginäre) Tangentialebenen des Kegels gehen[1]). Die eingeschnittenen Linien waren die Verbindungslinien XX'; während diese im allgemeinen Falle einen Kegelschnitt umhüllen, erzeugen sie jetzt einen Strahlenbüschel. Und daß er doppelt zu zählen ist, ergibt sich auch daraus, daß YY' zugleich $Z'Z$ ist.

Indem nun durch S alle Linien XX', YY' ... laufen, wird er der dritte Diagonalpunkt des Vierecks $XX'YY'$; wir nennen diesen Konkurrenzpunkt S das Involutionszentrum.

1) Dadurch wird die Klasse 2 erhalten.

Zu einer Involution $I(K)$ auf einem Kegelschnitte gehört demnach eine Involutionsaxe s und ein Involutionszentrum S; durch dieses laufen alle Verbindungslinien XX', YY' ... gepaarter Punkte, auf jener liegen alle Punkte $(XY', X'Y)$ und $(XY, X'Y')$, also zwei Diagonalpunkte des aus zwei Paaren gebildeten Vierecks, während der dritte (XX', YY') ins feste Zentrum fällt.

Die Doppelpunkte sind die Schnitte der Axe mit K, wie der allgemeine Fall lehrt; aber wir erkennen sie jetzt auch als Berührungspunkte der Tangenten aus dem Zentrum.

Ebenso artet der Kegel $\mathfrak{k}$ aus, der aus O den in σ gelegenen Kegelschnitt K_1 projiziert, weil jetzt σ durch O geht, offenbar in den doppelten Strahlenbüschel (O,σ); doppelt, weil jeder von seinen Strahlen zwei (reelle oder imaginäre) Punkte von K_1 projiziert. Also bilden die Schnittlinien $\xi\xi'$, ... gepaarter Ebenen von $I(k)$, die im allgemeinen Falle den Kegel $\mathfrak{k}$ erzeugten, den Strahlenbüschel (O, σ) aus der Spitze von k und zwar doppelt, da $\eta\eta'$ auch $\zeta'\zeta$ ist. Seine Ebene σ nennen wir die Involutionsebene, sie ist die dritte Diagonalebene des Vierflachs.

Weil $s = \omega\sigma$, $\bar{s} = OS$, so sind die beiden ausgezeichneten Elemente $\bar{s}$ und σ, Axe und Ebene der Bündelfigur, inzident zu S, s, Zentrum und Axe der ebenen Figur.

Die Doppelebenen von $I(k)$ sind die Tangentialebenen aus der Axe; wir erkennen sie jetzt aber auch als die Berührungsebenen längs der Schnittkanten der σ mit k, denn die beiden gepaarten Berührungsebenen aus einem Strahle von (O, σ), die im allgemeinen getrennt sind, vereinigen sich, wenn der Strahl in eine jener Kanten kommt.

Durch Schnitt der Kegelfigur mit ω ergibt sich die Involution im Tangentenbüschel von K; gepaarte Ebenen ξ, ξ', die F in gepaarten Punkten X, X' von $I(K)$ berührend, schneiden gepaarte Tangenten x, x' ein, welche dann auch in jenen gepaarten Punkten berühren. Für diese Involution wird die Spur s von σ die Axe und die Spur S von $\bar{s}$ das Zentrum; d. h. auf s liegen die Schnittpunkte xx' gepaarter Tangenten, wie in σ die Schnittlinien $\xi\xi'$; durch S gehen alle Verbindungslinien $(xy', x'y)$, $(xy, x'y')$, weil $(\xi\eta', \xi'\eta)$, $(\xi\eta, \xi'\eta')$ durch $\bar{s}$ gehen. Das sind zwei Diagonalen des Vierseits $xx'yy'$, während die dritte (xx', yy') die feste Gerade s ist. Von S kommen die Doppelstrahlen, wie beim Kegel von $\bar{s}$ die Doppelebenen; andererseits sind sie auch die Tangenten in den Schnitten des Kegelschnitts mit s.

Zwei so zueinander gehörige Involutionen in der Punktreihe und im Tangentenbüschel eines Kegelschnitts, bei denen gepaarte Tangenten in gepaarten Punkten berühren, haben also dieselbe Axe und dasselbe Zentrum. Jedoch ist

die Beziehung von S und s zu der einen felddual zur Beziehung von s und S zur andern.

Daß x und x' sich auf s schneiden, kann man auch folgendermaßen erkennen, wir wissen, $(XY', X'Y)$ liegt auf s. Wir halten X, X' fest, lassen Y in X' rücken, dann muß, wegen der Involution, Y' in X rücken, dabei gehen $XY', X'Y$ in die Tangenten x, x' über.

Endlich ergibt sich aus der Involution $I(K)$ durch Projektion diejenige in der Kantenreihe von k, in deren gepaarten Kanten x_1, x_1', die aus X, X' hervorgehen, die gepaarten Ebenen ξ, ξ' von $\Pi(k)$ berühren: ebenfalls mit σ als Involutionsebene und $\bar{s}$ als Involutionsaxe, so daß die beiden Kegelinvolutionen bündelduales Verhalten zu diesen ausgezeichneten Elementen haben, die eine zu σ und $\bar{s}$, die andere zu $\bar{s}$ und σ.

Mit Absicht sind im vorangehenden für Sätze, die sich auf ebene oder Bündelfiguren beziehen, räumliche Beweise gegeben.

§ 17. Die Polarentheorie der Kegelschnitte.

109 Wir nennen den Punkt S und die Gerade s, welche in der im vorangehenden erhaltenen Beziehung zum Kegelschnitte K stehen, Pol und Polare in bezug auf ihn.

Der Punkt S kann jeder Punkt der Ebene sein; denn zwei Sekanten durch ihn liefern die Paare XX', YY'; durch sie ist die Involution in der Punktreihe von K bestimmt. Und zwei Verbindungslinien gepaarter Punkte liefern das Zentrum, also S.

Den ∞^2 Involutionen auf K (Nr. 70) entsprechen die ∞^2 Punkte der Ebene als Zentren, und umgekehrt. Durch die Punktinvolution auf K ist die Tangenteninvolution bestimmt und ihre Axe s. Ist hingegen s gegeben, so ist, durch die Tangentenpaare aus zwei Punkten auf ihr, zunächst die Tangenteninvolution bestimmt, usw.

Wenn ein Strahl durch das Zentrum oder den Pol S den K in den gepaarten Punkten X, X' schneidet, so begegnen sich die zugehörigen Tangenten x, x', gepaart in der andern Involution, auf der Axe oder Polare s; und umgekehrt, wenn von einem Punkte auf s die Tangenten x, x' an K gehen, gepaarte Geraden der einen Involution, so läuft die Verbindungslinie der Berührungspunkte X, X', die in der andern Involution gepaart sind, durch S.

Die (reellen oder imaginären) Tangenten aus S an K be-hren in den Doppelpunkten der Punktinvolution, welche ererseits die Schnitte von s sind, und sind selbst die pelstrahlen der Tangenteninvolution.

Eine Sekante von K und der Schnitt der Tangenten in ihren ittpunkten sind daher Polare und Pol.

Ein zweiter Strahl durch S schneide in Y, Y'; der Schnittpunkt der Tangenten y, y' liegt wiederum auf s.

Ferner liegen die Schnittpunkte $(XY', X'Y)$ und $(XY, X'Y')$ auf s und die Verbindungslinien $(xy', x'y)$ und $(xy, x'y')$ gehen durch S.

Also liegt ein dem Kegelschnitt K eingeschriebenes vollständiges Viereck $XX'YY'$ vor und das zugehörige umgeschriebene vollständige Vierseit $xx'yy'$. Von jenem ist S der Diagonalpunkt (XX', YY'), während die beiden andern $T = (XY, X'Y')$ und $U = (XY', X'Y)$ auf s liegen, so daß diese die dem S gegenüberliegende Diagonale ist; von diesem ist s die Diagonale (xx', yy'), während die andern $t = (xy, x'y')$ und $u = (xy', x'y)$ durch S gehen und dieser der s gegenüberliegende Diagonalpunkt ist.

Durch T gehen die Sekanten XY, $X'Y'$; also ist die Verbindungslinie SU der beiden andern Diagonalpunkte die Polare von T.

Wie auf s sich x und x', y und y' schneiden, deren Berührungspunkte X und X', Y und Y' auf Sekanten durch S liegen, so schneiden sich auf der Polare von T die Tangenten x und y, x' und y', deren Berührungspunkte X und Y, X' und Y' auf Sekanten durch T liegen; da aber x und y, x' und y' sich auf t schneiden, so ist diese die Polare von T und mit SU identisch. Ebenso vereinigen sich ST und u in der Polare von U.

Wir erhalten ein Dreieck, von dem jede Ecke S, T, U die Gegenseite s, t, u zur Polare hat und welches Diagonaldreieck sowohl von $XX'YY'$, als von $xx'yy'$ ist; die Ecken sind die Diagonalpunkte von $XX'YY'$, die Seiten Diagonalen von $xx'yy'$.

Wir nennen es ein Polardreieck des Kegelschnitts.

Die Sekanten SXX', SYY' sind beliebige Sekanten durch S.

Wenden wir auf eine von ihnen die harmonische Eigenschaft des vollständigen Vierecks an, nach der auf jeder Seite die beiden Ecken durch den Diagonalpunkt und die Gegendiagonale harmonisch getrennt werden (Nr. 46), so haben wir:

Auf jeder Sekante durch den Pol werden die Schnittpunkte mit dem Kegelschnitte durch Pol und Polare harmonisch getrennt. Und ebenso gibt die harmonische Eigenschaft des Vierseits:

Die zwei Tangenten aus einem Punkte der Polare werden durch diese und den Pol harmonisch getrennt.

Die Polaren der Punkte T und U gehen durch S. Aber jeder 110
Punkt von s kann ein T (oder U) sein. In der Tat, wenn SXX' gelegt ist, so ziehe man durch einen beliebigen Punkt T von s die Gerade TX, welche K nochmals in Y schneide, sodann SY, deren

zweiter Schnitt Y'. sei; XY und $X'Y'$ treffen sich auf s, mithin in T; ist dann wiederum $U=(XY', X'Y)$ der dritte Diagonalpunkt, auf s gelegen, so ist SU die Polare von T. Also:

Liegt T auf der Polare s von S, so liegt S auf der Polare t von T; oder geht s durch T, so geht auch t durch S; oder indem wir beides zugleich aussprechen: Sind ein Punkt und eine Gerade inzident, so sind es auch die polaren Elemente.

Ein Punkt, welcher auf der Polare eines andern gelegen ist, heißt konjugiert zu ihm in bezug auf K; eine Gerade, welche durch den Pol einer andern geht, heißt konjugiert zu ihr. Der vorangehende Satz sagt also:

Ist T zu S konjugiert, dann ist es auch S zu T; ist t zu s konjugiert, dann auch s zu t.

Die Konjugiertheit findet stets in beiderlei Sinne statt oder ist gegenseitig, so daß man kurz sagen kann: S und T, s und t sind konjugiert.

Wenn der Pol T auf der Gerade s sich bewegt, so dreht sich die Polare t um den Pol S von s; die Punktreihe der T und der Büschel der t sind projektiv.

In der Tat, wenn die Sekante SXX' festgehalten wird, so haben wir zu jedem Punkte T von s eine Sekante SYY' gefunden, für welche $T=(XY, X'Y')$ ist; t geht von S nach $U=(XY', X'Y)$, der auf s liegt. Es genügt, Y als zweiten Schnitt von TX mit K zu konstruieren, ihn aus X' auf s nach U zu projizieren und diesen mit S durch t zu verbinden. Die beiden Strahlenbüschel XY und $X'Y$ sind projektiv, weil X und X' auf K liegen und Y ihn durchläuft; zu ihnen sind die Punktreihe der T und der Büschel der t perspektiv, also untereinander projektiv. Der Beweis ist auch dual zu führen, indem man von der um S sich drehenden t ausgeht.

Die konjugierten Punkte T und U bewegen sich also projektiv auf s und zwar involutorisch. Denn Y' ist der zweite Schnitt von XU und T die Projektion von Y' aus X' auf s, so daß T aus U genau durch dieselbe Konstruktion sich ergibt, wie U aus T. Oder wir weisen direkt ein involutorisches Paar nach. Ist P der Schnittpunkt der Tangenten von X und X', auf s gelegen, und Q der Schnittpunkt (XX', s) so erkennt man leicht: Fällt T nach P oder Q, so fällt U nach Q oder P.

So entsteht auf der Gerade s die Involution der konjugierten Punkte T, U, und perspektiv zu ihr um den Pol S die Involution der konjugierten Geraden u und t, welche man selbständig durch die duale Betrachtung ableiten kann.

Man beachte jedoch, daß von zwei perspektiven Paaren der beiden Involutionen die nicht inzidenten Elemente polar sind: t geht durch U und u durch T.

Die Doppelelemente dieser Involutionen sind sich selbst konjugiert. Nun sind ein Punkt von K und seine Tangente Pol und Polare. Denn für einen Punkt S von K als Zentrum wird die krumme Involution auf K parabolisch, indem S allen Punkten X gepaart ist. Auf der Tangente von S, in der immer x' liegt, läuft der Schnittpunkt xx', der die s beschreibt. Haben wir zwei Sekanten SXX', SYY' mit X' und Y' in S, so ist $T=(XY, X'Y')$ der Schnitt der Tangente $X'Y'$ von S mit XY, und $U=(XY', YX')$ fällt in S, also ist TU jene Tangente. Die Punkte und Tangenten von K sind daher sich selbst konjugiert.

Die Doppelelemente der Involutionen der konjugierten Punkte auf s und derjenigen der konjugierten Geraden durch S sind also die Schnitte der s mit K und die zu ihnen perspektiven Tangenten aus S; werden ja auch jene Schnitte harmonisch getrennt durch jeden T auf s und t, also durch T und U, und diese Tangenten durch jede t, die durch S geht, und T, also durch t und u.

Sind die Schnitte von s und die Tangenten aus S imaginär, so hat man in den dann elliptischen und reell herzustellenden Involutionen die reellen Repräsentanten[1]).

Auf einer Tangente wird die Involution parabolisch, mit dem Berührungspunkte als dem zu allen Paaren gehörigen Punkte, durch den ja auch die Polaren aller Punkte der Tangente laufen; ebenso wird es die um einen Punkt des Kegelschnitts, und der allen Paaren gemeinsame Strahl ist die Tangente, welche ja die Pole von allen Strahlen des Büschels enthält.

Ein Punkt S und seine Polare s haben uns somit zu vier Involutionen geführt: der Involution konjugierter Punkte auf s, der Involution konjugierter Strahlen um S, der Involution in der Punktreihe von K, deren Zentrum S ist, und der Involution im Tangentenbüschel von K, deren Axe s ist.

Die Schnittpunkte von s mit K sind Doppelpunkte der ersten und der dritten, die Tangenten aus S Doppelstrahlen der zweiten und der vierten, so daß man auch die beiden Involutionen auf und um K als darstellende für diese Elemente ansehen kann, wenn sie imaginär sind; aber um konjugiert imaginäre Elemente bei Schnitten und Projektionen zu verfolgen, sind die ersteren mehr geeignet.

Die Punktepaare TU der Involution auf s werden aus X, einem 111
beliebigen Punkte von K, in die Punktepaare YY' der krummen Involution auf K projiziert. Also:

Die Involution konjugierter Punkte auf einer Gerade s

1) Dieser Fall hat zur reellen Darstellung konjugiert imaginärer Elemente durch elliptische Involutionen geführt.

wird aus jedem Punkte des Kegelschnitts auf diesen in die Involution projiziert, von welcher *s* die Axe und ihr Pol *S* das Zentrum ist. Ebenso dual:

Die Involution konjugierter Strahlen um einen Punkt *S* schneidet jede Tangente von *K* in der nämlichen Involution, wie die Involution im Tangentenbüschel, von welcher *S* und *s* Zentrum und Axe sind.

Vier harmonische Punkte auf *K* kann man auffassen als die Doppelpunkte *M*, *N* einer krummen Involution und zwei gepaarte Punkte *A'*, *A'* derselben; daher ist *MN* die Axe und *AA'* geht durch das Zentrum, oder den Pol von *MN*; also sind *MN* und *AA'* konjugiert.

Vier harmonische Punkte eines Kegelschnitts werden durch zwei konjugierte Geraden eingeschnitten, und vier harmonische Tangenten kommen von zwei konjugierten Punkten.

Ein Punkt *S* und irgend zwei konjugierte Punkte auf seiner Polare *s* geben uns ein Polardreieck des Kegelschnitts, von dem jede Ecke die Gegenseite zur Polare hat. Da die Seiten *s* und zwei konjugierte Geraden *t* und *u* durch den Pol *S* sind, so ist diese Figur in sich dual und kann auch Polardreiseit genannt werden. Jede zwei Ecken, jede zwei Seiten eines Polardreiecks sind konjugiert, weshalb es auch Tripel konjugierter Punkte, Geraden genannt wird. Eine Ecke *S* kann beliebig gewählt werden, die zweite *T* ist auf die Polare *s* von *S* zu legen, so daß die Polare *t* durch *S* geht, die dritte *U* ist dann der Punkt *st* und seine Polare *u* die *ST*. Oder man geht von *s* aus, zieht *t* durch *S*, usw. Ein Kegelschnitt hat daher ∞^3 Polardreiecke; je ∞^1 haben eine Ecke *S* und Gegenseite *s* gemeinsam; die beiden andern Ecken und Seiten bilden zwei perspektive Involutionen konjugierter Elemente.

Die drei Involutionen konjugierter Punkte auf den Seiten eines Polardreiecks sind nicht verbunden (Nr. 82). Sie haben zwar die Ecken zu gepaarten Punkten; aber die gepaarten Punkte *A'*, *B'*, *C'* zu den Schnitten *A*, *B*, *C* der Seiten *TU*, *US*, *ST* mit einer Gerade *g* liegen nicht wieder in einer Gerade, vielmehr laufen die Verbindungslinien *A'S*, *B'T*, *C'U*, die Polaren von *A*, *B*, *C*, in einen Punkt, den Pol von *g*, zusammen.

Ein Punkt liegt im Äußern oder Innern eines Kegelschnitts, je nachdem er reelle oder imaginäre Tangenten an ihn sendet, seine Polare also reell oder imaginär schneidet. Alle Geraden durch einen innern Punkt schneiden reell; weil reell schneidende Punkte durch ihn sicher vorhanden sind, nicht aber der Übergangsfall zu den Sekanten mit imaginären Schnitten, die Tangenten. Die Polare enthält daher lauter äußere Punkte. Ist also *S* ein innerer

Punkt, so sind die beiden andern Ecken T, U eines Polardreiecks STU äußere Punkte. Ist dagegen S ein äußerer Punkt, so schneidet die Polare TU reell, und die beiden Ecken T, U werden durch diese Schnitte harmonisch getrennt, also liegt der eine innerhalb, der andere außerhalb.

Daher liegen von den drei Ecken eines Polardreiecks zwei außerhalb, die dritte innerhalb, zwei Seiten schneiden reell, die dritte imaginär; von den drei Involutionen konjugierter Elemente um die Ecken oder auf den Seiten sind zwei hyperbolisch, eine elliptisch, die zu gegenüberliegenden Elementen gehörigen, wegen der perspektiven Lage, gleichartig.

Einem Polardreieck STU kann man ∞^1 Dreiecke umschreiben, die dem Kegelschnitte eingeschrieben sind; denn ist X ein beliebiger Punkt desselben, X' der zweite Schnitt von SX, Y' der von TX', so geht die dritte Seite $Y'X$ von selbst durch U. Die beiden Sekanten SXX', SYY' liefern vier solche Dreiecke $XX'Y'$, $XX'Y$, $YY'X$, $YY'X'$; jeder Punkt des Kegelschnitts gehört zu dreien.

Ebenso gehört jede Tangente zu drei dem Polardreieck ein-, dem Kegelschnitte umgeschriebenen Dreiseiten; denn sind x, x', y, y' wiederum die Tangenten der vier Punkte, so liegen die Punkte xx', $x'y'$, $y'x$ auf s, t, u.

Es seien nun S und T zwei beliebige Punkte; zu jedem Punkte X von K werde der zweite Schnitt Y von SX und der zweite Schnitt Z von TY konstruiert, so bewegen sich X und Z zu Y involutorisch projektiv auf K, also auch X und Z zueinander projektiv, aber im allgemeinen nicht involutorisch, XZ umhüllt vielmehr einen Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ (Nr. 106). Damit X und Z sich involutorisch bewegen, ist notwendig, daß man von Z zu X in derselben Weise gelange, wie von X zu Z, d. h. SZ und TX müssen sich auf der Kurve, in W, schneiden; und es genügt, daß das einmal geschieht. Dann sind aber S und T zwei Diagonalpunkte des eingeschriebenen Vierecks $XYZW$, also Ecken eines Polardreiecks und konjugiert.

Nur wenn S und T in bezug auf K konjugiert sind, bewegen sich X und Z involutorisch.

Y und W bilden dann auch ein Paar; denn SY und TW schneiden sich in X, SW und TY in Z.

Die Punkte $S = (XY, ZW)$ und $T = (XW, ZY)$ liegen auf der Axe der Involution und der Pol U von ST ist das Zentrum (XZ, YW) derselben; die drei Drehpunkte oder Zentren bilden ein Polardreieck. Nur einem Polardreiecke kann man ∞^1 Dreiecke umschreiben, die dem Kegelschnitte eingeschrieben sind.

Eine Punktreihe und der zugehörige Polarenbüschel sind pro- 112
jektiv; schneiden wir letzteren mit einer Gerade, konstruieren also zu

jedem Punkte der ersten Gerade den konjugierten auf der zweiten, so ergibt sich:

Die Punktreihen auf zwei Geraden sind projektiv mit solchen Punkten als entsprechenden, die in bezug auf einen Kegelschnitt konjugiert sind.

Es seien X und X', Y und Y' konjugiert in bezug auf K, also entsprechend in den projektiven Reihen konjugierter Punkte auf XY, $X'Y'$; die involutorische Axe derselben (Nr. 90) trifft sie in den Punkten, die dem Schnittpunkte $Z' = (XY, X'Y')$ entsprechen, also zu ihm in bezug auf K konjugiert sind; also ist jene Axe die Polare von Z' (nebenbei bemerkt, auch die Polare des Z' in bezug auf den Kegelschnitt, der durch die beiden projektiven Punktreihen erzeugt wird; weil er die Träger in den Schnitten mit der genannten Axe berührt).

Auf dieser involutorischen Axe liegt aber auch der Punkt $Z = (XY', X'Y)$ (Nr. 90) und ist deshalb dem Z' in bezug auf K konjugiert. X und X', Y und Y', Z und Z' sind aber Gegenecken eines vollständigen Vierseits. Also:

Wenn zweimal zwei Gegenecken eines vollständigen Vierseits in bezug auf einen Kegelschnitt konjugiert sind, so sind es auch die dritten. Ein solches Vierseit heißt Polvierseit des Kegelschnitts.

Und dual: Wenn zweimal zwei Gegenseiten eines vollständigen Vierecks konjugiert sind, so sind es auch die dritten: Polviereck des Kegelschnitts.

Diese Sätze rühren von Hesse her.[1])

Man kann sie auch in folgender Form aussprechen:

Die drei Punkte X', Y', Z' auf den Seiten YZ, ZX, XY eines Dreiecks, welche zu den Gegenecken in bezug auf einen Kegelschnitt konjugiert sind, liegen in gerader Linie.

Die drei Geraden durch die Ecken eines Dreiecks, welche zu den Gegenseiten konjugiert sind, laufen in einen Punkt zusammen.

Ja, wir können sie in einen in sich dualen Satz zusammenfassen mit Hilfe des Begriffs polarer Dreiecke.

Zwei Dreiecke heißen in bezug auf einen Kegelschnitt polar, wenn zu den Ecken des einen die Seiten des andern polar sind und daher auch zu den Ecken des zweiten die Seiten des ersten. Sind XYZ und $X_1Y_1Z_1$ die beiden Dreiecke, so müssen die Seiten Y_1Z_1, Z_1X_1, X_1Y_1 des letzteren, als die Polaren von X, Y, Z, durch die auf YZ, ZX, XY gelegenen konjugierten Punkte X', Y', Z'

---

1) Journal f. Mathem., Bd. 20, S. 285.

gehen; weil diese in gerader Linie liegen, so sind die Dreiecke perspektiv. Also:

Zwei in bezug auf einen Kegelschnitt polare Dreiecke sind in perspektiver Lage.

Die Perspektivitätsaxe ist, wie eben gefunden, $X'Y'Z'$; in X' schneiden sich YZ und Y_1Z_1; daher ist seine Polare die Verbindungslinie der Pole X_1 und X, ebenso sind YY_1, ZZ_1 die Polaren von Y', Z', und das Perspektivitätszentrum, in das sie zusammenlaufen, ist der Pol der Axe.

Die Paare der zweiten Schnittpunkte der Gegenseiten eines vollständigen Vierecks mit einem Kegelschnitte, der dem Diagonaldreiecke umgeschrieben ist, sind in Involution.

Das Viereck sei $PQRS$, seine Diagonalpunkte $\mathfrak{A} = (PQ, RS)$, $\mathfrak{B} = (PR, QS)$, $\mathfrak{C} = (PS, QR)$ und der Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ werde von PQ, RS in D, D_1, von PR, QS in E, E_1, von PS, QR in F, F_1 zum zweiten Male getroffen; dann bestehen auf ihm die Involutionen mit den Zentren P, Q, R, S:

$$\mathfrak{A}D, \mathfrak{B}E, \mathfrak{C}F; \quad \mathfrak{A}D, \mathfrak{B}E_1, \mathfrak{C}F_1; \quad \mathfrak{A}D_1, \mathfrak{B}E, \mathfrak{C}F_1; \quad \mathfrak{A}D_1, \mathfrak{B}E_1, \mathfrak{C}F,$$

also die Projektivitäten:

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}E \barwedge DEF\mathfrak{B}, \quad \mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}E_1 \barwedge DE_1F_1\mathfrak{B}, \quad \mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}E \barwedge D_1EF_1\mathfrak{B},$$
$$\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}E_1 \barwedge D_1E_1F\mathfrak{B},$$

mithin ist auch:

$$DEF\mathfrak{B} \barwedge D_1EF_1\mathfrak{B}, \quad DE_1F_1\mathfrak{B} \barwedge D_1E_1F\mathfrak{B}.$$

Für die erste von diesen ist $E\mathfrak{B}$ die Axe und (DF_1, FD_1) liegt auf ihr; die zweite lehrt ebenso, daß (DF, D_1F_1) auf $E_1\mathfrak{B}$ liegt. Diese beiden Punkte bilden mit (DD_1, FF_1) ein Polardreieck für $\mathfrak{K}$; von dem eingeschriebenen Dreieck $\mathfrak{B}EE_1$ gehen zwei Seiten durch Ecken desselben, also (Nr. 111) die dritte Seite EE_1 durch die dritte Ecke (DD_1, FF_1); mithin sind DD_1, EE_1, FF_1 involutorisch gepaart.

Bei einer Involution $I(K)$ auf einem Kegelschnitte fanden wir: 113
Ist T ein Punkt der Axe s und TXY eine Sekante durch ihn, so geht auch die Verbindungslinie der den X, Y gepaarten Punkte X', Y' durch T; diese beiden Strahlen projizieren also aus T zwei Paare der $I(K)$.

Eine Involution $I(K)$ auf einem Kegelschnitte wird aus jedem Punkte der Axe durch eine stets hyperbolische Strahleninvolution derartig projiziert, daß jedes Strahlenpaar zwei Punktepaare projiziert. Doppelstrahlen sind die Axe, welche die beiden Paare mit vereinigten Punkten, und der Strahl nach dem Zentrum, welcher zwei gepaarte Punkte projiziert.

Zu den beiden Strahlen TXY, $TX'Y'$ sind ja auch TU und TS harmonisch.

Liegen zwei nicht involutorische projektive Punktreihen auf K, so konstruiere man vermittelst zweier Punkte von der Art $(XY', X'Y)$ die Projektivitätsaxe s; die Involution auf K, für welche diese s Axe und der Pol S Zentrum ist, hat in den Schnitten der s mit K, den Koinzidenzpunkten der projektiven Punktreihen, ihre Doppelpunkte und wird die darstellende Involution für diese Schnitte, wenn sie imaginär sind.

Je nachdem das Zentrum S außerhalb oder innerhalb K liegt, ist die Involution hyperbolisch oder elliptisch; im ersteren Falle gehen durch S auch imaginär schneidende Strahlen und die Involution hat auch (reelle) Paare von konjugiert imaginären Punkten, im zweiten Falle gibt es nur reell schneidende Sekanten und nur (reelle) Paare mit reellen Punkten. Wir bestätigen so am Kegelschnitte in anschaulicher Weise, was in Nr. 77 gefunden wurde.

Für zwei Involutionen auf einem Kegelschnitte liefert die Verbindungslinie der Zentren das gemeinsame Paar; es besteht stets aus reellen Punkten, wenn mindestens eine von ihnen elliptisch ist, also ihr Zentrum innerhalb liegt.

Sind beide hyperbolisch, so kommt es auf die Lage der Doppelpunkte an; die Verbindungslinie SS_1 der Zentren ist die Polare des Schnitts der beiden Axen s, s_1, der Verbindungslinien der Doppelpunkte. Dieser Schnitt ss_1 ist Zentrum derjenigen Involution, für welche die einen und die andern Doppelpunkte zwei Paare bilden, und SS_1 ihre Axe. Je nachdem diese Paare der Doppelpunkte hyperbolische oder elliptische Lage haben, schneidet SS_1 reell oder imaginär.

Das gemeinsame Paar zweier ineinander liegenden Involutionen besteht nur dann aus zwei konjugiert imaginären Elementen, wenn sie beide hyperbolisch sind und die Paare der Doppelelemente elliptische Lage haben; die durch diese bestimmte elliptische Involution ist dann die darstellende.

So ergeben sich die Sätze von Nr. 22 und 77 wiederum am Kegelschnitte als Träger sehr anschaulich.

Wir überlassen dem Leser die Übertragung der vorangehenden Ergebnisse auf den Kegel 2. Grades.

114 Der Satz (Nr. 71), daß MN, XY', $X'Y$ in Involution sind, wenn X und X', Y und Y' entsprechend sind in konjektiven Gebilden und M, N die Koinzidenzen, ergibt sich sehr einfach, wenn wir sie als Punktreihen auf einem Kegelschnitt ansehen; denn dann schneiden sich XY' und $X'Y$ auf der Projektivitätsaxe MN (Nr. 106), und dieser Schnittpunkt ist das Zentrum der Involution.

Sind nun die Punktreihen auf einem Kegelschnitte K und auf einer Gerade u projektiv, so projiziere man erstere aus allen Punkten von K auf u; die entstehenden Punktreihen werden alle konjektiv zu der gegebenen auf u; die Paare der Koinzidenzen bilden eine Involution.

In der Tat, wenn A, B die Schnitte von K mit u sind und A', B' ihnen entsprechen in der Punktreihe von u, so sind diese Punkte auch entsprechend in allen entstandenen konjektiven Punktreihen; daher durchlaufen die Koinzidenzen M, N die Involution $(AB', A'B)$.

Und dasselbe gilt auf K, wenn die Punktreihe von u aus allen Punkten von K auf diesen projiziert wird.

Die Aufgabe, in einer elliptischen Involution das reelle Paar zu konstruieren, das zu zwei gegebenen Punkten A, A' harmonisch ist, für welche wir in Nr. 78 vorläufig eine Projektions-Konstruktion gegeben haben, läuft ja auf die Herstellung des gemeinsamen Paars zweier Involutionen hinaus. Die zweite ist diejenige, welche A, A' zu Doppelpunkten hat. Ist der Träger ein Kegelschnitt, so hat man ihn mit der Verbindungslinie des Zentrums der gegebenen Involution und des Pols von AA', des Zentrums der zweiten, zu schneiden.

Der Kreis als Träger ist der bequemste, weil da die Schnitte am einfachsten sich ergeben. Handelt es sich um eine Strahleninvolution, so hat man sie mit einem durch den Scheitel gehenden Kreise zu schneiden, die beiden andern wird man zunächst in Strahleninvolutionen überführen.

Der am häufigsten vorkommende Fall ist, wo A, A' ein Paar der gegebenen Involution bilden wie in Nr. 78.

An der Involution auf dem Kegelschnitte kann man am bequemsten den Begriff des Doppelverhältnisses von vier Paaren einer Involution entwickeln. Sie seien AA', BB', CC', DD', ferner a, b, c, d die vier Strahlen durch das Zentrum S, auf denen sie liegen, und A_1, B_1, C_1, D_1 deren Pole, auf der Axe oder Polare $\underset{\cdot}{s}$ von S gelegen. Wir fanden, daß vier harmonische Punkte in den Kegelschnitt durch konjugierte Geraden eingeschnitten werden. Zu einem Punkte O der Kurve seien nun die vierten harmonischen Punkte $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ in bezug auf die vier Paare konstruiert, die zweiten Schnitte der Geraden $O\,(A_1, B_1, C_1, D_1)$, welche zu den a, b, c, d konjugiert sind. Daher ist das Doppelverhältnis $(\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D})$ gleich dem der Punkte A_1, B_1, C_1, D_1 oder ihrer vier Polaren a, b, c, d, also von O unabhängig.

Das Doppelverhältnis der vierten harmonischen Punkte, in bezug auf vier Paare einer Involution, zu einem Element des Trägers (also auch der vier Mitten, wenn der Träger gerade ist) ist konstant und wird deshalb das Doppelverhältnis der

vier Paare genannt. Bei einer auf einem Kegelschnitte gelegenen Involution stellt es sich am einfachsten als das der vier die Paare tragenden Strahlen durch das Zentrum dar.

In bezug auf die ganze Involution führt jedes Element des Trägers zu der Reihe der vierten harmonischen Elemente; alle diese Reihen sind projektiv.

Nehmen wir an, die beiden Paare AA', BB' seien zu den beiden Paaren MM, NN, die aus den in den Doppelelementen vereinigten Elementen bestehen, harmonisch, so lehrt der Fall, wo der Träger ein Kegelschnitt ist, daß die Strahlen AA', BB' zu den Tangenten in M, N harmonisch sind; daher sind jene konjugiert und die Paare AA', BB' harmonisch zueinander.

Wenn zwei Paare einer Involution zu den durch die Doppelelemente gebildeten Paaren harmonisch sind, so sind die Elemente des einen zu denen des andern harmonisch.

115 Der Pol der unendlich fernen Gerade in bezug auf einen Kegelschnitt heißt bekanntlich sein Mittelpunkt, und die durch ihn gehenden Strahlen Durchmesser, die von ihm kommenden Tangenten, auf jener Gerade berührend, die Asymptoten.

Für die Involution konjugierter Strahlen um den Mittelpunkt, Involution konjugierter Durchmesser oder kürzer Durchmesser-Involution, sind die Asymptoten die Doppelstrahlen, also ist sie hyperbolisch oder elliptisch, je nachdem die Kurve Hyperbel oder Ellipse ist. Von diesem wichtigen Spezialfalle kommen die Namen und heißt die rechtwinklige Involution auch zirkular, weil die Durchmesser-Involution eines Kreises rechtwinklig ist.

Zu der Durchmesser-Involution ist die Involution konjugierter Punkte auf der unendlich fernen Gerade perspektiv; beim Kreise ist es die absolute Involution und die absoluten Punkte sind die Schnitte des Kreises. Bei der Parabel, welche die unendlich ferne Gerade zur Tangente hat, ist diese Involution parabolisch (Nr. 110).

Die gleichseitige Hyperbel, mit rechtwinkligen Asymptoten, führt zu einer gleichseitig-hyperbolischen Durchmesser-Involution (Nr. 20).

Die Involution konjugierter Punkte auf einem Durchmesser hat den Mittelpunkt M zum Zentralpunkt; sind daher X, X' zwei konjugierte Punkte in ihr, so ist $MX \cdot MX'$ die Potenz, also das Halbmesser-Quadrat, da die Schnittpunkte die Doppelpunkte sind; je nachdem sie positiv oder negativ ist, schneidet der Durchmesser reell oder imaginär.

Die in Nr. 75 gelehrte Konstruktion der zu zwei konjektiven Gebilden gehörigen Involution, welche ihre Koinzidenzpunkte zu Doppelpunkten hat, wird auch anschaulicher, wenn der Träger ein Kegelschnitt K ist. Dem Punkte $Z \equiv X \equiv Y'$ seien X', Y entsprechend und Z_1 dem Z in bezug auf sie harmonisch. Auf der Projektivitäts-

axe s (Nr. 106) liegt der Schnitt T der Geraden XY' und $X'Y$, von denen die erste Tangente in Z ist; wegen der Harmonizität sind ZZ_1 und $X'Y$ konjugiert; also geht $X'Y$ durch den Pol von ZZ_1, der auf der genannten Tangente liegt; daher ist er T. Wie T und Z_1 sich aus Z ergeben, so mögen sich U und W_1 aus W ergeben; U ist Pol von WW_1 und liegt auf s. Also ist $s = TU$ die Polare des Schnitts $S = (ZZ_1, WW_1)$. S ist Zentrum der Involution $ZZ_1, WW_1, \ldots$ und s ihre Axe. Diese Involution hat also mit der gegebenen Konjektivität die Axe gemeinsam, folglich sind ihre Doppelpunkte mit deren Koinzidenzpunkten identisch.

In Nr. 106, 107 wurde gefunden, daß die Verbindungslinien der entsprechenden Punkte zweier von demselben Kegelschnitte K getragenen projektiven Punktreihen einen Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ umhüllen, welcher den K in den Koinzidenzen berührt. Behandeln wir die Umkehrung. Es liegen zwei Kegelschnitte K und $\mathfrak{K}$ vor, welche sich doppelt berühren, oder, um dies reell auszudrücken, auf einer Gerade s (Berührungssehne) dieselbe Involution konjugierter Punkte besitzen und, perspektiv zu dieser, um den gemeinsamen Pol S (Berührungspol) dieselbe Involution konjugierter Strahlen. Es entstehen dann in der Tat auf jedem von ihnen durch die Tangenten des andern konjektive Punktreihen, und ebenso machen die Punkte des einen den Tangentenbüschel des andern in sich projektiv. 116

Es sei a eine feste Tangente von $\mathfrak{K}$, welche den K in A und A' schneide, x eine bewegliche, $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{X}$ die Berührungspunkte. Der Schnitt ax sei mit R bezeichnet und seine Polare $\mathfrak{A}\mathfrak{X}$ in bezug auf $\mathfrak{K}$ mit r; sie schneide s in T, so ist SR die Polare t von T in bezug auf $\mathfrak{K}$, aber, wegen jener gemeinsamen Involutionen, auch in bezug auf K. Mithin liegt der zweite Schnitt von TA' mit K, der zu A' harmonisch ist in bezug auf T und t, auf x, weil RT und t in bezug auf $\mathfrak{K}$ konjugiert, also zu a und x harmonisch sind, und ist einer der Schnitte von x mit K; wir nennen ihn X und den andern, durch welchen TA geht, X'. Demnach schneiden sich $A'X$ und AX' stets auf s (in T), erzeugen perspektive Büschel und auf K konjektive Punktreihen, deren entsprechende Punkte X und X' also durch die Tangenten x von $\mathfrak{K}$ verbunden sind. Man folgert weiter, daß auch A und A' entsprechend ist, daß s die Projektivitätsaxe ist und die Koinzidenzen einschneidet.

Wird daher auf der Tangente a, von der wir ausgingen, der Schnitt A zur ersten und A' zur zweiten Reihe gerechnet, so gehört auf einer beliebigen andern Tangente x von $\mathfrak{K}$ der Schnitt X zur ersten und X' zur zweiten, wenn $A'X$ und AX' sich auf der Berührungssehne schneiden.

Ebenfalls perspektiv zu den Büscheln $A'X$ und AX' ist der von $\mathfrak{A}\mathfrak{X}$ beschriebene; woraus folgt, daß der Berührungspunkt $\mathfrak{X}$ von

x auf $\mathfrak{K}$ eine Punktreihe beschreibt, die zu den Punktreihen der X und X' auf K projektiv ist.

Es ist noch darzutun, welchen Zusammenhang die Elemente O, ω, die in Nr. 98 als polar in bezug auf die Trägerfläche F zweier verbundener Regelscharen eingeführt wurden, mit den jetzigen polaren Elementen haben. O ist die Spitze des Tangentialkegels der Fläche, welcher sie längs des Schnitts mit ω tangiert.

In bezug auf diesen Schnitt von ω werden ein Punkt S in ω und der Schnitt s mit der Polarebene σ von S polar. Also ist die Polare eines Punktes S in bezug auf den Schnitt von F mit einer durch S gehenden Ebene ω der Schnitt s der Polarebene σ von S nach F mit ω.

Ferner Polarebene und Polarstrahl in bezug auf den Tangentialkegel aus O an F war eine Ebene σ und der Strahl $\bar{s}$ aus O nach dem Pole S von σ nach F. Der Polarstrahl einer Ebene σ in bezug auf den Berührungskegel an F aus einem Punkte O in σ ist der Strahl, der aus O den Pol S von σ nach F projiziert.

Beim Kreise ist die Polare normal zum Durchmesser nach dem Pole. Damit lassen sich folgende Sätze beweisen.

In einer Ebene liege auf der Gerade u eine Involution vor; C sei der Zentralpunkt, p die Potenz und PP_1 irgend ein Paar. Die Kreise, für welche sie Involution konjugierter Punkte ist, gehen durch die Doppelpunkte und haben ihre Mittelpunkte auf dem Lote, das auf u in C errichtet ist. Die Paare der Durchmesser-Endpunkte auf dieser gemeinsamen Zentrale bilden eine zweite Involution mit demselben Zentralpunkte C, aber der Potenz $-p$; und den beiden Involutionen ist die absolute Involution verbunden (Nr. 82).

Die Kreise über den Strecken PP_1 als Durchmessern schneiden jene rechtwinklig und bilden den sogenannten „konjugierten Kreisbüschel".

Wenn dagegen eine Strahleninvolution gegeben ist mit dem beliebigen Paare pp_1 und dem rechtwinkligen Paare st, von dem t der im stumpfen Winkel der p, p_1 gelegene Strahl ist; so bilden die Kreise, für welche die p, p_1 konjugiert sind, zwei Reihen mit den Mittelpunkten auf s, bzw. t; beide bestehen aus reellen Kreisen, wenn die Involution hyperbolisch ist; wenn sie aber elliptisch ist, nur die, deren Mittelpunkte auf t liegen.

§ 18. Die Sätze von Pascal und Brianchon.

117 Auf einem Kegelschnitte K seien sechs beliebige Punkte genommen; wir verbinden sie in irgend einer Reihenfolge, etwa A, B', C, A', B, C', zu einem einfachen Sechsecke, das also K eingeschrieben ist. Jetzt legen wir auf K eine Projektivität fest, in der wir den

Punkten A, B, C die Punkte A', B', C' entsprechen lassen; auf der Axe derselben liegen dann die Punkte

$$(AB', BA'), (BC', CB'), (CA', AC');$$

das sind die Schnittpunkte der Gegenseiten des Sechsecks.

Damit haben wir den Satz von Pascal[1]):

Die Schnittpunkte der Gegenseiten eines einem Kegelschnitt eingeschriebenen (einfachen) Sechsecks liegen in gerader Linie.

Wir haben die Namen: Pascalsches Sechseck (Hexagramma mysticum), Pascalsche Gerade.

Aus den sechs Punkten kann man wegen der 720 Permutationen und weil je $2 \cdot 6$ Permutationen dasselbe Sechseck bezeichnen[2]), $\frac{720}{12} = 60$ Sechsecke bilden, welche alle die gefundene Eigenschaft haben und daher zu 60 Pascalschen Geraden führen, die eine interessante eingehend untersuchte Figur bilden.

Der Pascalsche Satz drückt eine Beziehung zwischen sechs Punkten eines Kegelschnitts aus; und eine solche muß bestehen, denn wir dürfen nur fünf Punkte geben. Machen wir zwei von ihnen zu Scheiteln von projektiven Büscheln und die Strahlen von ihnen nach den drei andern Punkten zu entsprechenden in denselben, so ist die Projektivität eindeutig festgelegt, und wir haben einen durch die fünf Punkte gehenden Kegelschnitt.

Nehmen wir nun zwei andere von den Punkten als Scheitel von Büscheln, so werden diese durch ihn projektiv, mit den nach den nunmehr drei übrigen Punkten gehenden Strahlen als entsprechenden, weil die Punktreihe auf einem Kegelschnitt aus beliebigen zwei Punkten auf ihm durch projektive Büschel projiziert wird. Wir kommen also bei diesem Arrangement und so bei jedem der zehn möglichen zu demselben Kegelschnitte.

Fünf Punkte bestimmen einen Kegelschnitt und zwar eindeutig.

Es fragt sich nun, ob die für sechs Punkte gefundene Bedingung auch hinreichend ist, um dieselben auf den nämlichen Kegelschnitt zu bringen. Es habe also ein Sechseck $AB'CA'BC'$ die Eigenschaft, daß die drei Schnittpunkte

$$(AB', A'B) = P, \ (B'C, BC') = Q, \ (CA', C'A) = R$$

in einer Gerade p liegen. Wir legen dann durch fünf Ecken A, B',

---

1) B. Pascal (der berühmte Schriftsteller des 17. Jahrhunderts), Essai sur les coniques.

2) Nämlich, wenn 1, ... 6 die Punkte sind, je 12 Permutationen wie:

1 2 3 4 5 6, 2 3 4 5 6 1, ... 6 1 2 3 4 5,
6 5 4 3 2 1, 1 6 5 4 3 2, ... 5 4 3 2 1 6.

C, A', B den, wie eben gefunden, eindeutig bestimmten Kegelschnitt; wenn C' auf ihm liegt, so muß er mit dem zweiten Schnitt von $l = BC'$ und dem Kegelschnitt identisch sein. Dieser zweite Schnitt heiße zunächst C_1'; wir haben nun das diesem Kegelschnitte eingeschriebene Sechseck $AB'CA'BC_1'$. Also liegen

$$(AB', A'B) = P, \ (B'C, BC_1') = Q_1, \ (CA', C_1'A) = R_1$$

in gerader Linie p_1, da aber $BC_1' \equiv BC' \equiv l$, so ist $Q_1 \equiv Q$, also auch $p_1 \equiv p$; demnach fallen R_1 und R beide in den Schnitt von p und CA' und C' und C_1' beide in den von l und RA. Folglich gilt die Umkehrung, daß A, B', C, A', B, C' demselben Kegelschnitte angehören, wenn die drei Punkte P, Q, R in gerader Linie liegen, und unter Pascal's Satz versteht man den Inbegriff beider Sätze.

Die duale Betrachtung lehrt:

Fünf Tangenten bestimmen eindeutig einen Kegelschnitt.

Ein beliebiges aus sechs Tangenten eines Kegelschnitts gebildetes (einfaches) Sechsseit hat die Eigenschaft, daß die Verbindungslinien der Gegenecken (Hauptdiagonalen) in einen Punkt zusammenlaufen. Und umgekehrt, wenn ein Sechsseit diese Eigenschaft hat, so berühren seine Seiten denselben Kegelschnitt.

Dieser duale Satz wird nach Brianchon, der ihn gefunden[1]), benannt, ebenso wie ein derartiges Sechsseit und der Konkurrenzpunkt.

Wir haben diese Sätze übrigens schon gehabt (Nr. 89):

Wenn $ABU'DUC$ ein einem Kegelschnitt eingeschriebenes Sechseck ist, so seien U, U' die Scheitel der erzeugenden projektiven Büschel und nach A, B, C, D gehen entsprechende Strahlen; folglich schneiden sich, wie a. a. O. bewiesen wurde, die Gegenseiten in drei Punkten einer Gerade. Und ist $abu'duc$ ein umgeschriebenes Sechsseit, so seien u, u' die Träger der erzeugenden Punktreihen; a, b, c, d sind dann Verbindungslinien entsprechender Punkte. Wir fanden dort, daß die drei Hauptdiagonalen durch denselben Punkt gehen.

118 Wir wollen sofort eine Anwendung dieser Sätze geben. Es seien $ABC, A'B'C'$ zwei Polardreiecke eines Kegelschnitts K. Wir betrachten die beiden Dreiseite, eingeschlossen von $AB, BC', C'A'$, bzw. $A'B', B'C, CA$; die Pole von AB und $C'A'$ in bezug auf K sind die Gegenecken C und B', zwei Ecken des zweiten Dreiseits, der Pol von BC' ist der Schnitt der beiden Polaren CA und $A'B'$ von B und C', also die dritte Ecke des zweiten Dreiseits. Folglich sind die beiden Dreiseite polar in bezug auf K und demnach perspektiv gelegen (Nr. 112); es entsprechen sich eine Seite des einen Dreiseits und die Gegenseite ihres Pols im andern, also AB und $A'B'$, BC'

1) Journal de l'Ecole polytechnique, Heft 13 (Bd. VI), S. 297.

und $B'C$, $C'A'$ und CA. Die perspektive Lage sagt aus, daß die Schnitte

$$(AB, A'B'), (BC', B'C), (C'A', CA)$$

in gerader Linie liegen; das bedeutet, daß die sechs Ecken ein Pascalsches Sechseck $ABC'A'B'C$ bilden, also sich auf demselben Kegelschnitt befinden.

Bezeichnen wir nun die beiden Polardreiecke nach ihren Seiten abc, $a'b'c'$, so ergeben sich die Dreiecke $(ab, bc', c'a')$, $(a'b', b'c, ca)$ als polar; mithin gehen $(ab, a'b')$, $(bc', b'c)$, $(c'a', ca)$ durch einen Punkt, und $abc'a'b'c$ ist ein Brianchon'sches Sechsseit.

Von zwei zu demselben Kegelschnitte K gehörigen Polardreiecken liegen die sechs Ecken auf einem zweiten Kegelschnitt $\mathfrak{K}$, und die sechs Seiten berühren einen dritten $\mathfrak{K}_1$.

Daraus folgt, daß, wenn einem Polardreiecke ABC von K ein Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ umgeschrieben ist, diesem noch ∞^1 Polardreiecke von K eingeschrieben werden können, es genügt, zwei Ecken auf $\mathfrak{K}$ zu bringen, die dritte fällt von selber auf ihn. Wir legen also eine Ecke A' beliebig auf $\mathfrak{K}$, die zweite B' in einen der Schnittpunkte der Polare von A' nach K mit $\mathfrak{K}$; der dritte C' fällt von selbst in den zweiten Schnitt dieser Polare; wobei freilich nicht zu jedem A' reelle B' und C' gehören.

Und ebenso können einem Kegelschnitte $\mathfrak{K}_1$, der einem Polardreiseite abc von K eingeschrieben ist, ∞^1 andere Polardreiseite von K umgeschrieben werden, jede Tangente a' von $\mathfrak{K}_1$ bildet mit den Tangenten b', c', die von ihrem Pole nach K kommen, ein solches Dreiseit.

Zwei beliebige Dreiecke können nicht zugleich Polardreiecke für denselben Kegelschnitt sein.

An diese Sätze wollen wir den Satz: Die sechs Seiten zweier demselben Kegelschnitte eingeschriebenen Dreiecke tangieren einen zweiten Kegelschnitt, und seine duale Umkehrung anschließen, die später mit ihnen in Zusammenhang werden gebracht werden. Die beiden eingeschriebenen Dreiecke seien ABC, DEF. Wir schneiden die projektiven Würfe $A(B, C, E, F)$ und $D(B, C, E, F)$ bzw. mit EF und BC, wodurch sich ergibt:

$$LMEF \barwedge BCIK.$$

Also tangieren die beiden Träger EF und BC und die vier Verbindungslinien entsprechender Punke LB, MC, EI, FK oder AB, AC, DE, DF denselben Kegelschnitt.

Von den sechs Ecken eines eingeschriebenen Sechsecks $AA'BB'CC'$ 119
seien A und A', B und B', C und C' unendlich nahe, so daß die Seiten AA', BB', CC' die Tangenten in A, B, C sind; die Gegen-

seiten $B'C$, $C'A$, $A'B$ gehen auf der Grenze in die Seiten BC, CA, AB des eingeschriebenen Dreiecks ABC über. Also:

Die Tangenten in den Ecken eines einem Kegelschnitte eingeschriebenen Dreiecks schneiden die Gegenseiten in drei Punkten, die in gerader Linie liegen. Und dual:

Die Verbindungslinien der Berührungspunkte der Seiten eines Dreiecks, welches einem Kegelschnitte umgeschrieben ist, mit den Gegenecken laufen in einen Punkt zusammen.

Für den Kreis wurden diese projektiven Sätze in Nr. 52 ausgesprochen.

Wenn ein Kegelschnitt durch zwei projektive Punktreihen u, u' erzeugt wird, so berührt er diese Geraden in den Punkten F, E', welche dem gemeinsamen Punkt E, F' entsprechen (Nr. 93); ihre Verbindungslinie (die Polare von E) ist die involutorische Axe (Nr. 90).

Ist $\mathfrak{X}$ der Berührungspunkt der Tangente XX', so laufen nach dem eben erhaltenen Satze XE', $X'F$ und $E\mathfrak{X}$ in einen Punkt zusammen; das vollständige Viereck $E'FXX'$ zeigt dann, daß $\mathfrak{X}$, in bezug auf X und X', harmonisch ist zum Schnitte mit der involutorischen Axe.

Daher ist auf jeder Verbindungslinie entsprechender Punkte zweier projektiven Punktreihen der Berührungspunkt mit dem erzeugten Kegelschnitt dem Schnitt mit der involutorischen Axe harmonisch zugeordnet in bezug auf die beiden verbundenen Punkte, und, dual, die Tangente im Schnittpunkte entsprechender Strahlen projektiver Büschel an den erzeugten Kegelschnitt dem Strahle nach dem involutorischen Zentrum harmonisch zugeordnet in bezug auf die beiden sich schneidenden Strahlen.

Lassen wir bei dem eingeschriebenen Sechsecke $AECBFD$ die Punkte A und E, B und F unendlich nahe rücken, so werden die Gegenseiten AE, BF die Tangenten a, b in A, B, der Punkt (EC, FD) geht in (AC, BD) über, und es liegen ab, (AC, BD), (CB, DA) in gerader Linie; d. h. der Tangentenschnitt ab liegt auf derjenigen Diagonale des eingeschriebenen (vollständigen) Vierecks $ABCD$, durch deren gegenüberliegenden Diagonalpunkt (AB, CD) die Berührungssehne AB geht, und ebenso liegt der Tangentenschnitt cd auf dieser Diagonale, so daß sie auch Diagonale des zugehörigen umgeschriebenen Vierseits $abcd$ wird, also beide das nämliche Diagonaldreieck haben, wie schon in Nr. 109 gefunden wurde.

Man dualisiere diese Betrachtung.

120 Wenn auf den Seiten eines Dreiecks ABC drei Punkte A', B', C' liegen, deren Verbindungslinien mit den Gegen-

ecken in einen Punkt zusammenlaufen, so daß

$$1)\ \frac{BA'}{CA'}\cdot\frac{CB'}{AB'}\cdot\frac{AC'}{BC'}=-1,$$

so schneidet jeder durch diese drei Punkte gelegte Kegelschnitt die Seiten zum zweiten Male in Punkten A'', B'', C'', für welche dasselbe gilt. Weil $A'A''B'B''C'C''$ ein Pascalsches Sechseck ist, liegen die drei Punkte:

$$(A'A'', B''C') = \mathfrak{A},\quad (B'B'', C''A') = \mathfrak{B},\quad (C'C'', A''B') = \mathfrak{C}$$

auf den Seiten von ABC in gerader Linie; daher ist:

$$2)\ \frac{B\mathfrak{A}}{C\mathfrak{A}}\cdot\frac{C\mathfrak{B}}{A\mathfrak{B}}\cdot\frac{A\mathfrak{C}}{B\mathfrak{C}}=1,$$

und weil auch $B'', C', \mathfrak{A}$; $C'', A', \mathfrak{B}$; $A'', B', \mathfrak{C}$ je in gerader Linie liegen, haben wir:

$$3)\ \frac{B\mathfrak{A}}{C\mathfrak{A}}\cdot\frac{CB''}{AB''}\cdot\frac{AC'}{BC'}=1,\quad \frac{BA'}{CA'}\cdot\frac{C\mathfrak{B}}{A\mathfrak{B}}\cdot\frac{AC''}{BC''}=1,\quad \frac{BA''}{CA''}\cdot\frac{CB'}{AB'}\cdot\frac{A\mathfrak{C}}{B\mathfrak{C}}=1;$$

aus diesen Relationen 1) bis 3) folgt:

$$4)\ \frac{BA''}{CA''}\cdot\frac{CB''}{AB''}\cdot\frac{AC''}{BC''}=-1;$$

und umgekehrt, wenn die A'', B'', C'' dieselbe Eigenschaft haben, wie die A', B', C', so liegen die sechs Punkte $A', B', C', A'', B'', C''$ auf einem Kegelschnitte; denn aus 1), 4) und 3) folgt 2), d. h. die Geradlinigkeit von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$.

Die Berührungspunkte eines Kegelschnitts mit den Seiten eines Dreiecks, dem er eingeschrieben ist, haben diese Lage (Nr. 119).

Sind daher zwei Kegelschnitte demselben Dreiecke eingeschrieben, so liegen die sechs Berührungspunkte auf einem dritten Kegelschnitte.

Wir haben gefunden (Nr. 55), daß die drei Geraden aus einem Punkte O, welche je zwei Gegenkanten eines Tetraeders treffen, BC, AD in E, E', CA, BD in F, F', AB, CD in G, G', auf den Seiten der vier Dreiecke Punkte hervorrufen, welche der Relation des Ceva genügen, wobei die Konkurrenzpunkte die Schnitte von OA, OB, OC, OD mit den Gegenebenen sind, und daß umgekehrt, wenn auf den Kanten sechs Punkte liegen, welche in dreien der Dreiecke und dann auch im vierten jene Relation erfüllen, die sieben Geraden $AA', \ldots, DD', EE', \ldots, GG'$ in einen Punkt zusammenlaufen.

Liegen zwei derartige Punktgruppen $E, \ldots, G'$ und $E_1, \ldots, G_1'$ auf den Kanten des nämlichen Tetraeders, so befinden sich alle zwölf Punkte auf derselben Fläche 2. Grades.

Denn zunächst befinden sich die sechs auf den Kanten eines Dreiecks auf einem Kegelschnitte: $\mathfrak{K}_\alpha, \ldots, \mathfrak{K}_\delta$. Die Fläche 2. Grades, welche durch fünf beliebige Punkte von $\mathfrak{K}_\alpha$, drei beliebige von $\mathfrak{K}_\beta$, einen beliebigen Punkt von $\mathfrak{K}_\gamma$ geht, enthält damit von jedem dieser Kegelschnitte fünf Punkte, also sie ganz und damit auch den $\mathfrak{K}_\delta$, weil sechs Punkte von ihm.

Umgekehrt, wenn eine derartige Gruppe $E, \ldots, G'$ auf den Kanten eines Tetraeders vorliegt, so bilden die zweiten Schnittpunkte $E_1, \ldots, G_1'$ mit einer durch sie gehenden Fläche 2. Grades eine ebensolche Gruppe. Denn die vier Kegelschnitte, welche sie in $\alpha, \ldots, \delta$ einschneidet, bewirken, daß die dreipunktigen Gruppen der Beziehung von Ceva genügen.

Berührt eine Fläche 2. Grades die sechs Kanten des Tetraeders, so bilden die Berührungspunkte eine Gruppe der vorliegenden Art; denn in jeder der vier Ebenen wird der genannten Beziehung durch die betreffenden Punkte genügt.

Wenn also zwei Flächen 2. Grades die Kanten eines Tetraeders tangieren, so gehören die zwölf Berührungspunkte einer dritten Fläche 2. Grades an.[1])

§ 19. Fortsetzung der Sätze über Involutionen.

121 Der Kegelschnitt als Träger führt sehr einfach zur Umkehrung des Satzes (Nr. 86) über die Multiplikation zweier Involutionen I_1, I_2.

Für diesen Satz selbst gilt:

Die Projektivitätsaxe des Produkts P ist die Verbindungslinie der Zentren S_1, S_2.

In der Tat, in P sind X und X', Y und Y' entsprechend, wenn S_1X, S_2X' und S_1Y, S_2Y' sich auf dem Kegelschnitte treffen: in $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$. Dann lehrt das Pascalsche Sechseck $X\mathfrak{X}X'Y\mathfrak{Y}Y'$, daß XY' und $X'Y$ sich auf S_1S_2 treffen.

Es sei auf K eine mit Sinn behaftete Projektivität P gegeben:

$$ABCX \cdots \barwedge A'B'C'X' \cdots.$$

Die Projektivitätsaxe s werde konstruiert (Nr. 106); auf ihr liegen $P = (AB', BA')$, $Q = (AC', CA')$, $R = (BC', CB')$. Ist S_1 ein beliebiger Punkt von ihr, so sind die zweiten Schnitte von AS_1, $A'S_1$ mit K entsprechende Punkte D', D. Sind dann $B'', C'', X'', \ldots$ die

---

1) Steiner, Gesammelte Werke, Bd. I, S. 181. — Der analoge Satz, den Gergonne als vermutlich richtig diesem in den Annales de Mathématiques veröffentlichten Aufsatze Steiners hinzugefügt hat über die 12 Berührungspunkte von drei Flächen 2. Grades mit den Ebenen eines Tetraeders ist nicht richtig: Archiv für Math. und Phys. 3. Reihe Bd. 5, S. 9.

zweiten Schnitte von S_1 ($B, C, X, \ldots$) mit K, so haben wir die Involution I_1 mit dem Zentrum S_1:

$$ABCDX \cdots \barwedge D'B''C''A'X'' \cdots;$$

also ist:

$$A'B'C'D'X' \cdots \barwedge D'B''C''A'X'' \cdots.$$

Das ist eine Involution I_2, weil A' und D' sich doppelt entsprechen; ihr Zentrum ist $S_2 = (A'D', B'B'')$ und $C'C'', X'X'', \ldots$ gehen durch dasselbe. Es liegt ebenfalls auf s, denn das Pascalsche Sechseck $A'D'AB'B''B$ beweist, daß es mit $S_1 = (D'A, B''B)$ und $P = (AB', BA')$ in gerader Linie liegt. I_1 führt also $A, B, C, D, X, \ldots$ in $D', B'', C'', A', X'', \ldots$ über und I_2 diese in $A', B', C', D', X', \ldots$; also ist $I_1 \,.\, I_2 = P$.

Die beiden Zentren S_1, S_2 sind die Projektionen der entsprechenden Punkte X und X' aus dem beliebigen Punkte X'' von K auf die s.

Also: Eine auf einem Kegelschnitte befindliche Projektivität P wird auf ihre Projektivitätsaxe aus allen Punkten der Kurve in dieselbe Projektivität Π projiziert; zwei entsprechende Punkte sind immer Zentren von zwei Involutionen I_1, I_2, als deren Produkt die P aufgefaßt werden kann, und zwar derartig, daß ein Punkt der ersten Punktreihe von P (von welcher in die andere transformiert wird) in das Zentrum der Involution projiziert wird, welche die erste in der Reihenfolge der Faktoren ist.

Ist nun P selbst eine Involution I mit dem Zentrum S, wozu erforderlich ist, daß I_1 und I_2 sich stützen, so ist auch Π auf der Involutionsaxe s eine Involution und zwar die der konjugierten Punkte, und die Reihenfolge ist gleichgültig.

Die Zentren zweier sich stützenden Involutionen I_1, I_2 auf einem Kegelschnitte K[1]) sind konjugiert in bezug auf denselben, und ihr Produkt hat die dritte Ecke des Polardreiecks zum Zentrum, woraus unmittelbar hervorgeht, daß je zwei von diesen drei Involutionen sich stützen und die dritte zum Produkte haben. Die Quadrupel der Punkte auf K, welche in sie je zwei Paare liefern, bilden die eingeschriebenen Vierecke, für welche das Polardreieck das Diagonaldreieck ist; jeder Punkt von K liefert eins.

Ein Büschel von Involutionen auf K (Nr. 85) wird durch alle diejenigen gebildet, deren Zentren eine Gerade erfüllen

1) R. Böger nennt in seiner Ebenen Geometrie der Lage (Sammlung Schubert VII), 1900, von zwei sich stützenden Involutionen jede die resultierende der andern (§ 13); alle, auf welche eine Involution sich stützt, für welche sie die resultierende ist, heißen dann die komponierenden.

und deren Axen durch deren Pol gehen; dieser Pol ist das Zentrum derjenigen Involution, auf welche sich alle stützen.

Die Beziehung bleibt bestehen, wenn die Involutionen aus einem Punkte des Kegelschnitts projiziert, oder auch die je auf der Axe gelegenen Involutionen konjugierter Punkte (Nr. 111).

Das Netz der sämtlichen von K getragenen Involutionen bildet sich in das Punktfeld der Zentren oder das Geradenfeld der Axen ab; und die Erzeugung des Netzes durch Büschel (Nr. 85) ergibt sich aus der Erzeugung etwa des Geradenfeldes aus drei Geraden durch die Büschel, welche eine von ihnen mit den Strahlen des Büschels der beiden andern verbinden.

Beim Kegelschnitt als Träger ist leicht der Punkt X anzugeben, welcher die Involution (AX, BY, CZ) liefert, die auf zwei gegebene Involutionen sich stützt (Nr. 85). Sind in diesen dem A die Punkte B, C und dem beweglichen X die Y, Z gepaart, so durchlaufen (AX, BY), (AX, CZ) die Axen, und der Schnittpunkt derselben ist das Zentrum der gesuchten Involution und liefert mit A verbunden den X.

122 Die drei Gegenseiten-Paare eines vollständigen Vierecks $ABCD$ werden von einer Transversale in drei Punktepaaren in Involution geschnitten (Nr. 46). Jeder Kegelschnitt durch die Ecken gibt in seinen Schnitten ein weiteres Paar der Involution.

Wenn die Transversale die Gegenseiten AC, BD; AD, BC in E, E'; F, F' und den Kegelschnitt in X, X' trifft, so ist, weil A, B, C, D, X, X' auf diesem liegen:

$$A(C, D, X, X') \barwedge B(C, D, X, X');$$

also auf der Transversale:

$$EFXX' \barwedge F'E'XX' \barwedge E'F'X'X;$$

was bedeutet, daß EE', FF', XX' in Involution sind (Nr. 70).

Damit ergibt sich die Fundamentaleigenschaft des Büschels von Kegelschnitten durch vier Punkte, zunächst für vier reelle Grundpunkte.

123 Der Satz, daß bei drei verbundenen Punktinvolutionen drei in gerader Linie liegenden Punkten drei ebenso beschaffene Punkte gepaart sind, läßt sich verallgemeinern.

Drei beliebige Paare AA', BB', CC' aus drei verbundenen Involutionen $(\mathfrak{a})$, $(\mathfrak{b})$, $(\mathfrak{c})$ liegen immer auf einem Kegelschnitte.

Die Geradenpaare $(AB, A'B')$, $(AB', A'B)$ des Büschels $(AA'BB')$ schneiden in $\mathfrak{c}$ Punktepaare der Involution $(\mathfrak{c})$, also tun es nach dem obigen Satze auch die übrigen Kegelschnitte; d. h. der durch C gehende geht durch C'.

Oder, wenn $AB, A'B'$ die $\mathfrak{c}$ in dem Paare C_1, C_1' der ($\mathfrak{c}$) schneiden, so gibt diese Involution, zu der auch $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ und CC' gehören:

$$\mathfrak{A}C_1CC' \barwedge \mathfrak{B}C_1'C'C \barwedge C_1'\mathfrak{B}CC';$$

also:

$$B(\mathfrak{A}, C_1, C, C') \barwedge A'(C_1', \mathfrak{B}, C, C');$$

oder:

$$B(B', A, C, C') \barwedge A'(B', A, C, C');$$

womit ausgesagt ist, daß die sechs Punkte dem nämlichen Kegelschnitte angehören.

Für jeden Kegelschnitt durch A, A', B, B' sind die Doppelpunkte von ($\mathfrak{a}$) und ($\mathfrak{b}$) konjugiert; also ist das Vierseit, dessen Ecken die sechs Doppelpunkte sind (Nr. 82), für ihn ein Polvierseit und nach Hesses Satz (Nr. 112) sind auch die Doppelpunkte auf $\mathfrak{c}$ konjugiert, und der Kegelschnitt geht durch ein Paar von ($\mathfrak{c}$).

Umgekehrt, ein Kegelschnitt determiniert durch seine Schnittpunkte mit den Seiten eines Dreiecks drei verbundene Involutionen auf denselben.

Jede derselben stützt sich auf die auf ihrer Seite befindliche Involution konjugierter Punkte und ist dadurch und das Eckenpaar bestimmt.

Noch allgemeiner gilt: Schneidet ein Kegelschnitt K die drei Geraden $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ in A, A_1; B, B_1; C, C_1, so liegen die diesen Punkten in ($\mathfrak{a}$), ($\mathfrak{b}$), ($\mathfrak{c}$) gepaarten Punkte A', A_1'; B', B_1'; C', C_1' wiederum auf einem Kegelschnitte K'.

Denn es ist wegen K:

$$A(B, B_1, C, C_1) \barwedge A_1(B, B_1, C, C_1);$$

weil aber die Büschel um gepaarte Punkte A, A' von ($\mathfrak{a}$) projektiv sind mit solchen Strahlen als entsprechenden, die nach gepaarten Punkten von ($\mathfrak{b}$) oder ($\mathfrak{c}$) gehen, so ist:

$$A(B, B_1, C, C_1) \barwedge A'(B', B_1', C', C_1'),$$

$$A_1(B, B_1, C, C_1) \barwedge A_1'(B', B_1', C', C_1');$$

also:

$$A'(B', B_1', C', C_1') \barwedge A_1'(B', B_1', C', C_1');$$

dies beweist die Behauptung.

Man nennt zwei Geraden, welche die $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ in gepaarten Punkten ihrer Involutionen treffen, sowie auch zwei Kegelschnitte wie K und K' konjugiert; ein Kegelschnitt, welcher durch drei Paare von ($\mathfrak{a}$), ($\mathfrak{b}$), ($\mathfrak{c}$) geht, ist also sich selbst konjugiert.

Sechs Paare aus sechs verbundenen Involutionen auf den Kanten eines Tetraeders (Nr. 84) liegen stets auf einer Fläche 2. Grades.

Denn die drei Paare in jeder der vier Ebenen liegen auf einem Kegelschnitte, und diese vier Kurven, von denen je zwei zwei Punkte gemein haben, befinden sich auf derjenigen Fläche 2. Grades, welche von einer von ihnen fünf Punkte, von einer zweiten drei weitere (außer den gemeinsamen), von einer dritten einen weiteren Punkt enthält.

Umgekehrt, ruft jede Fläche 2. Grades auf den sechs Kanten eines Tetraeders sechs verbundene Involutionen hervor.

Schneidet man die sechs Kanten mit einer beliebigen Fläche 2. Grades, so sind die zwölf Punkte, die den Schnitten in verbundenen Involutionen auf den Kanten gepaart sind, wiederum auf einer Fläche zweiten Grades gelegen; denn den Kegelschnitten, in denen jene Fläche die Ebenen schneidet, sind Kegelschnitte konjugiert, immer mit zwei gemeinsamen Punkten auf der Schnittkante, so daß, wie oben, eine Fläche 2. Grades durch sie geht.

Drei verbundene Strahleninvolutionen (𝔄), (𝔅), (ℭ) rufen auf einem dem Dreiecke 𝔄𝔅ℭ umgeschriebenen Kegelschnitte 𝔎 drei Involutionen hervor, deren Zentren $S_{\mathfrak{A}}$, $S_{\mathfrak{B}}$, $S_{\mathfrak{C}}$, auf den Seiten 𝔞, 𝔟, 𝔠 befindlich, in gerader Linie liegen und welche demselben Büschel angehören.

Sind etwa (𝔅) und (ℭ) elliptisch, so liegen $S_{\mathfrak{B}}$, $S_{\mathfrak{C}}$ innerhalb, die Verbindungslinie trifft 𝔎 reell in 𝔏, 𝔏′; nach diesen Punkten gehen gepaarte Strahlen aus (𝔅) und aus (ℭ), daher auch aus (𝔄); 𝔏, 𝔏′ sind also in allen drei Involutionen auf 𝔎 gepaart und 𝔏𝔏′ enthält auch $S_{\mathfrak{A}}$. Die Involution auf 𝔎 mit den Doppelpunkten 𝔏, 𝔏′ stützt sich auf alle drei Involutionen.

Im andern Falle, wo (𝔄), (𝔅), (ℭ) alle hyperbolisch sind, benutzen wir das reelle Viereck, dessen Gegenseiten-Paare aus den Doppelstrahlen bestehen, sie schneiden den 𝔎 nach Nr. 112 in drei Paaren DD_1, EE_1, FF_1 in Involution. Diese Punkte sind die Doppelpunkte der in 𝔎 eingeschnittenen Involutionen; also sind DD_1, EE_1, FF_1 deren Axen; wegen jener Involution gehen sie durch einen Punkt, und seine Polare enthält die drei Zentren.

Die Involution DD_1, EE_1, FF_1 ist die, auf welche sie sich alle drei stützen.

124 Um die Punkte C, C' eines festen Paars der einen von drei verbundenen Involutionen (𝔞), (𝔟), (𝔠) entstehen projektive Büschel, in denen, wenn AA' irgend ein Paar von (𝔞) ist, sowohl CA und $C'A'$, als CA' und $C'A$ entsprechend sind; sind X, X' die Schnitte dieser entsprechenden Strahlen, so ist $CC'XX'$ ein Viereck, welches dem durch die Büschel erzeugten Kegelschnitte eingeschrieben ist; A, A' sind Diagonalpunkte desselben, also konjugiert in bezug auf ihn; daher ist (𝔞) die dem Kegelschnitte zugehörige Involution konjugierter

Punkte auf $\mathfrak{a}$; und ($\mathfrak{b}$) hat dieselbe Eigenschaft, weil jene entsprechenden Strahlen stets nach gepaarten Punkten von ihr gehen.

Durchläuft CC' die Involution ($\mathfrak{c}$), so erhält man ∞^1 Kegelschnitte, zu denen allen die ($\mathfrak{a}$) und ($\mathfrak{b}$) als Involutionen konjugierter Punkte gehören; es entsteht ein Büschel mit den Doppelpunkten dieser Involutionen als Grundpunkten; für konjugiert imaginäre ist dann die betreffende Involution die darstellende.

Die dritte Involution ($\mathfrak{c}$) verhält sich anders zum Büschel; sie ist die Schnittinvolution desselben mit $\mathfrak{c}$. Dabei ist zu bemerken, daß im Falle von vier reellen Grundpunkten, wo ($\mathfrak{c}$) hyperbolisch ist, die reell-punktigen Paare dieser Involution nicht hinreichen, um alle reellen Kegelschnitte des Büschels zu erzeugen; wohl aber in den beiden andern Fällen, wo ($\mathfrak{a}$) und ($\mathfrak{b}$) ungleichartig oder beide elliptisch sind. Im ersteren ist ($\mathfrak{c}$) elliptisch und hat nur reell-punktige Paare; alle reellen Kegelschnitte treffen $\mathfrak{c}$ reell. Im andern Falle besitzt die hyperbolische ($\mathfrak{c}$) wohl Paare mit konjugiert imaginären Punkten; aber diese rühren von imaginären Kurven des Büschels her, nicht von reellen wie beim Büschel mit reellen Grundpunkten. Sei also CC' ein Paar von ($\mathfrak{c}$) und K der Kegelschnitt des Büschels, zu dem es führt; u eine Transversale, welche $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ in A, B, C_1 trifft, und A', B' den A, B in ($\mathfrak{a}$), ($\mathfrak{b}$) gepaart, so lehren die sechs Punkte $ABCA'B'C'$, die einem Kegelschnitte angehören, daß $S = (AB, A'B')$, $P = (CB, C'B')$ und $Q = (CA,', C'A)$ in gerader Linie liegen. P und Q befinden sich auf dem durch die Büschel C und C' erzeugten Kegelschnitt, also ist, wenn X, X' dessen Schnitte mit u sind:

$$C(C', P, X, X') \barwedge Q(C', P, X, X'),$$

daher auf u:

$$C_1 BXX' \barwedge ASXX' \barwedge SAX'X;$$

also sind die X, X' mit den festen Paaren AB, $C_1 S$ in Involution; womit der Fundamentalsatz auch für die andern Fälle des Büschels bewiesen ist[1]).

In Nr. 85 wurde eine Involution I_1 durch eine andere I_2 in eine dritte $\bar{I}_1$ transformiert, indem zu den Elementen jedes Paares von I_1 die in I_2 gepaarten aufgesucht werden, welche dann ein Paar in $\bar{I}_1$ bilden. Nehmen wir einen Kegelschnitt K als Träger, so seien S_1, s_1; S_2, s_2; $\bar{S}_1, \bar{s}_1$ die Zentren und Axen. Weil I_2 die Doppelpunkte von I_1 in die von $\bar{I}_1$ überführt, so ist S_2 ein Diagonalpunkt des Vierecks dieser vier Doppelpunkte oder der Doppelpunkt eines

1) Vgl. dazu Steiner-Schröters Vorlesungen 3. Aufl., § 42, sowie den vierten Abschnitt. — Von diesem Falle, wo die drei Involutionen nicht alle gleichartig entstehen, rührt Bögers Benennung: Involutionen auf zwei Gegenseiten und ihre diagonale Involution her (a. a. O. § 11).

zweiten Geradenpaars in dem Kegelschnitt-Büschel, der durch K und das Geradenpaar der Axen s_1, $\bar{s}_1$ bestimmt ist.

Es gibt demnach zwei Involutionen I_2, I_2', welche I_1 und $\bar{I}_1$ ineinander überführen; ihre Zentren S_2, S_2' sind die Doppelpunkte der beiden andern Geradenpaare im Büschel $(K, s_1\bar{s}_1)$.

Alle vier Zentren S_1, $\bar{S}_1$, S_2, S_2' liegen auf der Polare $\mathfrak{s}$ des Punktes $s_1\bar{s}_1$; auf ihr liegen zwei sich stützende Involutionen: die Involution der konjugierten Punkte von K mit den Paaren:

$$S_1\mathfrak{S}_1,\ \bar{S}_1\bar{\mathfrak{S}}_1,\ MM,\ NN,\ S_2S_2',$$

wo M, N, $\mathfrak{S}_1$, $\bar{\mathfrak{S}}_1$ die Schnitte mit K und s_1, $\bar{s}_1$ sind, und die Schnittinvolution mit dem Kegelschnitt-Büschel, welche den gemeinsamen Involutionen konjugierter Punkte auf s_1, $\bar{s}_1$ verbunden ist und in der gepaart sind:

$$MN,\ \mathfrak{S}_1\bar{\mathfrak{S}}_1,\ S_2S_2,\ S_2'S_2';$$

folglich sind in der letzteren auch S_1, $\bar{S}_1$ gepaart; wir können also die Zentren S_2, S_2' der überführenden Involutionen auch definieren als die Doppelpunkte der Involution $S_1\bar{S}_1$, $\mathfrak{S}_1\bar{\mathfrak{S}}_1$, wenn wir die Punkte M, N, als eventuell imaginär, umgehen wollen.

Die Schnittinvolution auf $\mathfrak{s}$ und die Involutionen konjugierter Punkte auf s_1, $\bar{s}_1$, welche mit denen auf K, welche diese Geraden zu Axen haben, gleichartig sind (Nr. 111), sind, wie eben gesagt, verbundene Involutionen; also sind alle drei hyperbolisch oder nur eine.

Daher sind, wie notwendig, die Zentren S_2, S_2' und die zugehörigen Involutionen I_2, I_2' reell oder imaginär, je nachdem I_1, $\bar{I}_1$ gleichartig sind oder nicht.

Wenn zwei Kegelschnitte K und K_1 gegeben sind, so seien p, p_1 die Polaren eines Punktes P. Wir konstruieren auf den Strahlen l durch P die den Punkten lp in bezug auf K_1 konjugierten Punkte; sie bilden einen Kegelschnitt $\mathfrak{K}_1$, erzeugt durch die projektiven Büschel um P und um den Pol Q_1 von p nach K_1; weil in diesen dem Strahle von P nach pp_1 der Strahl Q_1P entspricht, so berührt $\mathfrak{K}_1$ jenen Strahl in P. Dasselbe tut der Kegelschnitt $\mathfrak{K}$, welcher die zu den Punkten lp_1 in bezug auf K konjugierten Punkte enthält. Also haben diese Kurven $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}_1$ noch zwei Punkte gemein. Auf dem Strahle aus P nach einem derselben, S, geht das Paar $P, (PS, p)$ der Involution konjugierter Punkte für K durch diejenige, die zu K_1 gehört, über in (PS, p_1), S, welche wiederum für K konjugiert sind. Die beiden Involutionen stützen sich; die einen Doppelpunkte sind zu den andern harmonisch. Die Geraden, welche die beiden gegebenen Kegelschnitte harmonisch schneiden, umhüllen also einen dritten Kegelschnitt, von dem man leicht erkennen wird, daß er die acht Tangenten der vier gemeinsamen Punkte berührt.

§ 20. Aufgaben ersten und zweiten Grades.

Postulate oder Forderungen der Konstruktionsgeometrie in der Ebene sind: daß man zwei Punkte durch eine Gerade verbinden, zwei Geraden zum Schnitte bringen und daß man die beiden Schnittpunkte einer Gerade und eines Kreises oder zweier Kreise — wofern sie reell sind — ermitteln kann. 125

Aufgaben, welche nur eine Lösung haben, lassen sich auf die beiden ersten, also auf die bloße Benutzung der Lineals zurückführen und heißen ersten Grades oder linear; für Aufgaben, welche zwei Lösungen haben, ist im allgemeinen die Heranziehung der beiden andern Postulate, also auch der Zirkel notwendig; sie heißen vom zweiten Grade oder quadratisch; die algebraische Behandlung führt in jenem Fall zu einer Gleichung 1. Grades, in diesem zu einer Gleichung 2. Grades.

Um eine endliche Anzahl von Lösungen zu haben, muß man (was in der Elementargeometrie vielfach nicht geschieht) die Aufgabe so präzisieren, daß auch die Lage bestimmt wird. Wenn z. B. nur verlangt wird, ein einem gegebenen Dreiecke ABC ähnliches Dreieck $A'B'C'$ zu konstruieren, so sind unendlich viele Lösungen möglich; wenn aber vorgeschrieben wird, daß die Seite $A'B'$ nach Größe und Lage gegeben sei, dann erhält die Aufgabe zwei Lösungen und erweist sich als quadratisch.

Steiner hat in seinen „Geometrischen Konstruktionen, ausgeführt mittels der geraden Linie und eines festen Kreises"[1]) gezeigt, daß man bei quadratischen Aufgaben mit einem einzigen der Größe und Lage von vornherein (vor Stellung der jedesmaligen Aufgabe) gegebenen Kreise auskommen kann.

Die Aufgabe, durch einen gegebenen Punkt zu einer gegebenen Gerade die Parallele zu ziehen, ist nach der perspektiven Raumanschauung nur die Verbindung zweier Punkte, von denen der eine unendlich fern ist, also linear; sie muß jedoch wegen des beschränkten Zeichenraums, der den unendlich fernen Punkt nicht enthält, quadratisch gelöst werden; sie kann aber sofort linear gelöst werden, wenn der unendlich ferne Punkt als Schnitt zweier parallelen Geraden gegeben ist (Steiner a. a. O. S. 471).

---

1) Berlin 1833; Gesammelte Werke Bd. I, S. 461; Klassiker der exakten Wissenschaften Nr. 60. — Mascheroni hat in seiner Geometria del compasso (1797) nur den Zirkel benutzt, das Lineal ausgeschlossen. Derartige Bestrebungen gehen bis auf Lionardo da Vinci zurück; vgl. auch: Adler, Wiener Sitzungsberichte, Bd. 99 (1890), S. 846, 910.

Vor allem ist jetzt hinzuweisen auf die während des Drucks erschienene von F. Enriques herausgegebene Sammelschrift: Fragen der Elementargeometrie, Teil II, Die geometrischen Aufgaben, ihre Lösung und Lösbarkeit. (Deutsch von H. Fleischer, 1907.)

Aufgaben mit mehr als zwei Lösungen lassen sich im allgemeinen nicht auf jene Postulate zurückführen und gelten als „nicht lösbar“. Es ist aber bisweilen möglich, die Lösungen in Gruppen zu zerlegen, von denen jede für sich allein behandelt werden kann. So hat das Apollonische Problem: die Kreise zu konstruieren, welche drei gegebene Kreise berühren, acht Lösungen. Diese bilden aber vier Paare, und jedes Paar kann, unabhängig von den andern, konstruiert werden; infolge dessen hat man es mit vier quadratischen Aufgaben zu tun; die Gleichung 8. Grades, zu welcher die algebraische Behandlung führt, läßt sich in vier quadratische zerlegen. Das gilt z. B. auch für die Siebenzehnteilung des Kreises[1]). In Nr. 80 und 81 hat es sich auch um Aufgaben 4. Grades gehandelt, welche in je zwei quadratische zerfallen. Dagegen ist die Dreiteilung eines beliebigen Winkels eine nicht auf niedrigeren Grad reduzierbare kubische Aufgabe und daher im obigen Sinne nicht lösbar[2]).

126 Lineare Aufgaben sind das Konstruieren von weiteren Punkten eines Kegelschnitts, wenn fünf Punkte desselben gegeben sind, oder von weiteren Tangenten, wenn fünf Tangenten gegeben sind, wofern folgende genauere Bestimmung stattfindet: der sechste Punkt soll der zweite Punkt des Kegelschnitts mit einer gegebenen Gerade sein, welche durch einen der gegebenen Punkte geht, bzw. die sechste Tangente soll die zweite Tangente sein aus einem gegebenen Punkte, der auf einer der gegebenen Tangenten liegt; zur Lösung dienen die Sätze von Pascal und Brianchon.

Die fünf gegebenen Punkte seien A, B', C, A', B, der gesuchte sei C', und die gegebene Gerade l, auf der er liegen soll, sei durch B gelegt, wodurch er in der Reihenfolge $AB'CA'BC'$ der Nachbar von B und l Seite des Sechseck wird[3]).

Von der Pascalschen Gerade p lassen sich sofort:

$$(AB', A'B) = P \text{ und } (B'C, BC') = (B'C, l) = Q$$

konstruieren; demnach ist der dritte Punkt $R = (CA', C'A)$ der Schnitt von PQ mit CA', also liegt C' auf $l' = RA$ und ist der Schnitt mit l.

---

1) Vgl. z. B. Schröter, Journal f. Mathematik, Bd. 75, S. 13, sowie Artikel V, VI in dem Buche von Enriques.

2) In den Preisarbeiten von Kortum (Über geometrische Aufgaben 3. und 4. Grades, Bonn 1869) und Henry J. S. Smith (Annali di Matematica, Ser. II, Bd. 3: Mémoire sur quelques problèmes cubiques et biquadratiques) wird gezeigt, daß, falls ein fester Kegelschnitt (der nicht Kreis ist) ein für alle Male gezeichnet vorliegt, sich alle kubischen und biquadratischen Aufgaben mit alleiniger Hilfe von Zirkel und Lineal ausführen lassen.

Die geometrischen Konstruktionen 3. und 4. Grades, ausgeführt mittels der geraden Linie und einer festen Kurve 3. Ordnung, hat London behandelt: Zeitschr. für Math. und Phys., Bd. 41, S. 129.

3) Danach ist die Reihenfolge (und Benennung) einzurichten.

Bewegt sich l um B, so bewegt sich l' projektiv um A; denn l und Q bewegen sich perspektiv um B und auf $B'C$, dann Q und p perspektiv auf $B'C$ und um P, p und R um P und auf CA', endlich R und l' perspektiv auf CA' und um A.

Dual, es seien die fünf Tangenten a, b', c, a', b gegeben und auf b der Punkt L, durch den die sechste Tangente c' gehen soll. Wir konstruieren die Geraden $(ab', a'b) = p$, $(b'c, L) = q$, $(ca', pq) = r$; dann ist c' die Gerade von L nach $L' = ra$.

Wir heben einige Spezialfälle hervor. Anstelle von fünf Punkten seien vier Punkte und die Tangente in einem von ihnen gegeben. Dieser sei etwa A, so hat sich sein Nachbar B' in der Reihenfolge des Sechsecks mit ihm derartig vereinigt, daß die verbindende Sechseckseite AB' die gegebene Tangente a in A ist; es ist dann $(a, A'B) = P$, $(AC, l) = Q$ usw. Im dualen Falle sind vier Tangenten a, c, a', b und der Berührungspunkt A von a, der Schnittpunkt der unendlich nahen b', gegeben.

Man lasse zwei solche Vereinigungen eintreten, den Kegelschnitt also gegeben sein durch drei Punkte und die Tangenten in zweien von ihnen, durch drei Tangenten und die Berührungspunkte von zweien.

Oder, wenn wieder fünf Punkte A, B', C, A', B gegeben sind und die Tangente in einem von ihnen konstruiert werden soll, so sei dieser B genannt, damit der sechste Punkt C' in der bisher üblichen Reihenfolge benachbart sei; er ist mit C' identisch und gesucht ist die Verbindungslinie BC'. Wir haben dann

$$(AB', A'B) = P, \ (CA', C'A) = (CA', BA) = R, \ (B'C, PR) = Q,$$

und nach Q geht die gesuchte Tangente BC'. Und dual wird man, wenn a, b', c, a', b gegeben sind, auf b den Berührungspunkt konstruieren.

Für eine Hyperbel kann man als einen der Punkte den einen der beiden unendlich fernen Punkte geben, vermittelst einer Gerade, auf der er liegt, die dann der betreffenden Asymptote parallel ist, so daß die eine Asymptotenrichtung gegeben ist. Es sind dann eben die nach diesem Punkt zu ziehenden Geraden parallel zu jener ihn bestimmenden Gerade zu legen. Man ist auch imstande, die genannte Asymptote zu konstruieren. Und umgekehrt kann diese gegeben sein. Man gebe z. B. beide Asymptoten und einen endlichen Punkt für die Hyperbel, konstruiere weitere Punkte und die Tangente des endlichen Punktes.

Für eine Parabel ist die unendlich ferne Gerade gegebene Tangente; durch vier endliche Tangenten ist sie also eindeutig bestimmt; man konstruiere weitere Tangenten und für jede der gegebenen, insbesondere die unendlich ferne den Berührungspunkt.

Linear sind auch folgende Aufgaben: In bezug auf einen durch fünf Punkte gegebenen Kegelschnitt zu einem ge-

gebenen Pole P die Polare zu konstruieren und umgekehrt, und die dualen. Wenn P gegeben ist, so hat man ein vollständiges Viereck der Kurve einzubeschreiben, von dem P ein Diagonalpunkt ist, also auf den Geraden, die von P nach zwei von den gegebenen Punkten gehen, die zweiten Schnitte zu konstruieren. Die beiden andern Diagonalpunkte des so erhaltenen Vierecks geben verbunden die Polare p. Man kann auch, was aber weniger einfach ist, auf den beiden Sekanten die vierten harmonischen Punkte konstruieren. Ist hingegen p gegeben, so konstruiere man für zwei Punkte auf ihr die Polaren; ihr Schnitt ist der Pol P von p. Im dualen Falle ist diese Aufgabe die einfachere.

Die linearen Aufgaben: Das vierte harmonische Element zu drei Elementen, das sechste Element in Involution zu fünf Elementen, bei gegebener Zuordnung, zu konstruieren, sind schon früher (Nr. 46, 47) erörtert. Linear ist natürlich auch die Ermittelung des entsprechenden Elements zu einem gegebenen, wenn für zwei projektive Gebilde drei Paare entsprechender Elemente gegeben sind (Nr. 34, 89).

127 Quadratisch hingegen sind die beiden Aufgaben, den durch fünf Punkte U, U', A, B, C gegebenen Kegelschnitt mit einer beliebigen Gerade o zu schneiden, an den durch fünf Tangenten u, u', a, b, c bestimmten Kegelschnitt die beiden Tangenten aus einem beliebigen Punkte O zu legen. Wir haben im ersten Falle die projektiven Büschel: $U(A, B, C) \barwedge U'(A, B, C)$, welche den Kegelschnitt erzeugen, mit der Gerade o zu schneiden, erhalten für die eingeschnittenen konjektiven Punktreihen drei Paare entsprechender Punkte:

$$\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{C} \barwedge \mathfrak{A}'\,\mathfrak{B}'\,\mathfrak{C}',$$

und ebenso im zweiten Falle drei Paare entsprechender Strahlen konjektiver Büschel um O, die nach ua und $u'a$, ub und $u'b$, uc und $u'c$ gehen. Jedesmal sind die Koinzidenzelemente herzustellen.

Damit werden wir zu der Fundamental-Aufgabe geführt, auf welche zahlreiche quadratische Aufgaben hinauslaufen deren Lösung von Steiner stammt[1]) und auf welche schon in Nr. 96 hingewiesen wurde.

Die Koinzidenzelemente zweier konjektiver Gebilde zu konstruieren.

Wir nehmen zunächst an, daß konjektive Strahlenbüschel vorliegen:

$$a\,b\,c \barwedge a'\,b'\,c'.$$

Wir benutzen denjenigen Kegelschnitt, der nach dem einen Postulate mit einer Gerade stets geschnitten werden kann: den Kreis.

1) Gesammelte Werke, Bd. I, S. 284.

In einen durch den Scheitel U der beiden Büschel gelegten Kreis schneiden sie konjektive Punktreihen ein, derartig, daß, wenn $A, .. C'$ die zweiten Schnitte jener Strahlen sind:

$$ABC \barwedge A'B'C.$$

Durch zwei von den Punkten $(AB', A'B)$, $(BC', B'C)$, $(CA', C'A)$ konstruieren wir die Projektivitätsaxe s (Nr. 106); ihre Schnitte mit dem Kreise sind die Koinzidenzen der krummen Punktreihen und nach ihnen gehen diejenigen der Strahlenbüschel.

Wir werden gleich über die repräsentierende Involution sprechen, welche für den Fall imaginärer Schnitte erwünscht ist.

Die Punktreihen-Aufgabe könnte dual gelöst werden; da aber die erforderlichen Aufgaben: an eine gegebene Gerade tangential einen Kreis zu legen, an einen gegebenen Kreis von einem Punkte einer gegebenen Tangente die zweite Tangente oder aus einem beliebigen Punkte beide Tangenten zu legen, viel umständlicher sind als die dualen, so zieht man es vor, die konjektiven Punktreihen in konjektive Strahlenbüschel zu verwandeln und deren Koinzidenzen mit dem Träger zu schneiden.

Der Fundamental-Aufgabe subsumiert sich die andere: für eine durch zwei Elementenpaare AA', BB' bestimmte Involution die Doppelelemente zu konstruieren; sie sind die Koinzidenzelemente der Projektivität:

$$ABA' \barwedge A'B'A.$$[1]

Fallen die Koinzidenzen der allgemeinen Konjektivität imaginär aus, so gelangt man zu der repräsentierenden Involution auf die in Nr. 75, 116 besprochene Weise, oder, wenn wiederum zunächst der Fall konjektiver Strahlenbüschel um U angenommen wird, indem zu den beiden konjektiven Punktreihen auf dem Kreise durch U die Involution hergestellt wird, deren Axe mit der Axe s der Projektivität zusammenfällt, wodurch ihre Doppelpunkte mit den Koinzidenzen dieser identisch werden. Beliebige Tangentenpaare aus Punkten der s geben in den Berührungspunkten gepaarte Punkte, oder einfacher, man konstruiert den Pol S von s und legt durch ihn Sekanten des Kreises. Diese Involution (oder zwei Paare) projiziert man in den Büschel U bzw. wenn es sich um eine Punktreihe handelt, aus U auf diese.

1) Da sie das gemeinsame harmonische Paar zu AA', BB' bilden, so möge noch folgende andersartige Konstruktion erwähnt werden. Zwei sich orthogonal schneidende Kreise werden von jedem Durchmesser eines von ihnen harmonisch geschnitten und umgekehrt. Über AB und $A'B'$ als Durchmessern konstruiere man die Kreise, ziehe aus einem beliebigen Punkte O die Durchmesser und konstruiere auf ihnen die Punkte Q, Q', die von O durch die Endpunkte harmonisch getrennt werden; der Kreis OQQ' schneidet in $ABA'B'$ die gesuchten Punkte ein.

128 Es seien zwei Kegelschnitte K, K' gegeben durch zwei gemeinsame Punkte U, U_1 und je drei weitere Punkte A, B, C, bzw. A', B', C'. Wir haben dann die beiden erzeugenden Projektivitäten:

$$\Pi \quad U(A, B, C) \barwedge U_1(A, B, C),$$
$$\Pi' \quad U(A', B', C') \barwedge U_1(A', B', C').$$

Sie rufen in einem der Büschel U eine Konjektivität $\mathfrak{P}$ hervor, in der zwei Strahlen dieses Büschels einander zugeordnet sind, welche in Π und Π' dem nämlichen Strahle von U_1 korrespondieren, also nach den zweiten Schnitten dieses Strahles mit K und K' gehen. Konstruieren wir für die Strahlen $U_1(A, B, C)$ die zweiten Schnitte mit K', nach denen dann aus U die Strahlen $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ gehen mögen, so ist $\mathfrak{P}$:

$$U(A, B, C) \barwedge \bar{a}\bar{b}\bar{c}.$$

Wir stellen nun die beiden Koinzidenzstrahlen von $\mathfrak{P}$ her; ein solcher Strahl m entspricht in beiden Projektivitäten Π und Π' dem nämlichen Strahle von U_1 und schneidet sich mit ihm in einem weiteren gemeinsamen Punkte von K und K', den man dann einfacher als zweiten Schnitt von K (oder K') mit m erhält.

Zwei Kegelschnitte, welche zwei (zunächst reell vorausgesetzte) Punkte gemeinsam haben, haben noch zwei andere (reelle oder imaginäre) Punkte gemein.[1])

Sind die Koinzidenzstrahlen imaginär, so liefert ihre darstellende Involution auf jedem der beiden Kegelschnitte die Involution, welche die beiden weiteren Schnitte repräsentiert.

Wenn weniger als zwei gemeinsame Punkte bekannt sind, so liegt eine kubische oder biquadratische, also mit Lineal und Zirkel nicht zu lösende Aufgabe vor.[2]) Alle Versuche, die Aufgabe der Dreiteilung eines Winkels zu lösen, haben auf die Aufgabe geführt: für zwei Kegelschnitte, von denen ein gemeinsamer Punkt bekannt ist, die drei andern Schnittpunkte zu konstruieren; sie hat im Altertum zur Entstehung der Kegelschnitts-Lehre wesentlich beigetragen.

Die Fundamental-Aufgabe, die Koinzidenzelemente zweier konjektiven Gebilde zu konstruieren, wird linear, wenn eins derselben bekannt ist. Von zwei konjektiven Strahlenbüscheln U seien bekannt der Koinzidenzstrahl $m \equiv m'$ und die weiteren entsprechenden Strahlen a, a'; b, b'. Man schneide sie mit zwei auf m sich treffenden Geraden u, u' in projektiven Punktreihen, welche perspektiv sind, weil uu'

1) Daß die bekannten gemeinsamen Punkte auch konjugiert imaginäre sein können, läßt der Fall von zwei Kreisen vermuten, die stets die absoluten Punkte gemeinsam haben, und zwei weitere (reelle oder imaginäre) auf der Potenzlinie.

2) Steiner-Schröters Vorlesungen, § 54.

sich selbst entspricht. Das Zentrum S ist der Schnitt der Verbindungslinien $(ua, u'a')$, $(ub, u'b')$; US ist ersichtlich der zweite Koinzidenzstrahl (vgl. auch Nr. 71).

Wir behandeln noch zwei Schließungsprobleme, welche auf 129
die Fundamental-Aufgabe hinausgehen. Ein Dreieck soll so konstruiert werden, daß die Ecken A, A_1, A_2 auf den gegebenen Geraden u, u_1, u_2 liegen und die Seiten A_1A_2, A_2A, AA_1 durch die gegebenen Punkte U, U_1, U_2 gehen, also dem Dreiseit uu_1u_2 ein- und dem Dreieck UU_1U_2 umgeschrieben werden. Man beginnt, die Ecke A in einen beliebigen Punkt von u legend, mit einem Versuche, schneidet dann AU_2 mit u_1 in A_1, A_1U mit u_2 in A_2, A_2U_1 mit u in A', der im allgemeinen nicht mit A zusammenfällt. Bewegt sich A auf u, so werden von A, A_1, A_2, A' projektive Punktreihen durchlaufen, und zwar von aufeinander folgenden perspektive, von A und A' also konjektive auf u; drei Versuche geben drei Paare entsprechender Punkte, und es müssen die Koinzidenzpunkte konstruiert werden, welche zur Lösung führen.

Diese Aufgabe ist in sich dual und kann daher dual behandelt werden.

Liegen U, U_1, U_2 in gerader Linie, so ist deren Schnitt mit u der eine Koinzidenzpunkt, der jedoch nur zu einem ausgearteten Dreiecke führt, dessen Ecken in jener Gerade liegen; der andere ist dann linear zu konstruieren und stets reell; er gibt die einzige eigentliche Lösung. Ähnliches gilt dual, wenn u, u_1, u_2 in einen Punkt zusammenlaufen.

Nun soll das gesuchte Dreieck nach wie vor dem Dreiecke UU_1U_2 umgeschrieben, andererseits aber dem gegebenen Kegelschnitt K eingeschrieben sein. Dann bewegen sich A, A_1, A_2, A' konjektiv auf K und zwar aufeinander folgende involutorisch; es sind wiederum die Koinzidenzen von A und A' aufzusuchen. Wenn der Kegelschnitt durch fünf Punkte gegeben ist, so wird man drei von ihnen für die Versuche benutzen, so daß zunächst die Konstruktion linear verläuft und erst, wenn die Fundamental-Aufgabe heranzuziehen ist, quadratisch wird.

Die Konjektivität von A und A' kann Identität sein, so daß jeder Punkt A von K zu einer Lösung führt; wir wissen aus Nr. 111, daß dies stets und nur dann geschieht, wenn UU_1U_2 ein Polardreieck von K ist.

Die duale Aufgabe lautet: Einem Kegelschnitte ein Dreieck umzuschreiben, das einem gegebenen Dreiecke eingeschrieben ist.

Es tritt keine wesentliche Änderung ein, wenn man die Dreiecke durch (einfache) n-Ecke ersetzt.

§ 21. Besondere Kegel 2. Grades.

130 Wenn man in zwei Ebenenbüscheln mit sich schneidenden Axen v, v' die zueinander rechtwinkligen Ebenen zuordnet, so ist das eine projektive Zuordnung. Denn die Lote, welche im Schnittpunkte O der Axen auf den Ebenen von v errichtet sind, bilden, in der Ebene, welche in O auf v senkrecht steht, einen Strahlenbüschel, der dem Ebenenbüschel v (oder dem von seiner Ebene aus ihm ausgeschnittenen Strahlenbüschel) gleich ist, und durch seine Strahlen gehen die entsprechenden Ebenen von v'. Also entsteht durch die Schnittlinien der so zugeordneten Ebenen von v und v' ein Kegel 2. Grades, welcher infolge dieser Entstehungsweise orthogonaler Kegel genannt wird.[1]) Längs der Axen v, v' wird er von den Ebenen berührt, die in ihnen auf der gemeinsamen Ebene vv' normal sind; ihr Schnittstrahl, der Polarstrahl der Ebene vv' in bezug auf den Kegel, ist zu ihr senkrecht; woraus folgt, daß auf jeder zur Ebene vv' senkrechten Gerade der unendlich ferne Schnitt mit diesem Polarstrahle dem Schnitte mit der Ebene harmonisch zugeordnet ist in bezug auf die Schnitte mit dem Kegel. Die Ebene $\sigma = vv'$ wird deshalb für den Kegel eine Ebene, in bezug auf welche er in sich symmetrisch ist, eine Hauptebene und der zu ihr senkrechte Polarstrahl eine Axe; letzterer ist auch die involutorische Axe der erzeugenden Büschel. Wir wissen aus Nr. 80, daß nur in solchen Geraden des Büschels (O, σ), welche im spitzen Winkel der beiden Geraden v, v' liegen, Ebenen auf σ senkrecht stehen, welche reelle Strahlen enthalten, aus denen v und v' durch einen rechten Flächenwinkel projiziert werden, also reelle Kanten unseres Kegels. Der Kegel steht also über dem spitzen Winkel vv' und dieser spitze Winkel ist seine Öffnung in dieser seiner Hauptebene.

Eine Ebene, welche zu einer der beiden Kanten v, v', den Axen der erzeugenden Büschel, senkrecht ist, schneidet aus diesen Strahlenbüschel aus, deren entsprechende Strahlen ebenfalls rechtwinklig sind; für die Ebene, die in O auf v senkrecht steht, ist dies oben schon erkannt, und jede andere auf v senkrechte Ebene schneidet parallele Strahlen aus. Das Erzeugnis solcher projektiver Strahlenbüschel ist ein Kreis, und für die orthogonalen Kegel ergeben sich so in sehr einfacher Weise die beiden Parallelebenen-Büschel mit Kreisschnitten. Sie sind senkrecht auf denjenigen Kanten des Kegels, deren Ebenenbüschel ihn orthogonal erzeugen.

---

1) Sind die Axen windschief, so ergiebt sich die eine Regelschar eines orthogonalen Hyperboloides. Schröter, Flächen 2. Ordnung und Raumkurven 3. Ordnung, § 12, 25.

Weil die in der Hauptebene σ gelegenen Durchmesser dieser Kreise sich innerhalb des spitzen Winkels vv' befinden, so erhellt auch daraus, daß der Kegel über diesem Winkel steht.

Alle Ebenen, welche aus einem Flächenwinkel $\tau\tau'$ einen rechten Winkel ausschneiden und durch einen Punkt O auf der Kante $\tau\tau'$ gehen, umhüllen einen Kegel 2. Grades, weil die Strahlenbüschel (O, τ), (O, τ') durch die Zuordnung der Schenkel eines solchen rechten Winkels projektiv werden. Denn der Büschel (O, τ) ist gleich dem Büschel der Ebenen, welche in O auf seinen Strahlen senkrecht stehen und alle das in O auf τ errichtete Lot enthalten; diese Ebenen schneiden aber in τ' die rechtwinkligen Strahlen ein. 131

Dem gemeinsamen Strahle $\tau\tau'$ entsprechen die beiden Strahlen in τ und τ', die in O auf ihm senkrecht stehen: die Schenkel des Neigungswinkels der Ebenen aus O. Sie sind also die Kanten t, t', längs deren die Ebenen τ, τ' den Kegel berühren, und ihre Ebene σ ist Polarebene von $\tau\tau'$, zu dem sie rechtwinklig ist. Daher ist σ Hauptebene und $\tau\tau'$ dazu senkrechte Axe des Kegels. Andererseits ist σ auch involutorische Ebene der beiden erzeugenden Strahlenbüschel.

Wir wollen diesen Kegel als dual-orthogonal bezeichnen.

Von den rechten Winkeln aus O mit Schenkeln in τ, τ' betrachten wir die im spitzen Flächenwinkel $\tau\tau'$ gelegenen; für sie ist der spitze Winkel tt' die Orthogonalprojektion auf σ; und da ein rechter Winkel, mit dem Scheitel in der Projektionsebene, durch Orthogonalprojektion sich verkleinert oder vergrößert, je nachdem der Schnitt seiner Ebene mit der Projektionsebene in ihn selbst oder in den Nebenwinkel fällt, so muß er in unserm Falle in den Winkel selbst fallen. Zu diesem Schnitte mit der involutorischen Ebene ist die Berührungskante der Ebene des rechten Winkels mit dem Kegel harmonisch in bezug auf die beiden Schenkel (Nr. 119); folglich liegt sie und der ganze Kegel im stumpfen Flächenwinkel $\tau\tau'$. Der stumpfe Winkel tt' ist Öffnung des dual-orthogonalen Kegels in der Hauptebene σ.

Wir können jetzt die in Nr. 80 und 81 behandelten Aufgaben etwas anders beschreiben.

Die vier Axen, welche sich in Nr. 80 ergaben, sind die Schnittlinien der beiden Ebenen σ, τ, welche auf der Ebene der gegebenen elliptischen Strahleninvolution in den Strahlen s, t des rechtwinkligen Paares senkrecht stehen, mit dem orthogonalen Kegel, welcher über dem Paare cc' steht, d. h. aus dessen beiden Geraden durch rechtwinklige Ebenen erzeugt wird. Von diesen Ebenen schneidet nur σ reell, weil s sich im Innern befindet.

Bei der andern Aufgabe, wenn noch verlangt wird, daß die gesuchten Ebenen durch einen gegebenen Punkt O auf der Axe der gegebenen elliptischen Ebeneninvolution gehen, handelt es sich darum,

durch das Lot auf τ, bzw. σ in O, welches in σ, τ liegt, die Tangentialebenen an den dual-orthogonalen Kegel zu legen, der zum Ebenenpaar $\varepsilon\varepsilon'$ gehört. Da τ im stumpfen Winkel $\varepsilon\varepsilon'$ liegt, σ im spitzen, so liegen jene Lote im spitzen, stumpfen Winkel; also das erste außerhalb, das andere innerhalb, und nur jenes sendet reelle Tangentialebenen.

132 Wie entsteht der einfachste Kegel 2. Grades, der Rotationskegel (oder gerade Kreiskegel) durch projektive Strahlen- oder Ebenenbüschel? Dazu ist es gut, die Erzeugung des Kreises durch projektive Punktreihen u, u' noch etwas genauer zu betrachten. Die Berührungspunkte F und E' mit u, u' entsprechen dem gemeinsamen Punkte $\mathfrak{S} \equiv F' \equiv E$. Die beiden entsprechenden Strecken EF und $E'F'$ sind gleich und gehören dem Systeme Γ_1 an (Nr. 57); denn die von einer Tangente des Kreises eingeschnittenen entsprechenden Punkte liegen beide auf EF und $E'F'$ oder beide auf $E \cdot F$ und $E' \cdot F'$. Die zu u' und u parallelen Tangenten r, q' schneiden in u, bzw. u' die Fluchtpunkte R, Q' ein. Die Gerade vom Mittelpunkt M nach R, welche den einen Winkel ru halbiert, steht senkrecht auf der Gerade $s = M\mathfrak{S}$, welche uu' halbiert, und geht durch Q'. Diese Fluchtpunkte werden, wie notwendig, von $EF, E'F'$ ausgeschlossen. In bezug auf s sind E, F, R zu F', E', Q' symmetrisch.

Um also zwei gegebene projektive Punktreihen in solche Lage zu bringen, daß sie einen Kreis erzeugen, nimmt man aus dem Systeme Γ_1 zwei entsprechende gleiche Strecken $EF, E'F'$, in denen E und F' die nicht entsprechenden und von R, bzw. Q' entfernteren Endpunkte sind, und vereinigt diese im Punkte $\mathfrak{S}$, wobei wir annehmen, daß u in seiner Lage gelassen werde. Es ist ja immer (Nr. 57) die Figur EFR zu $F'E'Q'$ kongruent. Weil R von EF ausgeschlossen wird, so schneidet der Kreis über $\mathfrak{S}R$ als Durchmesser das Lot auf u in F reell. Ist M der eine Schnittpunkt, so wird u' so angelegt, daß $F'E'Q'$ zu EFR symmetrisch liegt in bezug auf $\mathfrak{S}M$. Der Kreis, welcher nun u und u' in F und E' tangiert und daher M zum Mittelpunkte hat, ist die Kurve, welche durch die so gelegten Punktreihen erzeugt wird. Denn wegen des rechten Winkels $\mathfrak{S}MR$ ist die zweite Tangente aus R zu u' parallel; also ruft er auf seinen Tangenten u, u' projektive Punktreihen hervor, in denen den E, F, R die E', F', R'_∞ korrespondieren; sie stimmen also mit den gegebenen überein.

Die Symmetrie in bezug auf $\mathfrak{S}M$ lehrt: $(EFRQ_\infty) = (F'E'Q'R'_\infty) = (E'F'R'_\infty Q')$, so daß auch Q_∞ und Q' entsprechend sind.

Damit ist auch der Rotationszylinder erledigt.

133 Nunmehr seien (O, ω), (O', ω') die Büschel in zwei Berührungsebenen eines Rotationskegels, projektiv gemacht durch die Berührungsebenen, f und e' die Berührungskanten von ω und ω', welche dem

gemeinsamen Strahle $\mathfrak{f} \equiv e \equiv f'$ korrespondieren; so sind die spitzen Winkel ef, $e'f'$ entsprechende gleiche Winkel aus dem Systeme Γ_1 aus demselben Grunde wie oben. Die Ebenen, welche in f und e' auf ω und ω' normal sind, schneiden sich in der Rotationsaxe a und die Ebene $\sigma = a\mathfrak{f}$ ist Symmetrieebene für die Figur. Die Ebene, welche auf ihr in a senkrecht steht, schneide die Büschel in den Strahlen r, q', die entsprechenden seien r' und q. Diese sind dann normal zu den Berührungskanten e' und f. In der Tat, der Schnitt mit einer zu a normalen Ebene ε, der zur obigen Figur führt, lehrt, daß r und q' nach den Fluchtpunkten der auf $\omega\varepsilon$ und $\omega'\varepsilon$ entstehenden projektiven Punktreihen gehen, also r' und q zu $\omega'\varepsilon$ und $\omega\varepsilon$ parallel sind; auf diesen stehen aber die Berührungskanten e' und f senkrecht; r', senkrecht zu e', wird vom spitzen Winkel $e'f'$ ausgeschlossen, mithin r vom entsprechenden spitzen Winkel ef, und ebenso q' von $e'f'$.

Sind nun zwei projektive Strahlenbüschel (O, ω), (O, ω') gegeben, so nehme man aus dem Systeme Γ_1 entsprechender gleicher Winkel ein Paar heraus ef, $e'f'$; und zwar ist es immer möglich (wofern nicht gleiche Strahlenbüschel vorliegen) solche Paare gleicher spitzer Winkel zu wählen, daß, wenn r' zu e' rechtwinklig und $e'r'$ der Winkel ist, der den f' einschließt, dann der entsprechende und f einschließende Winkel er spitz ist (Nr. 61). Über diesen spitzen Winkel er stellt man nun einen rechten Flächenwinkel so, daß seine Kante a in die Ebene fällt, welche auf ω in f senkrecht steht; der orthogonale Kegel über er wird ja von dieser Ebene reell geschnitten. Für die Konstruktion von a liefert Nr. 80 die Mittel; e, r, f, a entsprechen den dortigen e, e', s, v[1]).

Verbindet man dann eine der gefundenen a mit e durch die Ebene σ, so hat man den zweiten Büschel so zu legen, daß f' und e sich decken und e' symmetrisch zu f wird in bezug auf σ. Die derartig gelegten projektiven Büschel (O, ω), (O, ω') erzeugen den Rotationskegel, welcher ω und ω' längs f und e' tangiert. Denn dieser Kegel ruft in den Büscheln eine Projektivität Π hervor, in welcher ersichtlich e und e', f und f' entsprechend sind, aber auch r und r'; infolge der Konstruktion steht nämlich die Ebene ra auf der Ebene $\sigma = ae$ senkrecht; folglich muß der Strahl, der in dieser Projektivität Π dem r entspricht, auf e' normal sein; also ist er r'. Und die Projektivität stimmt mit der gegebenen überein.

1) Wenn die gegebenen Büschel gleich sind, so ist er ein Rechter, und die Senkrechte in O auf ω ist in der in f senkrechten Ebene die einzige Gerade, aus der er durch einen rechten Winkel projiziert wird: der orthogonale Kegel ist in die beiden Strahlenbüschel aus O in den Ebenen zerfallen, die auf ω in e und r senkrecht stehen. Jene Senkrechte kann nicht Axe eines Rotationskegels sein, der die Ebene ω berührt.

Schneidet die Ebene ar den andern Büschel in q' und ist q zu f normal, so sind diese in der Projektivität auch entsprechend, denn wegen der Symmetrie in bezug auf σ ist:

$$efrq \barwedge f'e'q'r', \text{ also } \barwedge e'f'r'q'.$$

Es ist also nur für die geeignete Gleichheit von ef und $e'f'$ und für das Entsprechen von r und r' zu sorgen, das von q und q' tritt dann von selber ein.

134 Wir lassen jetzt einen Rotationskegel durch die Ebenenbüschel um zwei Kanten u, u' entstehen; $\varepsilon \equiv \varphi'$ sei die gemeinsame Ebene und daher φ und ε' die ihr entsprechenden Berührungsebenen längs u und u'. Es ist $\sphericalangle\, \varepsilon\varphi = \varepsilon'\varphi'$. Auch dies sind entsprechende gleiche Winkel (aus dem System Γ_1). Ferner seien φ_1 und ε_1' die auf φ und ε' senkrechten Ebenen der Büschel, ihre Schnittlinie ist die Axe a, und die Ebene σ von ihr nach $\varphi\varepsilon'$, welche zu $\varepsilon \equiv \varphi'$ normal ist, ist Symmetrieebene der Figur. Weil $\varphi\varepsilon'$ die involutorische Axe der beiden Büschel u, u' ist, so schneidet (Nr. 90) jede Ebene durch sie diese in involutorischen Strahlenbüscheln mit den Kanten des Kegels als Doppelstrahlen; in σ bilden a und der zu ihr senkrechte Strahl a_1, als Halbierungslinien der Winkel der Kanten, das rechtwinklige Paar der Involution; daher gehen durch a_1 die Ebenen φ_1' und ε_1, welche den φ_1 und ε_1' entsprechen. Nennen wir die zu φ_1' in bezug auf σ symmetrische Ebene $\overline{\varphi}$, so lehrt die Symmetrie, daß:

$$\varepsilon\varphi\varphi_1\overline{\varphi} \barwedge \varphi'\varepsilon'\varepsilon_1'\varphi_1', \text{ also } \barwedge \varepsilon'\varphi'\varphi_1'\varepsilon_1';$$

d. h. $\overline{\varphi}$ ist ε_1. Es sind also ε_1 und φ_1', die sich in a_1 auf σ schneiden, in bezug auf σ symmetrisch.

In zwei gegebenen projektiven Ebenenbüscheln u und u' seien $\varepsilon\varphi$ und $\varepsilon'\varphi'$ zwei entsprechende gleiche (spitze) Winkel (aus Γ_1), φ_1 sei senkrecht zu φ, ε_1' zu ε' und φ_1', ε_1 ihnen entsprechend; also: $\varepsilon\varphi\varphi_1\varepsilon_1 \barwedge \varepsilon'\varphi'\varphi_1'\varepsilon_1'$. Nun findet Gleichheit statt zwischen $\varepsilon\varphi\varphi_1$ und $\varphi'\varepsilon'\varepsilon_1'$; wenn in dieser Gleichheit der Ebene φ_1' die $\overline{\varphi}$ entspricht, so ist

$$\varepsilon\varphi\varphi_1\overline{\varphi} \barwedge \varphi'\varepsilon'\varepsilon_1'\varphi_1' \barwedge \varepsilon'\varphi'\varphi_1'\varepsilon_1',$$

also $\overline{\varphi}$ mit ε_1 identisch; es besteht die Gleichheit von $\varepsilon\varphi\varphi_1\varepsilon_1$ und $\varphi'\varepsilon'\varepsilon_1'\varphi_1'$.

Indem die Ebenen ε und φ' zur Vereinigung kommen sollen, muß die Ebene σ, in bezug auf welche diese gleichen Figuren symmetrisch werden sollen, senkrecht zu ε durch O so gelegt werden, daß sie aus φ_1 und ε_1 einen rechten Winkel ausschneidet. Damit dies reell geschehe, muß das Lot n auf ε in O, durch welches sie geht, im spitzen Flächenwinkel $\varphi_1\varepsilon_1$ liegen (Nr. 131), also ε im stumpfen Winkel. Um dafür geeignete Winkel $\varepsilon\varphi$, $\varepsilon'\varphi'$ zu erhalten, seien die beiden Ebenenbüschel mit Ebenen, welche bzw. zu den Axen normal sind, in zu ihnen gleichen Strahlenbüscheln geschnitten; aus Nr. 61 wissen wir, wie entsprechende gleiche spitze Winkel ef,

$e'f'$ zu erhalten sind von der Beschaffenheit, daß, wenn f_1 zu f und e_1' zu e' rechtwinklig sind und e_1 dem e_1' entspricht, der stumpfe Winkel $f_1 e_1$ den e einschließt; was dann auf die durchgehenden Ebenen φ_1, ε_1, ε übergeht.

Die Konstruktion der beiden Ebenen σ, der Tangentialebenen durch n an den dual-orthogonalen Kegel, welcher zu φ_1, ε_1 gehört, erfolgt nach Nr. 81, angewandt hier auf $\varphi_1, \varepsilon_1, \varepsilon$, wie dort auf $\varepsilon, \varepsilon', \tau$; n ist hier, wie gesagt, durch O senkrecht zu ε gezogen.

Ist nun σ eine dieser beiden Ebenen, so wird der Büschel u' an den (schon festgelegten) Büschel u so angelegt, daß in bezug auf σ die obigen gleichen Figuren $\varepsilon\varphi\varphi_1\varepsilon_1$ und $\varphi'\varepsilon'\varepsilon_1'\varphi_1'$ symmetrisch liegen, was zur Folge hat, daß ε und φ' sich decken. Durch die rechtwinkligen Strahlen a, a_1 in σ, durch welche φ_1 und ε_1 gehen, gehen daher auch ε_1' und φ_1'. Wegen der Gleichheit der Winkel $\varepsilon\varphi$ und $\varepsilon'\varphi'$ existiert ein Rotationskegel, welcher die Ebenen φ und ε' längs u und u' berührt. In der Projektivität Π, welche dieser Kegel zwischen den Ebenenbüscheln u und u' hervorruft, sind zunächst ε und ε', φ und φ' entsprechend. Ferner ist die Schnittlinie a der Ebenen φ_1 und ε_1', welche in u und u' auf φ und ε' senkrecht stehen, die Axe, und die ihnen in dieser Projektivität Π entsprechenden Ebenen müssen sich im Strahle a_1, der zu a rechtwinklig, schneiden, also sind sie die Ebenen φ_1' und ε_1, die ja nach a_1 gehen. Demnach stimmt die Projektivität Π mit der gegebenen in:

$$\varepsilon\varphi\varphi_1\varepsilon_1 \barwedge \varepsilon'\varphi'\varphi_1'\varepsilon_1'$$

überein und ist mit ihr identisch. **Der obige Rotationskegel wird durch die gegebenen projektiven Ebenenbüschel in der ihnen gegebenen Lage erzeugt**[1]).

Hebt man durch Parallelverschiebung der Büschel die Inzidenz der Axen auf, so ergibt sich als Erzeugnis die eine Regelschar eines einmanteligen Rotationshyperboloids.

§ 22. Verallgemeinerung der Involution: Involution höheren Grades, zyklische Projektivität.

Diese Verallgemeinerung lassen wir nach zwei Richtungen hin 135
erfolgen. Wir wollen der Involutionsbedingung (I_2) (Nr. 22) für drei Paare mit den Parametern λ, μ; λ_1, μ_1; λ_2, μ_2:

$$(\lambda+\mu)(\lambda_1\mu_1-\lambda_2\mu_2)+(\lambda_1+\mu_1)(\lambda_2\mu_2-\lambda\mu)+(\lambda_2+\mu_2)(\lambda\mu-\lambda_1\mu_1)=0$$

eine andere Form geben.

---

1) Steiner hat diese Aufgabengruppe in der Systematischen Entwickelung, Anhang Nr. 10—12 gestellt (Gesammelte Werke, Bd. I, S. 441). — Vgl. G. Müth, Die projektive Erzeugung der Rotationsflächen 2. Grades. Dissertation von Breslau 1905. Dort ist auch die Aufgabe behandelt, wie gegebene projektive Punktreihen zu legen sind, damit sie ein Rotationshyperboloid erzeugen.

Die drei Elementenpaare seien durch quadratische Gleichungen gegeben:

$$Q = ax^2 + 2bx + c = 0, \quad Q_1 = a_1x^2 + 2b_1x + c_1 = 0,$$
$$Q_2 = a_2x^2 + 2b_2x + c_2 = 0,$$

deren Wurzeln die Parameter sind; wodurch auch Paare mit konjugiert imaginären Elementen mit umfaßt werden. Sie werden korrekter reell-imaginäre Paare genannt wegen dieser Definition durch eine reelle Gleichung (oder eine reelle elliptische Involution).

Bekanntlich ist:

$$\lambda + \mu = -\frac{2b}{a}, \quad \lambda\mu = \frac{c}{a},$$
$$\lambda_1 + \mu_1 = -\frac{2b_1}{a_1}, \quad \lambda_1\mu_1 = \frac{c_1}{a_1},$$
$$\lambda_2 + \mu_2 = -\frac{2b_2}{a_2}, \quad \lambda_2\mu_2 = \frac{c_2}{a_2};$$

dadurch wird die Involutionsbedingung:

$$b(a_2c_1 - a_1c_2) + b_1(ac_2 - a_2c) + b_2(a_1c - ac_1) = 0$$

oder:

$$\Delta_{012} = ab_1c_2 - ab_2c_1 + a_1b_2c - a_1bc_2 + a_2bc_1 - a_2b_1c$$
$$= \begin{vmatrix} a, & b, & c \\ a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Die Parameter-Beziehung für Involution in Determinantenform:

$$\begin{vmatrix} \lambda u, & \lambda + \mu, & 1 \\ \lambda_1\mu_1, & \lambda_1 + \mu_1, & 1 \\ \lambda_2\mu_2, & \lambda_2 + \mu_2, & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

ist nicht wesentlich von $\Delta_{012} = 0$ verschieden, sie folgt auch aus dem gleichzeitigen Bestehen der symmetrischen bilinearen Relation für $\lambda\mu$, $\lambda_1\mu_1$, $\lambda_2\mu_2$:

$$\alpha\lambda\mu + \beta(\lambda + \mu) + \gamma = 0,$$
$$\alpha\lambda_1\mu_1 + \beta(\lambda_1 + \mu_1) + \gamma = 0,$$
$$\alpha\lambda_2\mu_2 + \beta(\lambda_2 + \mu_2) + \gamma = 0.$$

Wenn die Bedingung $\Delta_{012} = 0$ erfüllt wird, so lassen sich zwei Größen $\varkappa$ und $\varkappa_1$ finden, von der Beschaffenheit, daß

$$\varkappa Q + \varkappa_1 Q_1 + Q_2 \equiv 0,$$

d. h. für alle Werte von x erfüllt wird.

Diese identische Erfüllung erfordert die Befriedigung der drei linearen Gleichungen:

$$\varkappa a + \varkappa_1 a_1 + a_2 = 0, \ \varkappa b + \varkappa_1 b_1 + b_2 = 0, \ \varkappa c + \varkappa_1 c_1 + c_2 = 0$$

durch dieselben Werte von $\varkappa, \varkappa_1$; setzt man die Werte, die sich aus zweien ergeben, in die dritte ein, so erhält man als Bedingung des gleichzeitigen Bestehens $\Delta_{012} = 0$, was ja n. V. richtig ist.

Aus dieser Identität ergibt sich, daß $Q_2 = 0$ mit $\varkappa Q + \varkappa_1 Q_1 = 0$ oder, indem wir $\frac{\varkappa_1}{\varkappa} = \lambda$ setzen, mit $Q + \lambda Q_1 = 0$ äquivalent ist. Man erkennt, daß man aus den Gleichungen der beiden bestimmenden Paare einer Involution — die wir auch ihre Konstituenten nennen wollen:

$$Q = 0, \quad Q_1 = 0$$

die übrigen Paare in dieser Form

$$Q + \lambda \cdot Q_1 = 0$$

mit linearem Parameter λ ableiten kann. λ ist also Parameter eines Paars[1]). Durchläuft dieser Paar-Parameter alle Werte, so durchläuft das Paar die ganze Involution. Setzt man für x den Parameter eines Elements des Trägers ein, so ergibt sich eine lineare Gleichung in λ, welche den Parameter des einzigen Paars liefert, zu dem dies Element gehört.

Die quadratische Gleichung für die Parameter der Elemente des beliebigen Paars, nach x geordnet, ist:

$$(a + \lambda a_1) x^2 + 2 (b + \lambda b_1) x + (c + \lambda c_1) = 0.$$

Sie hat zwei gleiche Wurzeln, wenn:

$$(a + \lambda a_1)(c + \lambda c_1) - (b + \lambda b_1)^2 = 0$$

oder:

$$(ac - b^2) + (ac_1 + ca_1 - 2 b b_1) \lambda + (a_1 c_1 - b_1^2) \lambda^2 = 0;$$

diese quadratische Gleichung liefert die Parameter derjenigen beiden Paare, deren Elemente zusammenfallen; je nachdem sie reelle oder imaginäre Wurzeln hat, ist die Involution hyperbolisch oder elliptisch.

Man bestimme zu dem festen Elemente (mit dem Parameter) ϱ das vierte harmonische ξ in bezug auf das Paar $Q + \lambda Q_1 = 0$ der Involution, dessen Elemente die Parameter x', x'' haben, so ist (Nr. 22):

$$2 \varrho \xi - (\varrho + \xi)(x' + x'') + 2 x' x'' = 0.$$

Nun ist:

$$x' + x'' = - \frac{2 (b + \lambda b_1)}{a + \lambda a_1}, \quad x' x'' = \frac{c + \lambda c_1}{a + \lambda a_1},$$

also:

$$\varrho \xi (a + \lambda a_1) + (\varrho + \xi)(b + \lambda b_1) + (c + \lambda c_1) = 0;$$

oder

$$\xi \lambda (\varrho a_1 + b_1) + \xi (\varrho a + b) + \lambda (\varrho b_1 + c_1) + (\varrho b + c) = 0;$$

1) $\varkappa$, $\varkappa_1$ sind die homogenen Parameter des Paars $Q_2 = 0$; man kann auch gleich homogene Faktoren $\varkappa$, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ einführen, so daß die Identität lautet: $\varkappa Q + \varkappa_1 Q_1 + \varkappa_2 Q_2 \equiv 0$.

es stehen also ξ und λ in bilinearer Beziehung; daher ist, wenn zu $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ die $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ gehören (Nr. 24):

$$\frac{\xi_1 - \xi_3}{\xi_2 - \xi_3} : \frac{\xi_1 - \xi_4}{\xi_2 - \xi_4} = \frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_3} : \frac{\lambda_1 - \lambda_4}{\lambda_2 - \lambda_4}.$$

Das Doppelverhältnis der vier vierten harmonischen Elemente, die zu den vier Paaren mit den Parametern $\lambda_1, \ldots \lambda_4$ gehören, ist von jenem Elemente ϱ unabhängig. Wir fanden dies schon in Nr. 114 und nannten es deshalb das Doppelverhältnis der vier Paare. Wir sehen, daß es in der bekannten Form durch die Parameter der vier Paare sich ausdrücken läßt, daß aber auch dieser Ausdruck, wenn die Paare andere Parameter bekommen, z. B. durch Wahl anderer Konstituenten, invariant bleibt.

Wir können nun die Involution projektiv beziehen, ihre Paare auf die Elemente eines andern Gebildes, indem wir zunächst die irgend einem festen Elemente zugeordneten vierten harmonischen Elemente beziehen.

136 Die eine Verallgemeinerung[1]) der Involution, die wir vornehmen wollen, ist folgende: Wir ersetzen die quadratischen Gleichungen durch solche vom n^{ten} Grade, welche also n-elementige Gruppen darstellen: $Q = 0$, $Q_1 = 0$ und bilden die neue Gruppe:

$$Q + \lambda Q_1 = 0.$$

Verändert sich λ, so ergeben sich ∞^1 Gruppen, welche eine Involution n^{ten} Grades bilden, die gemeine kann also quadratisch genannt werden. Genau wie oben erkennt man, daß jedes Element des Trägers zu einer und im allgemeinen nur zu einer von den Gruppen gehört. Zu den beiden konstituierenden Gruppen gehören die Parameterwerte 0, ∞; das letztere beweist die Form $\frac{Q}{\lambda} + Q_1 = 0$.

Weil in zwei perspektiven ungleichartigen Grundgebilden den inzidenten Elementen der nämliche Parameter gegeben werden kann (Nr. 28), so folgt, daß zu einer Involution in dem einen Gebilde perspektiv eine Involution in dem andern ist, je zwei perspektive Gruppen mit derselben Gleichung $Q + \lambda Q_1 = 0$ und dem nämlichen Parameter; die Wurzeln sind die Parameter der n Elemente der einen und der andern Gruppe.

Die Involution beliebigen Grades ist projektiv und geht dann auch in die weiteren projektiv beziehbaren Gebilde über.

Andererseits lehrt die Gleichung $Q + \lambda Q_1 = 0$ direkt, daß die Involution, mit ihren Gruppen als Elementen, projektiv beziehbar wird; indem eine Gruppe und ein Element des andern

1) de Jonquières, Annali di Matematica (Ser. I), Bd. 2, S. 86.

Gebildes entsprechend sind, wenn sie denselben Parameter haben oder allgemeiner, wenn zwischen den Parametern eine bilineare Relation festgesetzt ist.

Zu Konstituenten kann man beliebige zwei Gruppen der Involution nehmen, etwa die mit Paramentern λ', λ'' oder mit den Gleichungen: $Q + \lambda' Q_1 = 0$, $Q + \lambda'' Q_1 = 0$, welche wir kürzer $Q' = 0$, $Q'' = 0$ schreiben.

Dazu haben wir uns klar zu machen, daß die linke Seite der Gleichung einer beliebigen weitern Gruppe mit dem Parameter λ in folgende Form sich bringen läßt:

$$Q + \lambda Q_1 \equiv \varrho' Q' + \varrho'' Q'' \equiv \varrho' (Q + \lambda' Q_1) + \varrho'' (Q + \lambda'' Q_1);$$

die beiden Größen ϱ', ϱ'' müssen also den Gleichungen:

$$1 = \varrho' + \varrho'', \ \lambda = \varrho' \lambda' + \varrho'' \lambda''$$

genügen und sind durch sie eindeutig bestimmt. Die Gleichung der Gruppe $Q + \lambda Q_1 = 0$ lautet mit unhomogenem Parameter, bezogen auf die neuen Konstituenten:

$$Q' + \frac{\varrho''}{\varrho'} Q'' = 0, \text{ oder } Q' + \sigma Q'' = 0.$$

Haben zwei Gruppen $Q' = 0$, $Q'' = 0$ ein Element gemein, etwa mit dem Parameter α, so ist dasselbe allen Grupen gemeinsam (bei $n = 2$ parabolische Involution); denn $x = \alpha$ macht Q' und Q'' zu null, also auch $Q' + \sigma Q''$, für jeden Wert von σ; wir können also aus Q', Q'', $Q' + \sigma Q''$ den linearen Faktor $x - \alpha$ herausnehmen. Ähnliches gilt für mehrere gemeinsame Elemente. Es kann auch eine Potenz von $x - \alpha$ in Q' und Q'' enthalten sein, so daß das Element α den Gruppen der Involution mehrfach gemeinsam ist.

Scheidet man i Elemente, welche zweien Gruppen einer Involution n^{ten} Grades und dann allen Gruppen derselben gemeinsam sind, (unter denen auch Vereinigungen stattfinden können), also den Faktor i^{ten} Grades aus den Gleichungen aus, so erhält man eine Involution $(n-i)^{\text{ten}}$ Grades.

Es wird sich herausstellen, daß ein Kurvenbüschel n^{ter} Ordnung in eine Gerade seiner Ebene eine Involution n^{ten} Grades einschneidet; auf einer Gerade durch einen (allen Kurven des Büschels gemeinsamen) Grundpunkt ergibt sich eine solche Involution mit einem allen Gruppen gemeinsamen Punkte. Die $n-1$ übrigen Schnitte bilden eine Involution $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades.

Wenn in einer Gruppe zwei Elemente zusammenrücken, so ergibt sich ein Doppelelement. Die Koeffizienten der Gleichung einer Gruppe sind linear in λ. In der Algebra wird gelehrt, daß die Diskriminante D einer Gleichung n^{ten} Grades, deren Verschwinden die

Bedingung dafür ist, daß die Gleichung zwei gleiche Wurzeln hat, in den Koeffizienten der Gleichung vom Grade $2(n-1)$, d. h. daß in jedem ihrer Glieder so viele Koeffizienten multipliziert sind. Daher wird in unserm Falle $D=0$ eine Gleichung $2(n-1)^{\text{ten}}$ Grades in λ (vgl. oben $n=2$), deren Wurzeln als Parameter zu den Gruppen mit Doppelelementen gehören.

Eine Involutionen n^{ten} Grades hat $2(n-1)$ Doppelelemente, welche sich im allgemeinen auf ebensoviele Gruppen verteilen. Dies wird später noch auf andere Weise erkannt werden.

Die Diskriminante der kubischen Gleichung:

$$ax^3+3bx^2+3cx+d=0$$

z. B. ist: $a^2d^2+4ac^3+4b^3d-6abcd-3b^2c^2$ (wir werden sie in Nr. 150 ableiten); die Gleichung 4. Grades in λ ist daher:

$$(a+\lambda a_1)^2(d+\lambda d_1)^2+4(a+\lambda a_1)(c+\lambda c_1)^3+4(b+\lambda b_1)^3(d+\lambda d_1)$$
$$-6(a+\lambda a_1)(b+\lambda b_1)(c+\lambda c_1)(d+\lambda d_1)-3(b+\lambda b_1)^2(c+\lambda c_1)^2=0.$$

Wenn drei kubische Gleichungen vorliegen:

$$f_1(x)=0,\ f_2(x)=0,\ f_3(x)=0,$$

so kann die Identität:

$$f_3(x)(x-\alpha_3)\equiv\lambda f_1(x)(x-\alpha_1)+\mu f_2(x)(x-\alpha_2)$$

erfüllt werden; denn setzt man die entsprechenden Koeffizienten der Potenzen von x einander gleich, so ergeben sich fünf in λ, μ, $\lambda\alpha_1$, $\mu\alpha_2$, α_3 lineare Gleichungen, welche λ, μ, α_1, α_2, α_3 eindeutig bestimmen. Man kann daher drei Gruppen von je drei Elementen (in demselben Gebilde) auf eine Weise so durch vierte Elemente vervollständigen, daß drei Gruppen einer Involution 4. Grades sich ergeben.

Zu einem Systeme von ∞^1 Gruppen von vier Elementen eines Gebildes von der Eigenschaft, daß jedes Element desselben zu einer von ihnen gehört, sind wir bei drei Involutionen, die zu zweien sich stützen und immer die dritte zum kommutativen Produkte haben (Nr. 85, 87), gelangt.

Jedes Element X wird durch die drei gepaarten Elemente X_1, X_2, X_3 zu einem Quadrupel vervollständigt, das in jede der drei Involutionen zwei Paare XX_1, X_2X_3; ... sendet. Bestätigen wir die Vermutung, daß diese Gruppen eine Involution 4. Grades bilden.

Von den drei Involutionen sind zwei hyperbolisch, die dritte elliptisch; die Paare der Doppelpunkte seien M_1N_1, M_2N_2, M_3N_3, zu je zweien harmonisch. Als Parameter des Elementes X benutzen wir ein mit reellen Doppelpunkten gebildetes Doppelverhältnis: $\xi=(M_1N_1M_2X)=-(M_1N_1N_2X)$. Es ist dann $\xi_1=(M_1N_1M_2X_1)$ $=(M_1N_1M_2X)\cdot(M_1N_1XX_1)=-\xi$, weil $(M_1N_1XX_1)=-1$.

Wegen der zweiten Involution ist:

$$\xi_2 = (M_1 N_1 M_2 X_2) = (N_1 M_1 M_2 X) = \frac{1}{\xi},$$

und weil X_2 und X_3 in der ersten gepaart sind, ist $\xi_3 = -\frac{1}{\xi}$. Demnach ist die Gleichung der Gruppe $X X_1 X_2 X_3$:

$$(x - \xi)(x + \xi)\left(x - \frac{1}{\xi}\right)\left(x + \frac{1}{\xi}\right) = 0,$$

also:

$$x^4 - \lambda x^2 + 1 = 0,$$

wo $\lambda = \xi^2 + \frac{1}{\xi^2}$ der Gruppenparameter ist, der, wie notwendig, sich nicht ändert, wenn ξ durch $-\xi, \frac{1}{\xi}, -\frac{1}{\xi}$ erzetzt wird. Damit ist die Involution bewiesen.

Fällt X nach M_1, dann tut es auch X_1, während X_2 und X_3 nach N_1 fallen Die sechs Doppelpunkte der Involution verteilen sich also auf drei Gruppen, jede mit zwei Doppelpunkten $M_1 N_1$, $M_2 N_2$, $M_3 N_3$; die Gruppenparameter sind $\infty, 2, -2$.

Wenn in einem Gebilde ein einfach unendliches System von Gruppen von je n Elementen vorliegt, das algebraisch entstanden ist und die Eigenschaft hat, daß ein beliebiges Element des Gebildes nur zu einer Gruppe gehört, so wird man immer auf eine Involution n^{ten} Grades schließen können; denn die Gleichung einer Gruppe muß dann linear einen Parameter enthalten. Wertvoller wird es jedenfalls sein, wenn man diese Gleichung herstellen oder die fragliche Involution projektiv in eine bekannte überführen kann.

Eine anschauliche Involution n^{ten} Grades von Strahlen (oder 137
Ebenen) ergibt sich folgendermaßen.

Man konstruiere im Strahlenbüschel einen regelmäßigen n-Strahl, d. h. n Strahlen, welche den ganzen Winkel von 360^0 in in $2n$ gleiche Teile teilen; läßt man ihn durch Drehung alle möglichen Lagen im Büschel einnehmen, so entstehen die sämtlichen Gruppen einer Involution n^{ten} Grades.

Aus der Moivreschen Formel:

$$\cos n\varphi + i \sin n\varphi = (\cos\varphi + i \sin\varphi)^n$$

erhält man, wenn n positiv ganz ist, durch Potenzieren und Trennen des Reellen und Imaginären:

$$\cos n\varphi = \cos\varphi^n - n_2 \cos\varphi^{n-2} \sin\varphi^2 + n_4 \cos\varphi^{n-4} \sin\varphi^4 - \cdots,$$
$$\sin n\varphi = n_1 \cos\varphi^{n-1} \sin\varphi - n_3 \cos\varphi^{n-3} \sin\varphi^3 + \cdots;$$

n_i ist der Binomialkoeffizient $\frac{n(n-1)\cdots(n-i+1)}{1 \cdot 2 \cdots i}$, und die rechte Seite bricht ab, wenn die n^{te} Potenz von $\sin\varphi$ in der einen Formel

und die $(n-1)^{\text{te}}$ in der andern erreicht ist. Also:

$$\operatorname{tang} n\varphi = \frac{n_1 \operatorname{tang}\varphi - n_3 \operatorname{tang}\varphi^3 + n_5 \operatorname{tang}\varphi^5 - \cdots}{1 - n_2 \operatorname{tang}\varphi^2 + n_4 \operatorname{tang}\varphi^4 - \cdots}$$

$$= \frac{n_1 x - n_3 x^3 + n_5 x^5 - \cdots}{1 - n_2 x^2 + n_4 x^4 - \cdots} = \frac{Z}{N},$$

wo entweder Z oder N bis zur n^{ten} Potenz in $x = \operatorname{tang}\varphi$ steigt und die andere Größe zur $(n-1)^{\text{ten}}$.

Die Winkel der Strahlen eines regelmäßigen n-Strahls mit dem Anfangsstrahle seien α, $\alpha + \frac{\pi}{n}$, $\alpha + \frac{2\pi}{n}$, ..., $\alpha + (n-1)\frac{\pi}{n}$; die n-fachen Winkel $n\alpha$, $n\alpha + \pi$, ... haben alle dieselbe Tangente; ist diese gleich λ, so kann, wenn in unserer Formel $\operatorname{tang} n\varphi = \lambda$ gesetzt wird, rechts φ jeder der n Winkel α, $\alpha + \frac{\pi}{n}$, ... sein und x die zugehörige Tangente. Folglich ist

$$Z - \lambda N = 0$$

die Gleichung des n-Strahls, und ändert sich λ, also α und $n\alpha$, so erhalten wir alle regelmäßigen n-Strahlen im Büschel und sehen, daß sie eine Involution n^{ten} Grades bilden.

Die erste Konstituente gehört zu $\lambda = 0$, $\alpha = 0$, ist also derjenige n-Strahl, zu dem der Anfangsstrahl gehört; so daß die Winkel sind:

$$0, \ \frac{\pi}{n}, \ \frac{2\pi}{n}, \ \ldots, \ (n-1)\frac{\pi}{n}.$$

Die zweite Konstituente gehört zu $\lambda = \infty$, $n\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\alpha = \frac{\pi}{2n}$; die zugehörigen Winkel sind:

$$\frac{\pi}{2n}, \ \frac{3\pi}{2n}, \ \ldots, \ (2n-1)\frac{\pi}{2n}.$$

Je nachdem n gerade oder ungerade ist, ist $Z = 0$ oder $N = 0$ vom Grade $n-1$; diese Gradreduktion rührt von einer Wurzel ∞ her, welche zu dem Strahle mit dem Winkel $\frac{\pi}{2}$ gehört; dieser Winkel befindet sich in der ersten Reihe als $\frac{n}{2} \cdot \frac{\pi}{n}$, bzw. in der zweiten als $n \cdot \frac{\pi}{2n}$.

Bei ungeradem n sind die beiden Konstituenten zueinander rechtwinklig und hat jeder regelmäßige n-Strahl des Büschels einen zu ihm rechtwinkligen. Bei geradem n ist jeder zu sich selbst rechtwinklig.

Setzt man $\lambda = \pm i$, so wird bei ungeradem n:

$$0 = Z \mp iN = (-1)^{\frac{n-1}{2}} (x \mp i)^n,$$

und bei geradem n:

$$0 = Z \mp iN = \mp i(-1)^{\frac{n}{2}} (x \mp i)^n,$$

also beidemal:

$$(x \mp i)^n = 0.$$

Wir erhalten, den Parametern $\lambda = \pm i$ entsprechend, zwei imaginäre Gruppen in der Involution, deren sämtliche Strahlen sich vereinigt haben: in dem einen oder andern der beiden isotropen Strahlen des Büschels. Eine Drehung um $\frac{\pi}{n}$ versetzt jeden Strahl eines regelmäßigen n-Strahls in den nächstfolgenden; wir wissen aber, bei jeder Drehung bleiben die beiden isotropen Strahlen fest.

Wenn in einer Gleichung n^{ten} Grades alle n Wurzeln gleich sind, so ist das damit äquivalent, daß $(n-1)$-mal zwei benachbarte in der Größen-Reihenfolge einander gleich sind. Die $2(n-1)$ Doppelstrahlen, im allgemeinen verteilt auf $2(n-1)$ Gruppen, haben wir hier, als zwei n-fache Strahlen, in zwei Gruppen.

Die andere Verallgemeinerung der gemeinen Involution ist 138
folgende.

In zwei konjektiven Gebilden sei dem Elemente A_1 des ersten A_2 im zweiten entsprechend, diesem, zum ersten gerechnet, A_3 wiederum im zweiten, und durch Fortsetzung dieses Prozesses ergeben sich $A_4, A_5, \ldots$. Sind die Gebilde involutorisch, so fällt schon A_3 mit A_1 zusammen, und zwar gleichgültig, von welchem Elemente A_1 ausgegangen wird.

Nehmen wir nun an, daß, für ein bestimmtes Ausgangselement A_1, das Element A_{n+1} der Reihe (und kein früheres) mit A_1 koinzidiere; so daß eine geschlossene Gruppe von n Elementen $A_1, A_2, \ldots, A_n$ entsteht, in der jedem Elemente aus dem ersten Gebilde das folgende im zweiten, dem letzten das erste entspricht. Es ist dann:

$$A_1 A_2 A_3 \ldots A_n \barwedge A_2 A_3 \ldots A_1 \barwedge A_3 A_4 \ldots A_1 A_2 \barwedge \ldots.$$

Wenn $A_q \equiv A_p$ $(n \geqq q > p)$ wäre, so würde auch

$$A_{p-1} \equiv A_{q-1}, \ldots, A_{p-k} \equiv A_{q-k}$$

sein; mithin $A_1 \equiv A_{q-p+1}$; dieser Zeiger ist $< n$; es würde also schon ein früheres Element mit A_1 koinzidieren. Es sind demnach die Elemente einer solchen Gruppe alle voneinander verschieden.

Eine derartige Gruppe möge eine zyklisch-projektive Gruppe n^{ten} Grades oder kürzer Zyklus n^{ten} Grades heißen und binär, ternär, ..., wenn $n = 2, 3, \ldots$. Aber vom Falle $n = 2$, als dem schon bekannten, sehen wir im folgenden ab.

Ist eine solche Gruppe vorhanden, so führt jedes weitere Element B_1 des Trägers (das kein Koinzidenzelement ist) zu einer

ebenso beschaffenen Gruppe. Denn wenn $B_2, B_3, \dots$ in der obigen Weise aus B_1 hervorgehen, so ist:

$$A_1A_2A_3B_1 \barwedge A_2A_3A_4B_2 \barwedge \dots \barwedge A_nA_1A_2B_n \barwedge A_1A_2A_3B_{n+1};$$

aus: $A_1A_2A_3B_1 \barwedge A_1A_2A_3B_{n+1}$ folgt: $B_{n+1} \equiv B_1$.

Von diesen Elementen B fällt keines mit einem der A oder einem andern B zusammen.[1])

Angenommen, es wäre $B_i \equiv A_k$, so wäre $B_{i-h} \equiv A_{k-h}$, also $B_1 \equiv A_l$, wo $l \equiv 1 + k - i \pmod{n}$, und B_1 gehörte zur A-Gruppe, was wider die Voraussetzung ist.

Es sei zweitens $B_q \equiv B_p$, wo wieder $n \geq q > p$, so ist $q = p + 1$ schon ausgeschlossen, weil dann B_p und daher auch B_1 Koinzidenzelement wäre. Wir haben:

$$A_1A_2A_3B_{q-1} \barwedge A_2A_3A_4B_p \barwedge \dots \barwedge A_1A_2A_3B_{p-1};$$

also $B_{p-1} \equiv B_{q-1}$, ebenso: $B_{p-h} \equiv B_{q-h}$, daher $B_1 \equiv B_{k+1}$, wo $k = q - p < n$.

Dann ist wiederum:

$$A_1A_2A_3B_1B_2 \dots B_k \barwedge A_2A_3A_4B_2B_3 \dots B_1 \barwedge \dots$$
$$\barwedge A_{k+1}A_{k+2}A_{k+3}B_1B_2 \dots B_k.$$

Ist $k > 2$, so bedeutet dies, weil mindestens drei sich selbst entsprechende Elemente vorhanden sind: $A_{k+1} \equiv A_1$, aber $k < n$; und demnach widerspricht dies der obigen Voraussetzung, daß kein früheres Element mit A_1 koinzidiere als A_{n+1}.

Bei $k = 2$ würden wir haben:

$$A_1A_2A_3B_1B_2 \barwedge A_2A_3A_4B_2B_1;$$

es würden sich B_1 und B_2 involutorisch entsprechen, während dem A_2 in dem einen Sinne A_3, in dem andern A_1 korrespondiert ($n > 2$); was nicht vereinbar ist.

Jedes Element führt also zu einer zyklisch-projektiven Gruppe, und die ganze Projektivität Π ist zyklisch vom n^{ten} Grade. Daß eine zyklische Projektivität bei Schnitt und Projektion erhalten bleibt, ist unmittelbar ersichtlich.

Eine ternäre zyklische Projektivität ist gerade durch einen Zyklus festgelegt:

$$A_1A_2A_3 \barwedge A_2A_3A_1.$$

Aber für $n > 3$ sind Bedingungen zu erfüllen; bei $n = 4$ haben wir:

$$A_1A_2A_3A_4 \barwedge A_2A_3A_4A_1 \barwedge A_1A_4A_3A_2;$$

d. h. A_1A_1, A_3A_3, A_2A_4 sind in Involution, oder A_1 und A_3 sind zu A_2 und A_4 harmonisch.

---

1) Zum folgenden vgl. vielfach Lüroth, Math. Annalen, Bd. 11, S. 84.

Wir nehmen an, die Projektivität sei von einem Kegelschnitte getragen und s sei die Projektivitätsaxe. 139

Wenn bei einer beliebigen Projektivität auf einem Kegelschnitte

$$A_1 A_2 \ldots A_n \barwedge \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \ldots \mathfrak{A}_n,$$

so schneiden sich

$$A_1 \mathfrak{A}_{n-1},\ \mathfrak{A}_1 A_{n-1};\ A_2 \mathfrak{A}_{n-2},\ \mathfrak{A}_2 A_{n-2};\ \ldots$$

auf der Axe s, d. h. in unserm Falle, wo $\mathfrak{A}_i \equiv A_{i+1}$:

$$A_1 A_n,\ A_2 A_{n-1};\ A_2 A_{n-1},\ A_3 A_{n-2};\ \ldots;$$

daher gehen $A_1 A_n$, $A_2 A_{n-1}$, $A_3 A_{n-2}$, ..., also alle Verbindungslinien solcher Punkte des Zyklus, welche die Zeigersumme $\equiv 1 \pmod{n}$ haben, durch einen und denselben Punkt P_1 auf s; und es besteht die Involution

$$A_1 A_n,\ A_2 A_{n-1},\ A_3 A_{n-2},\ \ldots.$$

Ebenso haben $A_2 \mathfrak{A}_{n-1}$, $\mathfrak{A}_2 A_{n-1}$; $A_3 \mathfrak{A}_{n-2}$, $\mathfrak{A}_3 A_{n-2}$; ... einen Schnittpunkt auf s, oder die Punkte

$$A_2 A_n,\ A_3 A_{n-1},\ A_4 A_{n-1},\ \ldots$$

mit der Zeigersumme $\equiv 2 \pmod{n}$ sind involutorisch gepaart und das Zentrum P_2 liegt wieder auf s.

Solcher Involutionen erhalten wir im ganzen n mit den Zeigersummen $\equiv 1, 2, \ldots, n \pmod{n}$ und den Zentren $P_1, P_2, \ldots, P_n$ auf der Projektivitätsaxe s.

Diese Punktreihe $P_1 P_2 \ldots P_n$ auf s ist selbst eine zyklisch-projektive Gruppe. Denn sie ist die Projektion von $A_1 A_2 \ldots A_n$ aus A_n, von $A_2 A_3 \ldots A_1$ aus A_{n-1}, usw.

Die Involution: $A_1 A_n$, $A_2 A_{n-1}$, ... lehrt, daß auch

$$A_1 A_2 A_3 \ldots A_n \barwedge A_n A_{n-1} \ldots A_1;$$

so daß alle $2n$ Gruppen, die n zyklischen des einen Sinnes und die n Umkehrungen, zueinander projektiv sind.

Bei $n = 6$ z. B. haben wir sechs Involutionen, drei mit drei Paaren wie: $A_1 A_6$, $A_2 A_5$, $A_3 A_4$ und drei mit vier Paaren wie: $A_1 A_1$, $A_2 A_6$, $A_3 A_5$, $A_4 A_4$; wegen dieser sind A_2, A_6 und A_3, A_5 zu A_1, A_4 harmonisch.

Gehen wir, umgekehrt, von drei solchen Harmonizitäten aus, etwa:

$$(A_1 A_5 A_3 A_6) = (A_2 A_4 A_3 A_6) = (A_2 A_5 A_4 A_6) = -1,$$

so liefern die beiden ersten die Involution:

$$1)\quad A_1 A_5,\ A_2 A_4,\ A_3 A_3,\ A_6 A_6;$$

ferner $A_1 A_5 A_3 A_6 \barwedge A_4 A_6 A_2 A_5$ die Involution:

$$2)\quad A_1 A_4,\ A_2 A_3,\ A_5 A_6.$$

Also ist:

$$A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6 \barwedge A_5 A_4 A_3 A_2 A_1 A_6 \text{ wegen 1)},$$
$$\barwedge A_6 A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 \text{ wegen 2)},$$
$$\text{daher } \barwedge A_5 A_6 A_1 A_2 A_3 A_4, \text{ usw.}$$

D. h. $A_1, A_2, \ldots, A_6$ bilden eine zyklisch-projektive Gruppe.

Oder gehen wir von:

$$(A_1 A_3 A_2 A_5) = (A_1 A_5 A_3 A_6) = (A_3 A_6 A_2 A_4) = -1$$

aus, so liefern diese Harmonizitäten, wenn A_1, A_2, A_3 gegeben sind, A_5, A_3, A_4, oder wenn A_1, A_3, A_5 gegeben sind, A_2, A_6, A_4.

Bei $n = 5$ ergeben sich fünf Involutionen, sämtlich gleicher Art:

$$A_1 A_5,\ A_2 A_4,\ A_3 A_3;\ A_2 A_5,\ A_3 A_4,\ A_1 A_1;\ A_1 A_2,\ A_3 A_5,\ A_4 A_4;$$
$$A_1 A_3,\ A_4 A_5,\ A_2 A_2;\ A_1 A_4,\ A_2 A_3,\ A_5 A_5.$$

Zwei von ihnen, z. B. die beiden ersten, genügen, denn sie führen zu:

$$A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 \barwedge A_5 A_4 A_3 A_2 A_1 \barwedge A_2 A_3 A_4 A_5 A_1.$$

Also müssen drei Elemente die übrigen bestimmen.

Wenn A_1, A_2, A_3 auf einem Kegelschnitte gegeben sind, so sei C der Pol von $A_1 A_3$, B_2 der vierte harmonische Punkt zu A_2 in bezug auf A_1, A_3, also der zweite Schnitt von CA_2, ferner $D = (CA_2, A_1 A_3)$ und E der Schnitt von $A_1 A_2$ mit der Tangente von A_3. Die beiden Schnitte von DE seien B_4, A_5 und A_4 der zweite Schnitt von CB_4. Dann ist $A_1 A_2 A_3$ durch $A_4 A_5$ vervollständigt.

Das Pascalsche Sechseck $A_2 A_1 A_1 A_5 B_4 A_4$ lehrt, daß $(A_1 A_5, A_4 A_2)$ mit $(A_2 A_1, A_5 B_4) = E$ und $(A_1 A_1, B_4 A_4) = C$ in gerader Linie liegt; da diese in A_3 berührt, so sind

$$A_1 A_5,\ A_2 A_4,\ A_3 A_3$$

in Involution.

Ferner werden durch die vier harmonischen Punkte A_2, B_2, C, D aus B_4 die A_2, B_2, A_4, A_5 harmonisch; demnach geht $A_4 A_5$ durch den Pol von $A_2 B_2$, d. i. den Schnitt F von $A_1 A_3$ mit der Tangente von A_2; folglich liefert dies Zentrum F die Involution:

$$A_1 A_3,\ A_4 A_5,\ A_2 A_2;$$

und wir haben zwei der obigen Involutionen.[1])

Weil die Schnitte von DE auch umgekehrt benannt werden können, so haben wir zwei Lösungen. Wenn A_1, A_2, A_3 reell sind, so liegt D innerhalb des Kegelschnitts und DE schneidet reell.

---

1) Lüroth, a. a. O., S. 86.

Eine Drehung eines Strahlenbüschels um den Scheitel führt zu zwei gleichen und gleichlaufenden Büscheln mit Koinzidenzstrahlen, die nach den absoluten Punkten gehen (Nr. 76). Geschieht die Drehung um den Winkel $\frac{\nu}{n} \cdot 2\pi$, wo $\frac{\nu}{n}$ vollständig gehoben ist, also n und ν zwei teilerfremde ganze Zahlen sind, so hat man eine zyklische Projektivität n^{ten} Grades, wenn n ungerade ist, dagegen nur vom Grade $\frac{n}{2}$, wenn n gerade ist. Denn in diesem Falle ist nach $\frac{n}{2}$-maliger Wiederholung der Drehung, d. h. nach einer Drehung um den Winkel $\nu\pi$, jeder Strahl mit sich selbst zur Koinzidenz gebracht, freilich, wegen des ungeraden ν, jeder Halbstrahl mit dem ergänzenden. Man verfolge auch die auf einer Transversale entstehende Projektivität. 140

Die Zykeln sind regelmäßige n-, bzw. $\frac{n}{2}$-Strahlen. Bei geradem n muß also um den Winkel $\frac{\nu}{2n} \cdot 2\pi = \frac{\nu}{n}\pi$ gedreht werden, damit zyklische Projektivität n^{ten} Grades sich ergibt.

Eine zyklische Projektivität vom Grade $n > 2$ hat stets imaginäre Koinzidenzelemente. Sie seien M, N, so ist (Nr. 72 und 73) $\lambda = (MNXX')$ invariant. Also: 141

$$(MNA_1A_2) = (MNA_2A_3) = \cdots = (MNA_nA_1) = \lambda.$$

Man erkennt leicht, daß das Produkt dieser n gleichen Doppelverhältnisse 1 ist; daher ist $\lambda^n = 1$. Es muß aber λ eine primitive n^{te} Wurzel der Einheit sein, d. h. eine solche, von der nicht schon eine niedrigere Potenz als die n^{te} der Einheit gleich ist; weil, wenn $\lambda^{n'} = 1$, $n' < n$, schon $(MNA_{n'}A_1) = \lambda$ wäre, also eine zyklische Projektivität von niedrigerem Grade n' vorläge.

Die n^{ten} Wurzeln von 1 sind:

$$\cos\frac{2h\pi}{n} + i\sin\frac{2h\pi}{n}, \quad h = 1, 2, \ldots, n-1, n;$$

primitive Wurzeln ergeben sich bei solchen h, die zu n teilerfremd sind. Die n'^{te} Potenz ist $\cos\frac{2hn'\pi}{n} + i\sin\frac{2hn'\pi}{n}$; ist dies 1, so muß $\frac{hn'}{n}$ ganz sein; wenn h zu n teilerfremd ist und nur dann, ist $n' = n$ der niedrigste Wert, für den das gilt.

Bei $n = 1$ ist 1 die einzige Wurzel ($h = 1$); bei $n = 2$ sind 1 und -1 die Wurzeln, zu $h = 2, 1$ gehörig, also -1 primitiv[1]); bei

1) -1 gehört bei geradem n zu $\frac{n}{2}$, was nicht teilerfremd zu n ist, wenn $n > 2$.

$n > 2$ sind also die primitiven Wurzeln imaginär. Und daher gilt dies auch für M, N, da die Punkte des Zyklus reell sind.

Zyklisch projektive Gebilde sind infolgedessen, wenn $n > 2$, stets gleichlaufend (Nr. 67).

Bei $n = 2$, der Involution, können die Koinzidenzen auch reell und die Gebilde ungleichlaufend sein.

Wenn $\varphi(n)$ die bekannte zahlentheoretische Funktion ist, die Anzahl der Zahlen in der Reihe $1, \ldots, n$, die zu n teilerfremd sind, so gibt es $\varphi(n)$ primitive Wurzeln und so viele Invariantenwerte beim Grade n. Die zu h und $n - h$ gehörigen Wurzeln sind reziprok und zugleich primitiv oder nicht, so daß **sich $\frac{1}{2}\varphi(n)$ Paare reziproker Invarianten ergeben.**

Zwei Zykeln aus zyklischen Projektivitäten vom Grade n mit der nämlichen primitiven Wurzel als Invariante oder mit reziproken Invarianten sind projektiv. Denn es sei die Projektivität:

$$(\mathfrak{P}) \quad MNA_1 \barwedge M_1N_1B_1$$

festgelegt, wo

$$MNA_1A_2 \ldots \barwedge MNA_2A_3 \ldots,$$
$$M_1N_1B_1B_2 \ldots \barwedge M_1N_1B_2B_3 \ldots$$

die beiden gegebenen zyklischen Projektivitäten sind, so folgt aus der Gleichheit der Invarianten:

$$(MNA_1A_2) = (M_1N_1B_1B_2), \; (MNA_2A_3) = (M_1N_1B_2B_3), \; \ldots,$$

daß:

$$A_1A_2 \ldots A_n \barwedge B_1B_2 \cdots B_n.$$

Sind die Invarianten reziprok, so ist:

$$(MNA_1A_2) = (N_1M_1B_1B_2), \; \ldots,$$

und wir haben die Projektivität:

$$MNA_1 \barwedge N_1M_1B_1,$$

in der die Zykeln entsprechend sind.

Da es bei $n = 4$ und $n = 6$ nur zwei primitive Wurzeln gibt, welche reziprok sind, so sind zwei Zykeln 4. Grades oder zwei Zykeln 6. Grades immer projektiv.

Bei $n = 6$ können wir es auch aus der obigen Konstruktion folgern, durch welche wir A_4, A_5, A_6 aus A_1, A_2, A_3 gewonnen haben.

142 Es liege eine zyklische Projektivität Π n^{ten} Grades ($n > 2$) auf einer Gerade vor. Wir konstruieren (Nr. 75) die repräsentierende Involution der imaginären Koinzidenzpunkte: zu jedem Punkte $Z \equiv X \equiv Y'$ der Gerade suchen wir die beiden entsprechenden Punkte X', Y und in bezug auf sie den vierten harmonischen Punkt Z_1 zu Z, so ist ZZ_1 ein Paar jener Involution. Über diese elliptische Involution stellen

wir eine rechtwinklige (Nr. 79) und projizieren aus dem Scheitel O die Π in eine ebenfalls zyklische, deren Koinzidenzstrahlen durch diese rechtwinklige Involution dargestellt werden, folglich nach den absoluten Punkten gehen. Ist also $z \equiv x \equiv y'$ ein Strahl des Büschels, so ist der zu ihm rechtwinklige z_1 der ihm in bezug auf x' und y harmonische, mithin halbieren z und z_1 die Winkel $x'y$. Nun sind y, z, x' drei aufeinander folgende Strahlen eines Zyklus; jeder Strahl des Büschels halbiert also in demjenigen Zyklus, zu dem er gehört, den einen Winkel der beiden in der Reihenfolge des Zyklus ihm benachbarten Strahlen; demnach liegt in dem Zyklus ein regelmäßiger n-Strahl vor.

Damit ist eine beliebige zyklische Projektivität n^{ten} Grades auf einer Gerade perspektiv gemacht worden zu derjenigen speziellen zyklischen Projektivität im Strahlenbüschel, welche durch Drehung desselben um den Winkel $\frac{2\nu\pi}{n}$, bzw. $\frac{\nu\pi}{n}$ bei ungeradem, geradem n entsteht.

Die regelmäßigen n-Strahlen stehen über den Zykeln von Π. Da jene eine Involution n^{ten} Grades erzeugen, so bilden in jeder zyklischen Projektivität die Zykeln eine Involution n^{ten} Grades, worauf schon der Umstand hinweist, daß jedes Element zu einem Zyklus gehört. Die isotropen Strahlen des Büschels sind je n-fache Strahlen der Involution und repräsentieren alle $2(n-1)$ Doppelstrahlen, jeder $n-1$ (Nr. 137), also gilt Entsprechendes für die Koinzidenzen von Π.

Wir wissen, ν muß teilerfremd zu n sein, damit regelmäßige n-Strahlen entstehen. Wir haben, wie oben gefunden, $\varphi(n)$ Werte ν, wir können uns aber auf die $\frac{1}{2}\varphi(n)$ Werte von ν beschränken, die unter $\frac{1}{2}n$ liegen, weil die zu n ergänzenden nur die Drehungen im entgegengesetzten Sinne liefern, welche die Umkehrungen der zu jenen ν gehörigen Drehungen sind. Auch die reziproken Invarianten entsprechen den Umkehrungen; denn zu (MNA_1A_2) ist reziprok (MNA_2A_1).

Ebenso wie bei den regelmäßigen Vielecken, wollen wir ν die Art des regelmäßigen n-Strahls nennen; nach n Drehungen um je $\frac{2\nu\pi}{n}$, bzw. $\frac{\nu\pi}{n}$ wird der ganze Winkel 2π, bzw. π ν-mal durchlaufen, jeder Strahl kehrt in sich zurück: jeder Halbstrahl in sich selbst oder in den ergänzenden, je nachdem n ungerade, gerade ist.

Die perspektive Lage lehrt nun, daß die Art auch auf den allgemeinen Fall übertragen werden kann: sie sagt aus, wie oft das Gebilde von einem Zyklus durchlaufen wird, und eine zyklisch projektive Gruppe 1. Art können wir eine ordentliche Gruppe nennen.

Für die Drehung um den Winkel θ ist die Invariante nach Nr. 74:

$$e^{2i\theta} = \cos 2\theta + i \sin 2\theta,$$

also wenn $\theta = \frac{2\nu\pi}{n}$, bzw. $\frac{\nu\pi}{n}$:

$$\cos\frac{4\nu\pi}{n} + i\sin\frac{4\nu\pi}{n} \quad (n \text{ ungerade})^{1)},$$

$$\cos\frac{2\nu\pi}{n} + i\sin\frac{2\nu\pi}{n} \quad (n \text{ gerade});$$

z. B. zu $n = 5$ gehören die nicht reziproken Invarianten für $\nu = 1, 2$:

$$\cos\frac{4}{5}\pi + i\sin\frac{4}{5}\pi, \quad \cos\frac{2}{5}\pi - i\sin\frac{2}{5}\pi,$$

bei $n = 6$ nur für $\nu = 1 : \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$.

Wir können nun auch sagen: Zykeln gleichen Grades und gleicher Art sind unter sich und mit den Umkehrungen projektiv.

Wenn $\nu = k\nu'$, wo k ganz ist, so ist, infolge der Eigenschaften der Wurzeln der Einheit, die zu ν gehörige Invariante die k^{te} Potenz der zu ν' gehörigen.

Sobald die Art ν bekannt ist, kann man drei demselben Zyklus angehörige Elemente eines Gebildes geben: A_i, A_k, A_l, wo i, k, l irgend drei der Zeiger $1, 2, \cdots n$ sind, und die Projektivität vervollständigen. Man konstruiere von einem regelmäßigen n-Strahle ν^{ter} Art den i^{ten}, k^{ten}, l^{ten} Strahl a_i, a_k, a_l, stelle die Projektivität:

$$\mathfrak{P} \; a_i a_k a_l \barwedge A_i A_k A_l$$

her, vervollständige die zyklische Projektivität der regelmäßigen n-Strahlen ν^{ter} Art, zu welcher jener n-Strahl gehört, und übertrage sie durch $\mathfrak{P}$ in das andere Gebilde.

Also ist die zyklische Projektivität n^{ten} Grades von gegebener Art durch jede drei Elemente eines Zyklus mit gegebener Stellenzahl eindeutig bestimmt, bei $n = 3, 4, 6$, wo es nur eine Art gibt, ganz eindeutig, bei $n = 5$, wegen der zwei Arten, zweideutig, wie sich das oben (Nr. 139) gezeigt hat.

143 Aus einer zyklischen Projektivität Π kann man zu den andern Arten auch durch Potenzierung kommen. Wir haben:

$$\Pi \quad A_1 A_2 \ldots A_n \barwedge A_2 A_3 \ldots A_n A_1 \barwedge A_3 A_4 \ldots A_1 A_2 \barwedge \ldots$$

---

1) Die Werte von $\cos\frac{4\nu\pi}{n} + i\sin\frac{4\nu\pi}{n}$, $\nu = 1, \ldots n$ und $\cos\frac{2h\pi}{n} + i\sin\frac{2h\pi}{n}$, $h = 1, 2, \ldots n$ stimmen derartig überein, daß zu den Werten $\nu = 1, 2 \ldots \frac{n-1}{2}$ die Werte $h = 2, 4, \ldots n-1$, zu den Werten $\nu = \frac{n+1}{2}, \frac{n+3}{2}, \ldots n$ die Werte $h = 1, 3, 5, \ldots n$ gehören.

Stellen wir neben $A_1 A_2 \ldots A_n$ die mit A_{1+k} beginnende Form des Zyklus:

$$\Pi^k \quad A_1 A_2 \ldots A_n \barwedge A_{1+k} A_{2+k} \ldots A_{k},$$

wo rechts jeder n übersteigende Zeiger modulo n reduziert ist. Diese Projektivität ist durch k-malige Wiederholung der gegebenen Π erhalten und kann, wie in Nr. 86, ihre k^{te} Potenz genannt[1]) und mit Π^k bezeichnet werden. In ihr entspricht dem Elemente A_i das Element A_{i+k}; wenn wir also zyklisch anordnen, so haben wir die $n+1$ Elemente:

$$A_1, A_{1+k}, A_{1+2k}, \ldots A_{1+nk} \equiv A_1,$$

von denen das letzte mit dem ersten identisch ist, daher einen Zyklus von n Elementen, und Π^k ist ebenfalls zyklisch.

Man kann aber schon früher zu A_1 zurückkehren. Es sei d der größte gemeinsame Teiler von n und k, so daß $n = n'd$, $k = k'd$ und n' und k' teilerfremd sind; dann ist $n'k = nk'$, und $A_{1+n'k} \equiv A_{1+k'n} \equiv A_1$. Wenn also $d > 1$ und daher $n' < n$, ein Teiler von n ist, so sind wir schon mit dem $(1+n')^{ten}$ Elemente der Reihe zu A_1 zurückgekehrt, und haben nur einen Zyklus von $n' = \frac{n}{d}$ Elementen. Nehmen wir nun ein Element der obigen n-elementigen Reihe $A_1, A_{1+k}, \ldots$ das noch nicht zu diesem n'-elementigen Zyklus gehört, so führt es zu einem neuen n'-elementigen, der von dem ersten völlig verschieden ist; denn gehörte eins seiner Elemente zu demselben, so könnte er ja mit diesem Elemente begonnen werden und würde unser jetziges Anfangselement als eins seiner Elemente enthalten, was gegen die Voraussetzung ist. Also zerlegt sich die n-elementige Reihe in d Zykeln von je $\frac{n}{d}$ Elementen.

Z. B. $n = 6 \quad A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6 \barwedge A_2 A_3 A_4 A_5 A_6 A_1$.

1) $k = 2,\ d = 2,\ \frac{n}{d} = 3 : A_1 A_2 \ldots A_6 \barwedge A_3 A_4 A_5 A_6 A_1 A_2$;

dies gibt zwei Zykeln 3. Grades $A_1 A_3 A_5$, $A_2 A_4 A_6$.

2) $k = 3,\ d = 3,\ \frac{n}{d} = 2 : A_1 A_2 \ldots A_6 \barwedge A_4 A_5 A_6 A_1 A_2 A_3$

mit drei Zykeln 2. Grades $A_1 A_4$, $A_2 A_5$, $A_3 A_6$, daher Involution.

Wenn also k nicht teilerfremd zu n und d ihr größter gemeinsamer Teiler ist, so ist die k^{te} Potenz Π^k nur zyklisch vom Grade $\frac{n}{d}$.

---

1) Die n^{te} Potenz ist die Identität oder 1 (Nr. 86), also auch die 0te Potenz, die $(n-1)^{te}$ die Umkehrung; daher stammt deren Bezeichnung als $(-1)^{te}$ Potenz.

Ist aber k teilerfremd, so ist auch Π^k n^{ten} Grades; z. B.

$$n = 6,\ k = 5 : A_1 \dots A_6 \barwedge A_6 A_1 A_2 A_3 A_4 A_5;$$

der Zyklus ist $A_1 A_3 A_5 A_4 A_3 A_2$, die Umkehrung.

k und $n - k$ sind zugleich teilerfremd oder nicht; die zugehörigen Projektivitäten Π^k und Π^{n-k} sind immer Umkehrungen voneinander; begnügen wir uns mit dem wichtigeren Falle der Teilerfremdheit. Die beiden Zykeln sind dann:

$$\begin{array}{ll} A_1 A_{1+k}\ A_{1+2k} \cdots & A_{1+(n-1)k} \\ A_1 A_{1+(n-k)}\ A_{1+2(n-k)} \cdots & A_{1+(n-1)(n-k)}. \end{array}$$

Damit diese Umkehrungen voneinander seien, müssen das $(i+1)^{\text{te}}$ Element unten und das $(1+n-i)^{\text{te}}$ oben übereinstimmen, d. h. nach dem Modul n kongruente Zeiger haben. Jenes $(i+1)^{\text{te}}$ hat den Zeiger $1 + i(n-k)$, dieses $(1+n-i)^{\text{te}}$ den Zeiger $1 + (n-i)k$; beide sind $\equiv 1 - ik \pmod n$.

Die zu Π^k gehörige Invariante ist die k^{te} Potenz der zu Π gehörigen.

Denn durch die Wiederholung von Π wird an den Koinzidenzen nichts geändert; sie gehören zu allen Potenzen. Es war:

$$\lambda = (MNA_1 A_2) = (MNA_2 A_3) \dots = (MNA_k A_{k+1});$$

das Produkt dieser k Doppelverhältnisse ist:

$$\lambda^k = (MNA_1 A_{1+k}),$$

die Invariante von Π^k.

Die Invariante für eine zyklische Projektivität Π ν^{ter} Art ist $e^{\frac{4\nu\pi i}{n}}$, bzw. $e^{\frac{2\nu\pi i}{n}}$, je nachdem n ungerade oder gerade ist. Weil $e^{2\pi i} = 1$, so ist Π^k von der Art ν_1, wenn:

$$k\nu \equiv \nu_1 \pmod n,$$

denn die bei ungeradem n zunächst sich ergebende Kongruenz $2k\nu \equiv 2\nu_1 \pmod n$ kann, weil 2 zu n teilerfremd ist, auch darauf zurückgeführt werden.

Die Art ν einer zyklischen Projektivität finden wir, indem wir sie zu derjenigen, welche aus regelmäßigen n-Strahlen besteht, projektiv machen, als deren Art (Nr. 142); die Kongruenz $k\nu \equiv 1 \pmod n$ liefert dann den Exponenten k, durch den ihre Zykeln in ordentliche übergeführt werden.

144 Die ternäre zyklische Projektivität möge nun — auf der Punktreihe — etwas eingehender betrachtet werden. Es ist:

$$A_1 A_2 A_3 \barwedge A_2 A_3 A_1 \barwedge A_3 A_1 A_2.$$

Nun sei B_1 zu A_1 harmonisch in bezug auf A_2, A_3, so daß

$(A_2 A_3 A_1 B_1) = -1$, und $B_1 B_2 B_3$ der aus B_1 hervorgehende Zyklus, dann ist:

$$(A_2 A_3 A_1 B_1) = (A_3 A_1 A_2 B_2) = (A_1 A_2 A_3 B_3),$$

daher sind diese letzteren Würfe harmonisch; die drei vierten harmonischen Punkte B_1, B_2, B_3 bilden also einen neuen Zyklus, und zu jedem Zyklus der Projektivität gehört ein solcher zweiter.

Die drei Paare $A_1 B_1$, $A_2 B_2$, $A_3 B_3$ sind in Involution; denn aus den drei Harmonizitäten folgt:

$$A_2 A_1 \cdot A_3 B_1 = - A_1 A_3 \cdot B_1 A_2, \quad A_3 A_2 \cdot A_1 B_2 = - A_2 A_1 \cdot B_2 A_3,$$
$$A_1 A_3 \cdot A_2 B_3 = - A_3 A_2 \cdot B_3 A_1;$$

daraus durch Multiplikation:

$$A_1 B_2 \cdot A_2 B_3 \cdot A_3 B_1 = - B_1 A_2 \cdot B_2 A_3 \cdot B_3 A_1,$$

die Chaslessche Involutionsrelation (Nr. 11).

Diese Involution gibt wiederum:

$$(B_2 B_3 B_1 A_1) = (A_2 A_3 A_1 B_1) = -1;$$

folglich gehen die Elemente A aus den B ebenso hervor, wie die B aus den A.

Wenn M, N die Doppelpunkte dieser Involution sind, so sind A_1, B_1 sowohl zu A_2, A_3, als zu M, N harmonisch; daher die Doppelelemente der Involution $(A_2 A_3, MN)$, ebenso A_2, B_2 die von $(A_3 A_1, MN)$ und $A_3 B_3$ die von $(A_1 A_2, MN)$. Somit sind in Involution $A_1 A_1$, $A_2 A_3$, MN, ebenso: $A_3 A_3$, $A_1 A_2$, MN; aus jener folgt: $(A_1 A_2 A_3 M) = (A_1 A_3 A_2 N)$, aus dieser: $(A_1 A_3 A_2 N) = (A_2 A_3 A_1 M)$; also

$$(A_1 A_2 A_3 M) = (A_2 A_3 A_1 M);$$

d. h. M ist das eine Koinzidenzelement unserer zyklischen Projektivität:

$$A_1 A_2 A_3 \barwedge A_2 A_3 A_1,$$

und N das andere; also sind M, N imaginär.

Es empfiehlt sich, eben wegen dieser Imaginarietät, die ganz analog verlaufende Untersuchung mit den Parameterrelationen vorzunehmen.

Die Doppelpunkte der Involution $A_1 B_1$, $A_2 B_2$, $A_3 B_3$ sind mit den Koinzidenzpunkten der Projektivität

$$A_1 A_2 A_3 B_1 B_2 B_3 \barwedge A_2 A_3 A_1 B_2 B_3 B_1$$

identisch, und wir haben in jener die diese repräsentierende elliptische Involution.

Wir fanden:

$$(A_1 A_2 A_3 M) = (A_2 A_3 A_1 M), \text{ also auch } = (A_3 A_1 A_2 M);$$

durch Multiplikation ergibt sich, wenn ϱ der gemeinsame Wert ist:

$$\varrho^3 = (A_1 A_2 A_3 M) \cdot (A_2 A_3 A_1 M) \cdot (A_3 A_1 A_2 M) = -1;$$

und ähnlich bei N; also sind

$$(A_1 A_2 A_3 M) \quad \text{und} \quad (A_1 A_2 A_3 N)$$

die imaginären kubischen Wurzeln der negativen Einheit:

$$\tfrac{1}{2}(1 \pm i\sqrt{3}),$$

oder die Wurzeln der quadratischen Gleichung:

$$\varrho^2 - \varrho + 1 = 0.$$

Sie sind reziprok zueinander.[1])

Ein Wurf von vier Elementen mit einem dieser Werte für das Doppelverhältnis wird ein äquianharmonischer Wurf genannt. Er hat die besondere Eigenschaft, daß aus den vier Elementen nicht sechs, sondern nur zwei verschiedenwertige Doppelverhältnisse gebildet werden können, zweimal drei gleiche

Setzen wir $(A_1 A_2 A_3 M) = \varrho$, so ist $(A_2 A_3 A_1 M)$, welches ebenfalls ϱ ist, $= (A_1 M A_2 A_3) = \frac{\varrho - 1}{\varrho}$ (Nr. 6); und $(A_3 A_1 A_2 M)$, welches auch ϱ ist, ist $= (A_1 A_3 M A_2) = \frac{1}{1 - \varrho}$.

Es ist also:

$$\varrho = \frac{\varrho - 1}{\varrho} = \frac{1}{1 - \varrho},$$

und die drei reziproken sind auch gleich:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\varrho}{\varrho - 1} = 1 - \varrho.$$

Aus dem Gleichsetzen von je zweien folgt die obige quadratische Gleichung.

Die drei gleichen Doppelverhältnisse bilden einen Zyklus, insofern man, von jedem ausgehend, in derselben Weise zu den beiden andern gelangt; z. B. wenn $\frac{\varrho - 1}{\varrho} = \sigma$ gesetzt wird, so ist:

$$\varrho = \frac{1}{1 - \sigma} \quad \text{und} \quad \frac{1}{1 - \varrho} = \frac{\sigma - 1}{\sigma};$$

usw.

Wir haben hier zweimal zwölf gleiche Doppelverhältnisse:

$$(ABCD) = (ACDB) = (ADBC)$$
$$= (BADC) = (BDCA) = (BCAD)$$

1) Ihre beiden Quotienten sind die imaginären kubischen Wurzeln der positiven Einheit: $\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{1 \mp i\sqrt{3}} = \frac{1}{2}(-1 \pm i\sqrt{3})$.

$$= (CDAB) = (CABD) = (CBDA)$$
$$= (DCBA) = (DBAC) = (DACB),$$

und die zwölf reziproken: $(ABDC)$ usw.

Es seien nun die Elemente A_1, A_2, A_3 nicht alle drei reell, sondern nur eins A_1, die beiden andern konjugiert imaginär; dann sind gerade M, N reell. In der Tat, die Parameter von A_1, A_2, A_3, M seien a, $b \pm ci$, x, so haben wir:

$$(A_1 A_2 A_3 M) = \frac{a-b+ci}{2ci} \cdot \frac{b+ci-x}{a-x} = \frac{1}{2}(1+i\sqrt{3});$$

diese Gleichung ist reell:

$$ab - b^2 - c^2 - ax + bx = \sqrt{3}(cx - ac).$$

B_1 ist reell, B_2, B_3 sind ebenfalls konjugiert imaginär. Die Involution A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 besteht also aus einem reellen Paare und zwei imaginären, die zueinander konjugiert sind: sie ist hyperbolisch.

Zu einem regelmäßigen Dreistrahle $a_1 a_2 a_3$ ist der harmonische $b_1 b_2 b_3$ der zu ihm senkrechte; denn weil a_1 die eine Halbierungslinie von $a_2 a_3$ ist, so ist b_1 die andere und zu jener senkrecht.

Ist der Anfangsstrahl, von dem die Winkel gemessen werden, einer der a, so ist die Gleichung der a-Gruppe in Tangenten:

$$x^3 - 3x = 0$$

und die der b-Gruppe

$$0 \cdot x^3 + 3x^2 - 1 = 0;$$

die Wurzeln sind

$$0,\ \sqrt{3},\ -\sqrt{3};\ \infty,\ -\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Wir wollen für diese Figur wiederum einen Kegel- 145
schnitt K als Träger annehmen; das Dreieck der Tangenten der Punkte A_1, A_2, A_3 sei $C_1 C_2 C_3$. Die drei Verbindungslinien A_1C_1, A_2C_2, A_3C_3 laufen in einen Punkt S zusammen; schneiden wir sie mit K zum zweiten Male, so erhalten wir die vierten harmonischen Punkte B_1, B_2, B_3; denn A_2A_3 und A_1B_1 sind konjugierte Geraden. S ist daher das Zentrum der Involution A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 und die Polare s von S schneidet die Doppelpunkte M, N ein. Es sei nun D_1 der Schnittpunkt von A_2A_3 mit A_1C_1, so daß der Wurf $A_1B_1C_1D_1$ harmonisch ist; S und C_1 sind zu A_1, D_1 harmonisch. Das gibt eine einfache Konstruktion von S und infolgedessen von s, M, N, die auch reell bleibt, wenn A_2, A_3 konjugiert imaginär werden und durch eine Involution auf K dargestellt sind; denn C_1 ist das Zentrum derselben und D_1 liegt auf ihrer Axe. Sind A_2, A_3 reell, so liegt C_1 außerhalb K, also D_1 innerhalb und deshalb auch S, mag A_1B_1 Außen- oder Innensehne sein; also sind M, N imaginär. Sind aber A_2, A_3 konjugiert

imaginär, so liegt C_1 innerhalb, D_1 außerhalb; und dieselbe Lage hat S, also sind M, N reell. Die Involution (B_2, B_3), welche die Punkte B_2, B_3 darstellt, geht aus der Involution (A_2, A_3), welche A_2, A_3 darstellt, durch diejenige hervor, welche S zum Zentrum hat; denn diese führt die einen Doppelpunkte in die andern über; $A_1 B_1$ ist allen dreien gemeinsam. Also liegt das Zentrum E_1 von (B_2, B_3) ebenfalls auf $A_1 B_1$.

Es seien X und X_1 zwei gepaarte Punkte der Involution (A_2, A_3), also in gerader Linie mit C_1; projiziert man dann die harmonischen Würfe $A_1 B_1 C_1 D_1$ und $A_1 D_1 C_1 S$ aus X auf den Kegelschnitt in die harmonischen Würfe $A_1 B_1 X_1 P$ und $A_1 P X_1 X_2$, wo P der zweite Schnitt von XD_1 und X_2 derjenige von XS mit K ist, so wird dadurch XX_2 ein zweites Paar, neben $A_1 B_1$, der Involution (S), welche die Doppelpunkte M, N darstellt, und wir gewinnen die Schrötersche Lösung,[1]) die nun für beliebigen Träger ausgesprochen werden mag:

Es sind auf ihm das Element A_1 und eine Involution I gegeben, welche zwei andere Elemente A_2, A_3 darstellt; in ihr sei B_1 dem A_1 gepaart; man konstruiert, wenn X und X_1 ein beliebiges Paar von I bilden, P so, daß $A_1 B_1 X_1 P$ harmonisch sind, und dann wiederum X_2 so, daß $A_1 P X_1 X_2$ harmonisch sind; dann sind $A_1 B_1$ und XX_2 zwei Paare derjenigen Involution, welche die Elemente M, N definiert: die Koinzidenzen der zyklischen Projektivität $A_1 A_2 A_3 \barwedge A_2 A_3 A_1$, oder diejenigen Elemente, die mit A_1, A_2, A_3 äquianharmonische Würfe bilden.

Wenn in bezug auf ein Dreieck ABC der Punkt P und die Gerade p harmonischer Pol und harmonische Polare sind (Nr. 52), so sind die Punkte $A' = (BC, PA)$, $B' = (CA, PB)$, $C' = (AB, CP)$ bzw. zu den Schnitten A'', B'', C'' von p in bezug auf die Ecken harmonisch. Es gibt einen Kegelschnitt $\mathfrak{K}$, welcher die Seiten in A', B', C' berührt, und einen $\mathfrak{K}_1$, welcher in A, B, C die Geraden AA'', BB'', CC'' tangiert (Nr. 119).

Die Polare von A'' in bezug auf $\mathfrak{K}$ geht durch A' und den vierten harmonischen Punkt zu A'' in bezug auf B', C', die ja mit A'' in gerader Linie liegen; dieser harmonische Punkt liegt auf PAA', und daher ist PAA' die Polare von A'' und PBB', PCC' sind die von B'', C'', und P der Pol von p.

Die drei Schnitte dieser Polaren mit p sind aber die drei vierten harmonischen Punkte, den A'', B'', C'' zugeordnet in bezug auf B'', C''; C'', A''; A'', B''. Also sind die Schnittpunkte von p mit $\mathfrak{K}$, die Doppelpunkte der Involution in bezug auf $\mathfrak{K}$ konjugierter Punkte auf p, die beiden imaginären Punkte M, N, welche mit A'', B'', C'' oder mit $p(PA, PB, PC)$ äquianharmonische Würfe bilden; und

1) Mathem. Annalen, Bd. 10, S. 420.

ihre Tangenten $P(M, N)$ bilden mit $P(A, B, C)$ äquianharmonische Würfe.

Ebenso ist A'' Pol von PAA' in bezug auf $\mathfrak{K}_1$, weil AA'' in A berührt und A', A'' konjugiert sind; B'', C'' sind Pole von PB, PC und P von p. Daraus folgt, daß $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}_1$ sich in M, N auf p imaginär berühren mit $P(M, N)$ als zugehörigen Tangenten[1]).

Die Bedingung für eine zyklische Punktprojektivität 146
läßt sich durch eine Relation zwischen der Potenz p und der Entfernung $Q'R = d$ der beiden Fluchtpunkte ausdrücken.

Fällt A_1, der Punkt der ersten Reihe, in den Fluchtpunkt Q' der zweiten, so tut es auch A_{n+1}; also fällt A_n in den unendlich fernen Punkt U, A_{n-1} in den Fluchtpunkt R. Kennzeichen der Zyklizität ist daher: Geht man mit A_1 (aus der ersten Reihe) von Q' aus, so fällt A_{n-1} in R.

Bei $n = 2$ ist $A_{n-1} \equiv A_1$; also fallen, wie bekannt, beide Fluchtpunkte zusammen: $d = 0$.

Bei $n = 3$ ist $A_{n-1} \equiv A_2$. Kennzeichen der zyklischen Projektivität 3. Grades ist, daß die beiden Fluchtpunkte, je zur andern Reihe gerechnet, einander entsprechen. Also haben wir:

$$p = RQ' \cdot Q'R = -d^2.$$

Bei $n = 4$ muß, wenn A_1 in Q' liegt, A_3 in R liegen; d. h. es müssen die Punkte, welche dem Q' als Punkt der ersten und dem R als Punkt der zweiten Reihe entsprechen, in denselben Punkt M $(= A_2)$ zusammenfallen. Wir haben die beiden Werte der Potenz: $RQ' \cdot Q'M = RM \cdot Q'R$; daraus folgt, daß M die Mitte von RQ' ist. Dies ergibt sich auch aus dem Zyklus $Q'MRU$, in welchem M und U zu Q', R harmonisch sein müssen. Daher ist:

$$p = -\tfrac{1}{2}d^2.$$

Allgemein haben wir, weil $A_1 \equiv Q'$, $A_{n-1} \equiv R$:

$$p = RQ' \cdot Q'A_2 = RA_2 \cdot Q'A_3 = RA_3 \cdot Q'A_4 = \dots$$
$$= RA_{n-3} \cdot Q'A_{n-2} = RA_{n-2} \cdot Q'R;$$

daher: $Q'A_2 = -RA_{n-2}$ und $RA_2 = -Q'A_{n-2}$.

Daraus folgt:

$$Q'A_3 = -RA_{n-3},\quad RA_3 = -Q'A_{n-3},$$

und:

$$Q'A_i = -RA_{n-i},\quad RA_i = -Q'A_{n-i};$$

folglich liegen A_i und A_{n-i} symmetrisch in bezug auf die Mitte von RQ'.

1) Steiner-Schröters Vorlesungen, 3. Aufl., Anhang Nr. 50.

Bei geradem n liegt also $A_{\frac{n}{2}}$ in dieser Mitte. Setzt man $Q'A_i = a_i$ und bildet die Potenz für die Paare $Q', A_2; A_2, A_3; \ldots A_{\frac{n}{2}-1}, M$, so ist:

$$p = -da_2 = (a_2 - d)a_3 = (a_3 - d)a_4 = \cdots = (a_{\frac{n}{2}-1} - d)\cdot\tfrac{1}{2}d.$$

Ist aber n ungerade, so sind $A_{\frac{1}{2}(n-1)}$ und $A_{\frac{1}{2}(n+1)}$, zwei im Zyklus aufeinander folgende und also entsprechende Punkte, symmetrisch in bezug auf M gelegen. Die Potenzen für die Paare $Q', A_2; A_2, A_3; \ldots A_{\frac{1}{2}(n-1)}, A_{\frac{1}{2}(n+1)}$ geben:

$$p = -da_2 = (a_2 - d)a_3 = \cdots = -(a_{\frac{1}{2}(n-1)} - d)^2.$$

Werden $a_2, a_3 \ldots$ eliminiert, so ergibt sich die gewünschte Relation und lautet in den einfacheren Fällen folgendermaßen:

$$\begin{array}{ll}
n = 2 & d = 0, \\
n = 3 & d^2 + p = 0, \\
n = 4 & d^2 + 2p = 0, \\
n = 5 & d^4 + 3d^2p + p^2 = 0, \\
n = 6 & d^2 + 3p = 0, \\
n = 7 & d^6 + 5d^4p + 6d^2p^2 + p^3 = 0, \\
n = 8 & d^4 + 4d^2p + 2p^2 = 0, \\
n = 9 & (d^2 + p)(d^6 + 6d^4p + 9d^2p^2 + p^3) = 0, \\
n = 10 & d^4 + 5d^2p + 5p^2 = 0, \\
n = 12 & (d^2 + 2p)(d^4 + 4d^2p + p^2) = 0, \\
n = 15 & (d^2 + p)(d^4 + 3d^2p + p^2)(d^8 + 9d^6p + 26d^4p^2 \\
 & \qquad + 24d^2p^3 + p^4) = 0.
\end{array}$$

Wir sehen, daß in einigen Fällen sich Faktoren ergeben, die zu Teilern von n gehören, bei $n = 12$ nur der zum Teiler 4 gehörige Faktor, bei $n = 15$ aber die zu beiden Teilern 3, 5 gehörigen.

Wir fanden, bei geradem n, daß $A_{\frac{n}{2}}$ in M fällt; bei einer andern zyklischen Projektivität Π_{n_1} von geradem Grade $n_1 < n$ fällt ebenfalls $A_{\frac{n_1}{2}}$ nach M, also, wenn der Prozeß fortgesetzt wird über A_{n_1} hinaus, auch $A_{\frac{1}{2}n_1 + hn_1}$, wo h ganz ist. Ist nun n_1 so beschaffen, daß $\frac{1}{2}n_1 + hn_1 = \frac{1}{2}n$, so fällt auch in Π_{n_1} der Punkt $A_{\frac{n}{2}}$ nach M.

Für ungerades n fanden wir $A_{\frac{1}{2}(n-1)}$ und $A_{\frac{1}{2}(n+1)}$ symmetrisch in

bezug auf M gelegen, also auch wenn $n_1 < n$ ungerade ist, $A_{\frac{1}{2}(n_1-1)}$ und $A_{\frac{1}{2}(n_1+1)}$, daher, bei Fortsetzung des Prozesses, auch $A_{\frac{1}{2}(n_1-1)+hn_1}$ und $A_{\frac{1}{2}(n_1+1)+hn_1}$. Ist n_1 so, daß $\frac{1}{2}(n_1-1)+hn_1 = \frac{1}{2}(n-1)$ und daher auch $\frac{1}{2}(n_1+1)+hn_1 = \frac{1}{2}(n+1)$, so liegen in Π_{n_1} auch $A_{\frac{1}{2}(n-1)}$ und $A_{\frac{1}{2}(n+1)}$ symmetrisch in bezug auf M.

In beiden Fällen ist $n = (2h+1)n_1$; folglich ist n_1 ein Teiler von n, der ebenso gerade und ungerade ist wie n.

So zeigt sich, daß in den obigen Relationen diejenigen Faktoren auszuscheiden sind, die zu solchen Teilern von n gehören, welche ebenso gerade und ungerade sind wie n. Eine Ausnahme macht jedoch bei geradem n der Teiler 2; denn die Bedingung $d = 0$ kann bei höheren zyklischen Projektivitäten nicht erfüllt werden, weil Koinzidenz von R und Q' nur zyklische Projektivität 2. Grades, Involution bewirkt. Die reduzierten Relationen sind also:

$$n = 9 \qquad d^6 + 6d^4p + 9d^2p^2 + p^3 = 0,$$

$$n = 12 \qquad d^4 + 4d^2p + p^2 = 0,$$

$$n = 15 \qquad d^8 + 9d^6p + 26d^4p^2 + 24d^2p^3 + p^4 = 0.$$

Wir fügen noch für die einfachsten Fälle die Relation für zyklische Projektivität in den Koeffizienten der bilinearen Relation

$$\lambda\xi\xi' + \mu\xi + \mu'\xi' + \nu = 0$$

hinzu. Bei $n = 2$ ist, wie wir wissen, $\mu - \mu' = 0$ (Nr. 72).

Bei $n = 3$ haben wir die drei Gleichungen:

$$\lambda\xi_1\xi_2 + \mu\xi_1 + \mu'\xi_2 + \nu = 0,$$
$$\lambda\xi_2\xi_3 + \mu\xi_2 + \mu'\xi_3 + \nu = 0,$$
$$\lambda\xi_3\xi_1 + \mu\xi_3 + \mu'\xi_1 + \nu = 0;$$

eliminiert man ξ_2 aus den beiden ersten Gleichungen, so ergibt sich:

a) $\lambda(\mu - \mu')\xi_1\xi_3 + (\mu^2 - \lambda\nu)\xi_1 + (\lambda\nu - \mu'^2)\xi_3 + \nu(\mu - \mu') = 0,$

zieht man hiervon die mit $(\mu - \mu')$ multiplizierte dritte Gleichung ab, so hat man, da $\xi_1 \gtrless \xi_3$ ist:

$$(\mu - \mu')^2 + (\mu\mu' - \lambda\nu) = 0.$$

Bei $n = 4$ treten an Stelle der obigen dritten Gleichung als dritte und vierte:

$$\lambda\xi_3\xi_4 + \mu\xi_3 + \mu'\xi_4 + \nu = 0,$$
$$\lambda\xi_4\xi_1 + \mu\xi_4 + \mu'\xi_1 + \nu = 0;$$

aus a) und der dritten ergibt die Elimination von ξ_3:

$$\lambda[(\mu-\mu')^2+(\mu\mu'-\lambda\nu)]\xi_1\xi_4+(\mu^2-2\lambda\mu\nu+\lambda\mu'\nu)\xi_1$$
$$+(\mu'^2-2\lambda\mu'\nu+\lambda\mu\nu)\xi_4+\nu[(\mu-\mu')^2+(\mu\mu'-\lambda\nu)]=0,$$

wird hiervon wieder die mit $(\mu-\mu')^2+(\mu\mu'-\lambda\nu)$ multiplizierte vierte Gleichung abgezogen, so ergibt sich, weil $\xi_1 \gtrless \xi_4$ und $\mu \gtrless \mu'$:

$$(\mu-\mu')^2+2(\mu\mu'-\lambda\nu)=0.$$

Nur die Verbindungen $\mu-\mu'$ und $\mu\mu'-\lambda\nu$ treten auf.

Sind speziell die Parameter Abszissen, so lassen sich, weil diejenigen der Fluchtpunkte $-\frac{\mu'}{\lambda}$ und $-\frac{\mu}{\lambda}$ sind und die Potenz $\frac{\mu\mu'-\lambda\nu}{\lambda^2}$ ist, diese Formeln leicht in die obigen umwandeln.

147 Wir kommen zu dem Prozesse der Bildung der Elementenreihe $A_1A_2A_3A_4\ldots$ zurück und wollen dartun, daß, wenn die Projektivität nicht zyklisch ist und reelle Koinzidenzelemente M, N besitzt, jene Reihe nach einem derselben und die im entgegengesetzten Sinne konstruierte nach dem andern konvergiert. Die erste sei bis A_{n+1} konstruiert; dann ist:

$$(A_1A_2MN)=(A_2A_3MN)=\cdots=(A_nA_{n+1}MN)=\lambda.$$

Die zweite im entgegengesetzten Sinne konstruierte Reihe sei ebenso weit geführt: $B_1B_2\ldots B_{n+1}$, wo dem B_1 aus dem zweiten Gebilde B_2 im ersten entspricht, usw. Es ist dann:

$$\lambda=(B_2B_1MN)=(B_1B_2NM)=(B_2B_3NM)=\cdots(B_nB_{n+1}NM).$$

Beide Doppelverhältnisse (A_1A_2MN) und (B_2B_1MN) sind gleich der Invariante $(XX'MN)$, wo X aus dem ersten Gebilde und X' im zweiten einander entsprechen. Daher ist:

$$(A_1A_{n+1}MN)=(A_1A_2MN)\cdots(A_nA_{n+1}MN)=\lambda^n,$$

also auch $(B_1B_{n+1}NM)=\lambda^n$. Nehmen wir an, daß die Bezeichnung der Koinzidenzelemente so sei, daß von den beiden reziproken Werten $(XX'MN)=\lambda$ und $(XX'NM)=\frac{1}{\lambda}$ der erstere echt sei; dann konvergieren mit wachsendem n die beiden Doppelverhältnisse $(A_1A_{n+1}MN)$ und $(B_1B_{n+1}NM)$ gegen Null; das bedeutet, daß A_{n+1} nach N und B_{n+1} nach M konvergiert.

Handelt es sich um zwei ineinander liegende Punktreihen, so seien R, Q' die Fluchtpunkte; die Invariante $(XX'MN)$ wird $\frac{RM}{RN}=\frac{Q'N}{Q'M}$. Weil dies echte Brüche sind, so sehen wir, daß N derjenige Koinzidenzpunkt ist, der weiter von R, und M derjenige, der weiter von Q' entfernt ist. In jedem Falle ist also Konvergenzpunkt der

von dem Fluchtpunkte der Ausgangsreihe weiter entfernte Koinzidenzpunkt[1]).

Ist R gleich weit von M und N entfernt, also in der Mitte von MN gelegen, so ist die Invariante $(RR'_\infty MN) = -1$; also liegt Involution, zyklische Projektivität 2. Grades vor; Q' ist mit R identisch.

Wir lassen die Voraussetzung über die Koinzidenzelemente wiederum fallen.

Das Doppelverhältnis von vier aufeinanderfolgenden Elementen der Reihe ist konstant. Es seien $A_1 A_2 A_3 A_4$, $B_1 B_2 B_3 B_4$ zwei solche Würfe, so daß:

$$A_1 A_2 A_3 B_1 B_2 B_3 \barwedge A_2 A_3 A_4 B_2 B_3 B_4;$$

daher ist:

$$A_1 A_2 B_2 B_3 \barwedge A_2 A_3 B_3 B_4 \barwedge B_4 B_3 A_3 A_2,$$

$$A_2 A_3 B_1 B_2 \barwedge A_3 A_4 B_2 B_3 \barwedge B_3 B_2 A_4 A_3;$$

daraus folgt, daß

$$A_1 B_4,\ A_2 B_3,\ A_3 B_2,\ A_4 B_1$$

zu der nämlichen Involution gehören, demnach:

$$B_1 B_2 B_3 B_4 \barwedge A_4 A_3 A_2 A_1 \barwedge A_1 A_2 A_3 A_4.$$

Ist der Träger ein Kegelschnitt, so ist die gefundene Involution eine der in Nr. 139 besprochenen Involutionen (mit Zentren auf der Projektivitätsaxe), denn diese bestehen auch ohne daß $A_{n+1} \equiv A_1$ statt hat.

Aus der bilinearen Relation ergibt sich für dies konstante Doppelverhältnis ein interessanter Ausdruck; wir haben:

$$\lambda \xi_1 \xi_2 + \mu \xi_1 + \mu' \xi_2 + \nu = 0, \qquad \lambda \xi_2 \xi_3 + \mu \xi_2 + \mu' \xi_3 + \nu = 0,$$

$$\lambda \xi_3 \xi_4 + \mu \xi_3 + \mu' \xi_4 + \nu = 0;$$

also:

$$\xi_1 = -\frac{\mu' \xi_2 + \nu}{\lambda \xi_2 + \mu}, \quad \xi_3 = -\frac{\mu \xi_2 + \nu}{\lambda \xi_2 + \mu'}, \quad \xi_2 = -\frac{\mu' \xi_3 + \nu}{\lambda \xi_3 + \mu}, \quad \xi_4 = -\frac{\mu \xi_3 + \nu}{\lambda \xi_3 + \mu'};$$

wir bilden $\xi_1 - \xi_3$, $\xi_2 - \xi_4$, $\xi_1 - \xi_4$, indem jedesmal zum Zähler die verschwindende Größe

$$(\mu' - \mu)(\lambda \xi_2 \xi_3 + \mu \xi_2 + \mu' \xi_3 + \nu)$$

addiert wird:

$$\xi_1 - \xi_3 = \frac{(\mu - \mu')(\xi_2 - \xi_3)}{\lambda \xi_2 + \mu}, \quad \xi_2 - \xi_4 = -\frac{(\mu - \mu')(\xi_3 - \xi_2)}{\lambda \xi_3 + \mu'},$$

$$\xi_1 - \xi_4 = -\frac{\{(\mu - \mu')^2 + \mu\mu' - \lambda\nu\}(\xi_2 - \xi_3)}{(\lambda \xi_2 + \mu)(\lambda \xi_3 + \mu')};$$

also:

$$A = \frac{\xi_1 - \xi_3}{\xi_2 - \xi_3} : \frac{\xi_1 - \xi_4}{\xi_2 - \xi_4} = \frac{(\mu - \mu')^2}{(\mu - \mu')^2 + (\mu\mu' - \lambda\nu)}.$$

---

1) London, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 11, S. 274.

Wir heben hervor:

$\varDelta = 0$, wenn $\mu = \mu'$, Involution;

$\varDelta = 1$, wenn $\mu\mu' - \lambda\nu = 0$, ausgeartete Projektivität;

$0 < \varDelta < 1$, wenn $\mu\mu' - \lambda\nu > 0$, ungleichlaufende Gebilde;

$\varDelta = \frac{4}{3}$, wenn $(\mu - \mu')^2 + 4(\mu\mu' - \lambda\nu) = 0$, vereinigte Koinzidenzelemente;

$\varDelta = \infty$, wenn $(\mu - \mu')^2 + (\mu\mu' - \lambda\nu) = 0$, ternäre zyklische Projektivität.

Es ergab sich oben, daß

$$A_1B_4,\ A_2B_3,\ A_3B_2,\ A_4B_1$$

zur nämlichen Involution gehören. Wir wollen die Bezeichnung etwas ändern; A_1, B_4, welche beliebige Elemente sind, seien mit A, B und A_2, A_3, A_4, die in dem einen Sinne aus A hervorgehen, mit A_1, A_2, A_3, hingegen B_3, B_2, B_1, die aus B im andern Sinne sich ergeben, mit B_{-1}, B_{-2}, B_{-3} bezeichnet. Danach sind die vier Paare der aus A, B abgeleiteten Involution, die deshalb (AB) heiße:

$$AB,\ A_1B_{-1},\ A_2B_{-2},\ A_3B_{-3};$$

die Involution (A_1B_{-1}) ist dann:

$$A_1B_{-1},\ A_2B_{-2},\ A_3B_{-3},\ A_4B_{-4},$$

mithin dieselbe; und gleichfalls identisch ist die Involution $(A_{-1}B_1)$:

$$A_{-1}B_1,\ AB,\ A_1B_{-1},\ A_2B_{-2}.$$

Folglich enthält die Involution (AB) alle Paare A_kB_{-k} und alle Paare $A_{-k}B_k$.

Nennen wir sie der gegebenen Projektivität Π adjungiert[1]).

Ist CD irgend ein Paar derselben, so folgt aus Π:

$$BA_1DC_1 \barwedge B_{-1}AD_{-1}C \barwedge AB_{-1}CD_{-1};$$

dies bedeutet, daß C_1D_{-1} zur Involution AB, A_1B_{-1}, CD gehört, daß also (CD) mit (AB) identisch ist und diese aus jedem ihrer Paare in derselben Weise abgeleitet werden kann. Folglich ist es erlaubt, eins der Ausgangselemente festzuhalten.

Es gibt ∞^1 der gegebenen Projektivität Π adjungierte Involutionen.

Weil die Involution (AB) schon durch AB, A_1B_{-1} bestimmt ist, so ist sie allen Projektivitäten adjungiert, in denen den Elementen A, B_{-1} die Elemente A_1, B entsprechen.

---

1) R. Böger, Mitteilungen der Math. Ges. in Hamburg, Bd. 4, S. 271.

Wenn A' zu A in bezug auf A_1 und A_{-1}, B' zu B in bezug auf B_1 und B_{-1} harmonisch ist, so hat man:

$$A_{-1}A_1AA' \barwedge B_1B_{-1}BB';$$

daher ist $A'B'$ ein Paar der Involution (AB).

Als Involution mit den beiden Paaren AB, $A'B'$ stützt sie sich (Nr. 85) auf die Involution (AA', BB'), also auf die Involution, durch welche die Koinzidenzelemente von Π dargestellt werden (Nr. 75).

Die einer gegebenen Projektivität adjungierten Involutionen sind demnach diejenigen, welche sich auf die ihre Koinzidenzelemente darstellende Involution stützen.

Die adjungierte Involution (AA) ist: AA, A_1A_{-1}; also ist A' das andere Doppelelement. Nun ist:

$$AA_{-1}A'A'_{-1} \barwedge A_1AA_1'A' \barwedge AA_1A'A_1';$$

d. h. $A'_{-1}A_1'$ gehört auch zu (AA) und A ist das vierte harmonische Element zu A' in bezug auf $A'_{-1}A_1'$; so daß A und A' sich in gleicher Weise auseinander ergeben. Jedes ist harmonisch zum andern in bezug auf die beiden Elemente, welche diesem (in Π) in beiden Sinnen entsprechen.

Weiter fanden wir oben die Projektivität: $A_1A_2A_3A_4 \barwedge B_1B_2B_3B_4$ oder in der veränderten Bezeichnung, indem wir zugleich B durch L ersetzen: $AA_1A_2A_3 \barwedge LL_1L_2L_3$. Sie erweitert sich sofort zu:

$$\ldots A_{-2}A_{-1}AA_1A_2 \ldots \barwedge \ldots L_{-2}L_{-1}LL_1L_2 \ldots$$

Werden also aus einer Projektivität Π ineinander liegender Gebilde aus beliebigen zwei Elementen A, L die Reihen der homologen Elemente in beiden Sinnen hergestellt, so ergibt sich eine neue Projektivität $\mathfrak{P}$, in der die gleichvielten Elemente dieser Reihen entsprechend sind. Sie heiße $[AL]$. Ersichtlich können beliebig zwei homologe Elemente als Ausgangselemente genommen werden; $[A_kL_k] \equiv [A_{-k}L_{-k}] \equiv [AL]$. Daher gibt es ∞^1 solche Projektivitäten $\mathfrak{P}$, weil wiederum das eine Ausgangselement festgehalten werden kann. Aus $A_{-1}A_1AA' \barwedge L_{-1}L_1LL'$ folgt, daß auch A' und L' homolog sind.

Unter den $\mathfrak{P}$ befindet sich Π selbst, als $[AA_1]$, und die Identität, als $[AA]$.

Es sei wieder (AB) eine der Π adjungierte Involution, und in ihr K dem L gepaart, so ist:

$$AA_1A_2K \barwedge BB_{-1}B_{-2}L;$$

wegen der adjungierten Involution (LB) ist:

$$LL_1L_2B \barwedge BB_{-1}B_{-2}L;$$

also:

$$AA_1A_2K \barwedge LL_1L_2B;$$

d. h. in $[AL]$ entspricht dem K das Element B. Weil nun diese Projektivität die homologen Elemente A und L, K und B hat, so ist die Involution (AB, LK), also die (AB) ihr adjungiert.

Alle Involutionen, welche der Π adjungiert sind, sind auch den aus ihr abgeleiteten $\mathfrak{P}$[1]) adjungiert. Auf alle jene Involutionen stützt sich aber diejenige, welche die Koinzidenzelemente von Π darstellt; also stellt sie auch die Koinzidenzelemente einer jeden $\mathfrak{P}$ dar.

Die $\mathfrak{P}$ erweisen sich einfach als diejenigen Projektivitäten, welche mit Π die Koinzidenzelemente gemeinsam haben, und jede von ihnen kann die Π sein.

Wir fanden oben für reelle Koinzidenzelemente M, N, daß jede Reihe, wie $\ldots A_{-2} A_{-1} A A_1 A_2 \ldots$ in den beiden Sinnen nach den Koinzidenzelementen konvergiert; gleichvielte Elemente in zwei solchen Reihen sind homolog in einer $\mathfrak{P}$, also war zu erwarten, daß die gemeinsamen Konvergenzelemente sich selbst homolog sind.

Sind M, N die Koinzidenzelemente von Π, so ist

$$MNAL \barwedge MNA_1L_1 \barwedge NML_1A_1,$$

also sind (Nr. 71) MN, AL_1, LA_1 in Involution; demnach wiederum:

$$MNAA_1 \barwedge NML_1L \barwedge MNLL_1,$$

ebenso:

$$MNA_1A_2 \barwedge MNL_1L_2,$$

also:

$$MNAA_1A_2 \barwedge MNLL_1L_2;$$

M, N sind die Koinzidenzelemente von $[AL]$.

§ 23. Elemente der Invariantentheorie.

148 Es sei wieder ein Elementenpaar durch eine quadratische Gleichung definiert:

$$Q = ax^2 + 2bx + c = 0,$$

deren Wurzeln x', x'' die Parameter seiner Elemente sind. Diese Wurzeln sind reell, gleich oder imaginär, je nachdem die Diskriminante

$$\Delta = ac - b^2 < 0, = 0, > 0\text{[2])}$$

ist; wir wissen

$$x' + x'' = -\frac{2b}{a},\ x'x'' = \frac{c}{a}.$$

1) Böger nennt sie der Π konjugiert.

2) Die Form $ac - b^2$ der Diskriminante ist der bisherigen $b^2 - ac$ vorzuziehen.

Ein zweites Paar in demselben Gebilde sei:

$$Q_1 = a_1 x^2 + 2 b x_1 + c_1 = 0,$$

die Wurzeln x_1', x_1'', die Diskriminante $\varDelta_1$.

Aus der Harmonizitäts-Bedingung für die Parameter:

$$x'x'' - \tfrac{1}{2}(x' + x'')\,(x_1' + x_1'') + x_1'x_1'' = 0$$

folgt diejenige in den Koeffizienten von $Q = 0$ und $Q_1 = 0$:

$$(h) \qquad ac_1 + ca_1 - 2\,bb_1 = 0,$$

deren linke Seite mit $2\,\varDelta_{01}$ bezeichnet werden möge.

Aus

$$x' = \frac{-b + \sqrt{-\varDelta}}{a}, \quad x'' = \frac{-b - \sqrt{-\varDelta}}{a}$$

und den ähnlichen andern Ausdrücken ergibt sich:

$$(x' - x_1')\,(x'' - x_1'') = \frac{(ab_1 - ba_1)^2 - (a_1\sqrt{-\varDelta} - a\sqrt{-\varDelta_1})^2}{a^2 a_1{}^2}$$

$$= \frac{ac_1 + ca_1 - 2\,bb_1 + 2\sqrt{\varDelta\varDelta_1}}{aa_1} = 2\frac{\varDelta_{01} + \sqrt{\varDelta\varDelta_1}}{aa_1}$$

und

$$(x'' - x_1')\,(x' - x_1'') = 2\,\frac{\varDelta_{01} - \sqrt{\varDelta\varDelta_1}}{aa_1};$$

folglich ist das Doppelverhältnis der beiden Paare:

$$V_{01} = \frac{\varDelta_{01} + \sqrt{\varDelta\varDelta_1}}{\varDelta_{01} - \sqrt{\varDelta\varDelta_1}},$$

also -1, wenn $\varDelta_{01} = 0$; sonst reell oder imaginär, je nachden $\varDelta$ und $\varDelta_1$ gleiche oder ungleiche Vorzeichen haben, die beiden Paare gleichartig hinsichtlich der Realität und Imaginarietät sind oder nicht.

V_{01} ist, wenn imaginär, von der Gestalt $\frac{\alpha + \beta i}{\alpha - \beta i}$, d. h. sein Modul ist 1.

Wir führen eine lineare Substitution ein:

$$x = \frac{\alpha X + \beta}{\gamma X + \delta},$$

d. h. wir gehen zu einer neuen parametrischen Bestimmung über, oder auch wir beziehen das Gebilde projektiv auf ein anderes; reelle, imaginäre, zusammenfallende Elemente bleiben im ersten Falle selbstverständlich ebenso, gehen im zweiten Falle in eben solche Elemente über. Das Vorzeichen und das Verschwinden der Diskriminante sind invariant; ebenso sind die Harmonizität und allgemeiner das Doppelverhältnis invariant.

Aus $Q = 0$ entsteht durch die Substitution die neue Gleichung:

$$Q' = a(\alpha X + \beta)^2 + 2b(\alpha X + \beta)\,(\gamma X + \delta) + c(\gamma X + \delta)^2 = 0$$

oder:
$$a'X^2 + 2b'X + c' = 0,$$
worin:
$$\begin{aligned}
a' &= a\alpha^2 + 2b\alpha\gamma + c\gamma^2 = \alpha(a\alpha + b\gamma) + \gamma(b\alpha + c\gamma),\\
b' &= a\alpha\beta + b(\alpha\delta + \beta\gamma) + c\gamma\delta = \beta(a\alpha + b\gamma) + \delta(b\alpha + c\gamma)\\
&= \alpha(a\beta + b\delta) + \gamma(b\beta + c\delta),\\
c' &= a\beta^2 + 2b\beta\delta + c\delta^2 = \beta(a\beta + b\delta) + \delta(b\beta + c\delta).
\end{aligned}$$
Daher ist:
$$\begin{aligned}
\Delta' = a'c' - b'^2 &= \begin{vmatrix} a', b' \\ b', c' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha, \gamma \\ \beta, \delta \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a\alpha + b\gamma, & b\alpha + c\gamma \\ a\beta + b\delta, & b\beta + c\delta \end{vmatrix}\\
&= \begin{vmatrix} \alpha, \gamma \\ \beta, \delta \end{vmatrix}^2 \begin{vmatrix} a, b \\ b, c \end{vmatrix} = (\alpha\delta - \beta\gamma)^2 (ac - b^2) = (\alpha\delta - \beta\gamma)^2 \Delta.
\end{aligned}$$

Wir transformieren ebenso die Gleichung des zweiten Paars, wo dann
$$a_1' = a_1\alpha^2 + 2b_1\alpha\gamma + c_1\gamma^2, \text{ usw.}$$
ist, und finden natürlich auch: $\Delta_1' = (\alpha\delta - \beta\gamma)^2\Delta_1$, ferner ist:
$$2\Delta_{01}' = a'c_1' - 2b'b_1' + c'a_1' = \begin{vmatrix} a', b_1' \\ b', c_1' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1', b' \\ b_1', c' \end{vmatrix};$$
davon ist:
$$\begin{vmatrix} a', b_1' \\ b', c_1' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha, \gamma \\ \beta, \delta \end{vmatrix} \cdot \left\{ \alpha\beta \cdot \begin{vmatrix} a, b \\ a_1, b_1 \end{vmatrix} + \alpha\delta \cdot \begin{vmatrix} a, b \\ b_1, c_1 \end{vmatrix} + \beta\gamma \cdot \begin{vmatrix} b, c \\ a_1, b_1 \end{vmatrix} + \gamma\delta \cdot \begin{vmatrix} b, c \\ b_1, c_1 \end{vmatrix} \right\},$$
$$\begin{vmatrix} a_1', b' \\ b_1', c' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha, \gamma \\ \beta, \delta \end{vmatrix} \cdot \left\{ \alpha\beta \cdot \begin{vmatrix} a_1, b_1 \\ a, b \end{vmatrix} + \alpha\delta \cdot \begin{vmatrix} a_1, b_1 \\ b, c \end{vmatrix} + \beta\gamma \cdot \begin{vmatrix} b_1, c_1 \\ a, b \end{vmatrix} + \gamma\delta \cdot \begin{vmatrix} b_1, c_1 \\ b, c \end{vmatrix} \right\};$$
also ist:
$$\begin{aligned}
2\Delta_{01}' &= (\alpha\delta - \beta\gamma) \left\{ \alpha\delta \left(\begin{vmatrix} a, b \\ b_1, c_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1, b_1 \\ b, c \end{vmatrix} \right) + \beta\gamma \left(\begin{vmatrix} b, c \\ b_1, c_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1, c_1 \\ a, b \end{vmatrix} \right) \right\}\\
&= (\alpha\delta - \beta\gamma)^2 (ac_1 - 2bb_1 + ca_1) = 2(\alpha\delta - \beta\gamma)^2 \Delta_{01};
\end{aligned}$$
und
$$V_{01} = \frac{\Delta_{01}' + \sqrt{\Delta'\Delta_1'}}{\Delta_{01}' - \sqrt{\Delta'\Delta_1'}} = \frac{\Delta_{01} + \sqrt{\Delta\Delta_1}}{\Delta_{01} - \sqrt{\Delta\Delta_1}}.$$

Jede der Größen $\Delta(\Delta_1), \Delta_{01}, V_{01}$ ist also in der neuen Gestalt das Produkt aus derjenigen in der alten Gestalt in eine Potenz der Substitutions-Determinante $\alpha\delta - \beta\gamma$, und zwar einer geraden, im letzten Falle der nullten; so daß in diesem beide Größen gleich sind.

Aus diesen Beziehungen folgt das gleichzeitige Verschwinden, sowie die Konstanz des Vorzeichens. Es werden deshalb unsere rößen Invarianten genannt; und zwar Δ eine Invariante der adratischen Form Q allein, Δ_{01} und V_{01} sind simultane In-

varianten von Q und Q_1; letztere wird, weil sie sich vollständig gleich bleibt, absolute Invariante genannt.

In Nr. 135 haben wir $\Delta_{012} = \begin{vmatrix} a, & b, & c \\ a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \end{vmatrix} = 0$ als Involutionsbedingung für drei Paare $Q = 0$, $Q_1 = 0$, $Q_2 = 0$ gefunden.

Auch diese Größe Δ_{012} muß, weil die Involutionslage ebenfalls von der parametrischen Bestimmung unabhängig, bzw. projektiv ist, Invariante von Q, Q_1, Q_2 sein. In der Tat ist:

$$\Delta'_{012} = \begin{vmatrix} a', & b', & c' \\ a_1', & b_1', & c_1' \\ a_2', & b_2', & c_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a, & b, & c \\ a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha^2, & 2\alpha\gamma, & \gamma^2 \\ \alpha\beta, & \alpha\delta + \beta\gamma, & \gamma\delta \\ \beta^2, & 2\beta\delta, & \delta^2 \end{vmatrix}$$
$$= \Delta_{012} \cdot (\alpha\delta - \beta\gamma)^3.$$

Nach Nr. 22 ist die Gleichung für die Doppelelemente der 149
Involution, welche durch die beiden Paare $Q = 0$, $Q_1 = 0$ bestimmt ist, oder für das gemeinsame harmonische Paar zu diesen beiden Paaren:

$$x^2(x' + x'' - x_1' - x_1'') - 2x(x'x'' - x_1'x_1'') + x'x''(x_1' + x_1'')$$
$$- x_1'x_1''(x' + x'') = 0,$$

oder, wenn wir $x' + x''$, ... wieder durch die Koeffizienten von Q und Q_1 ausdrücken:

$$I_{01} = x^2(ab_1 - a_1b) + x(ac_1 - a_1c) + (bc_1 - b_1c) = 0$$
$$= Ax^2 + 2Bx + C = 0,$$

wo also $2B = ac_1 - a_1c$ ist.

Transformieren wir auf den neuen Parameter X, so gilt es dann wiederum den Invarianten-Zusammenhang dieses neuen Paares mit dem gegebenen, d. h. das gleichzeitige Verschwinden von I_{01} und I'_{01} zu bestätigen. Aber wir wollen nunmehr doch eine Veränderung einführen, die nur scheinbar komplizierend ist, in Wirklichkeit größere Symmetrie herbeiführt und die Brüche entfernt: wir führen, jedoch nur vorübergehend, homogene Variabeln ein. Wir ersetzen x durch $\frac{x}{y}$; das bleibt im Grunde die bestimmende Größe, und die homogenen Variabeln sind proportional veränderbar. $Q = 0$ geht über zunächst in:

$$a\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 2b\frac{x}{y} + c = 0$$

und dann in:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = 0.$$

Die linke Seite, das nunmehrige Q, heißt eine **binäre Form 2. Grades**. Ersetzen wir auch X durch $\frac{X}{Y}$, so wird:

$$\frac{x}{y} = \frac{\alpha \frac{X}{Y} + \beta}{\gamma \frac{X}{Y} + \delta} = \frac{\alpha X + \beta Y}{\gamma X + \delta Y};$$

was, wegen der proportionalen Veränderlichkeit von x, y, zerspalten werden kann in die beiden Substitutionsgleichungen:

$$x = \alpha X + \beta Y, \quad y = \gamma X + \delta Y,$$

in der nur ganze Funktionen auftreten. Es geht also

$$ax^2 + 2bxy + cy^2$$

über in:

$$a(\alpha X + \beta Y)^2 + 2b(\alpha X + \beta Y)(\gamma X + \delta Y) + c(\gamma X + \delta Y)^2$$
$$= a' X^2 + 2b' XY + c' Y^2,$$

wo a', b', c' dieselben Definitionsgleichungen haben wie oben.

Nachdem dasselbe mit Q_1 geschehen, bestätigen wir, daß:

$$(a'b_1' - a_1'b')X^2 + (a'c_1' - a_1'c')XY + (b'c_1' - b_1'c')Y^2$$
$$= [(ab_1 - a_1b)x^2 + (ac_1 - a_1c)xy + (bc_1 - b_1c)] \cdot (\alpha\delta - \beta\gamma)$$

oder kürzer

$$I_{01}' = I_{01} \cdot (\alpha\delta - \beta\gamma),$$

indem wir links die gestrichenen Koeffizienten durch ihre Ausdrücke in den ungestrichenen, rechts aber x, y durch ihre Ausdrücke in X, Y ersetzen, oder auch, was jedoch weniger einfach ist, links X, Y durch ihre Ausdrücke in den x, y:

$$X = \frac{\delta x - \beta y}{\alpha\delta - \beta\gamma}, \quad Y = \frac{-\gamma x + \alpha y}{\alpha\delta - \beta\gamma}.$$

Diese neue Invariante unterscheidet sich von den bisherigen dadurch, daß sie auch von den Veränderlichen abhängt, nicht bloß, wie jene, von den Koeffizienten der gegebenen Form oder Formen. Während für die früheren der Name Invarianten (im engeren Sinne) beibehalten wird, nennt man diese **Kovarianten**. I_{01} ist also eine simultane Kovariante von Q und Q_1.

Das Verschwinden (oder auch das Vorzeichen) einer Invariante im engeren Sinne drückt eine projektive Eigenschaft des oder der durch die gegebene Form oder Formen dargestellten Gebilde, das Verschwinden einer Kovariante liefert ein Gebilde, welches mit diesen Gebilden projektiv oder invariant verbunden ist, wie das gemeinsame harmonische Paar zu zwei Paaren.

Für die Parameter λ derjenigen beiden Paare der durch $Q = 0$ und $Q_1 = 0$ bestimmten Involution, deren Elemente sich in das eine

oder andere Doppelelement vereinigen, fanden wir in Nr. 135 die quadratische Gleichung

$$(ac-b^2)+(ac_1+ca_1-2bb_1)\lambda+(a_1c_1-b_1^2)\lambda^2=0,$$

oder, mit den jetzigen Bezeichnungen:

$$\Delta+2\Delta_{01}\lambda+\Delta_1\lambda^2=0.$$

Ihre Diskriminante ist $\Delta\Delta_1-\Delta_{01}^2$, und je nachdem diese <0, $=0$, >0, sind diese Paare reell, vereinigt, imaginär, die Involution hyperbolisch, parabolisch oder elliptisch. Es ist nicht schwer, den Zusammenhang mit dem Produkte der Differenzen der (unhomogenen) Parameter der vier Elemente von $Q=0$, $Q_1=0$ (Nr. 9, 22) zu zeigen. Wir ersetzen zunächst in:

$$\Delta\Delta_1-\Delta_{01}^2=(ac-b^2)(a_1c_1-b_1^2)-\tfrac{1}{4}(ac_1+ca_1-2bb_1)^2$$

die Koeffizienten b, c durch $-\frac{1}{2}a(x'+x'')$, $ax'x''$ und erhalten:

$$\begin{aligned}&-\tfrac{1}{4}a^2(a_1x'^2+2b_1x'+c_1)(a_1x''^2+2b_1x''+c_1)\\ &=-\tfrac{1}{4}a^2a_1^2(x'-x_1')(x'-x_1'')(x''-x_1')(x''-x_1''),\end{aligned}$$

weil

$$a_1x^2+2b_1x+c_1\equiv a_1(x-x_1')(x-x_1'').$$

Demnach ist $\Delta_0\Delta_1-\Delta_{01}^2<0,\ =0,\ >0$ äquivalent mit

$$(x'-x_1')(x'-x_1'')(x''-x_1')(x''-x_1'')>0,\ =0,\ <0.$$

Im mittleren Falle, wo die Involution parabolisch ist, haben die beiden konstituierenden Paare ein Element gemein, das dann allen Paaren gemeinsam ist; die beiden Gleichungen $Q=0$, $Q_1=0$ haben eine Wurzel gemein, und

$$\tfrac{1}{4}R=\Delta\Delta_1-\Delta_{01}^2=0$$

oder

$$R=4(ac-b^2)(a_1c_1-b_1^2)-(ac_1+ca_1-2bb_1)^2=0$$

oder, wie diese Gleichung umgeformt werden kann:

$$R=4(ab_1-ba_1)(bc_1-cb_1)-(ac_1-ca_1)^2=0$$

ist die Bedingung dafür.

Derjenige aus den Koeffizienten zweier algebraischen Gleichungen gebildete Ausdruck, dessen Verschwinden die Bedingung dafür ist, daß sie eine gemeinsame Wurzel haben, heißt ihre Resultante (Eliminante). Wir haben daher in R die Resultante zweier quadratischen Gleichungen, offenbar eine simultane Invariante der linken Seiten; in der Tat, aus den Invariantengleichungen für Δ, Δ_1, Δ_{01} ergibt sich sofort:

$$\Delta'\Delta_1'-\Delta_{01}'^2=(\Delta\Delta_1-\Delta_{01}^2)(\alpha\delta-\beta\gamma)^4;$$

wir mußten eine gerade Potenz der Substitutionsdeterminante erhalten, weil auch das Vorzeichen invariant ist.

Daß unsere Resultante auch in der Form:

$$4(ab_1-ba_1)(bc_1-cb_1)-(ac_1-ca_1)^2$$

geschrieben werden kann, lehrt die Kovariante:

$$I_{01}=(ab_1-ba_1)x^2+(ac_1-ca_1)x+(bc_1-cb_1);$$

denn wenn die Involution parabolisch ist, so hat sie nur ein Doppelelement, die Gleichung $I_{01}=0$ zwei gleiche Wurzeln.

Nehmen wir in $Q_1=0$ an, daß $c_1=0$ sei, und entfernen die Wurzel 0, welche die Gleichung dann besitzt, so daß nur noch die lineare Gleichung

$$a_1x+b_1=0$$

vorliegt, wo jedoch b_1 statt $2b_1$ geschrieben ist, so ist

$$R=-4\left(a\frac{b_1}{2}-ba_1\right)\frac{cb_1}{2}-c^2a_1^2=-c(ab_1^2+ca_1^2-2ba_1b_1)$$

oder nach Entfernung von $-c$, was $\gtrless 0$ ist:

$$ab_1^2+ca_1^2-2ba_1b_1,$$

die Resultante der quadratischen Gleichung $ax^2+2bx+c=0$ und der linearen $a_1x+b_1=0$.

150 Zu drei Elementen, deren Parameter $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ seien, haben wir gelernt, drei andere mit den Parametern μ_1, μ_2, μ_3 zu konstruieren, welche die drei vierten harmonischen sind, μ_1 dem λ_1 zugeeordnet in bezug auf λ_2, λ_3 usw. Ist nun

$$Q=ax^3+3bx^2+3cx+d=0$$

die kubische Gleichung, von welcher $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ die Wurzeln sind, so haben wir, wenn die kubische Gleichung $J=0$ die Wurzeln μ_1, μ_2, μ_3 hat, eine kubische Kovariante von Q; und weiter, die drei Paare $\lambda_1\mu_1, \lambda_2\mu_2, \lambda_3\mu_3$ befinden sich in Involution; ist $H=0$ die quadratische Gleichung, von welcher die Parameter der Doppelelemente die Wurzeln sind, so ist H eine quadratische Kovariante von Q. Wir wollen diese Kovarianten herstellen. Die Bedingung, daß x zu λ_1 harmonisch ist in bezug auf λ_2, λ_3, ist:

$$2\lambda_1x-(\lambda_1+x)(\lambda_2+\lambda_3)+2\lambda_2\lambda_3=0$$

oder:

$$(2\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3)x-\lambda_1\lambda_2-\lambda_1\lambda_3+2\lambda_2\lambda_3=0$$

und entsprechend in den andern Fällen:

$$\left.\begin{aligned}(2\lambda_2-\lambda_3-\lambda_1)x-\lambda_2\lambda_3-\lambda_2\lambda_1+2\lambda_3\lambda_1=0,\\(2\lambda_3-\lambda_1-\lambda_2)x-\lambda_3\lambda_1-\lambda_3\lambda_2+2\lambda_1\lambda_2=0.\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

Multipliziert man diese drei Gleichungen miteinander, so erhält man die kubische Gleichung $J=0$. Wir schreiben zunächst die Gleichungen so:

$$\left(3\lambda_1+\frac{3b}{a}\right)x+3\lambda_2\lambda_3-\frac{3c}{a}=0$$

oder

$$\left(\lambda_1 + \frac{b}{a}\right) x + \lambda_2 \lambda_3 - \frac{c}{a} = 0,$$

$$\left(\lambda_2 + \frac{b}{a}\right) x + \lambda_3 \lambda_1 - \frac{c}{a} = 0,$$

$$\left(\lambda_3 + \frac{b}{a}\right) x + \lambda_1 \lambda_2 - \frac{c}{a} = 0;$$

also wird der Koeffizient von x^3:

$$\left(\lambda_1 + \frac{b}{a}\right)\left(\lambda_2 + \frac{b}{a}\right)\left(\lambda_3 + \frac{b}{a}\right) = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 + (\lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1 + \lambda_1 \lambda_2) \frac{b}{a}$$

$$+ (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) \frac{b^2}{a^2} + \frac{b^3}{a^3} = - \frac{d}{a} + \frac{3bc}{a^2} - \frac{3b^3}{a^3} + \frac{b^3}{a^3}$$

$$= - \frac{a^2 d - 3abc + 2b^3}{a^3}.$$

Das absolute Glied wird:

$$\left(\lambda_2 \lambda_3 - \frac{c}{a}\right)\left(\lambda_3 \lambda_1 - \frac{c}{a}\right)\left(\lambda_1 \lambda_2 - \frac{c}{a}\right) = (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)^2 - \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) \frac{c}{a}$$

$$+ (\lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1 + \lambda_1 \lambda_2) \frac{c^2}{a^2} - \frac{c^3}{a^3} = - \frac{- a d^2 + 3bcd - 2c^3}{a^3}.$$

Der jetzige Zähler ergibt sich aus dem vorigen durch Vertauschung von a mit d und b mit c und Umkehrung des Vorzeichens. Dasselbe gilt für die beiden Koeffizienten von x^2 und x.

Der von x^2 ist:

$$\left(\lambda_2 + \frac{b}{a}\right)\left(\lambda_3 + \frac{b}{a}\right)\left(\lambda_2 \lambda_3 - \frac{c}{a}\right) + \left(\lambda_3 + \frac{b}{a}\right)\left(\lambda_1 + \frac{b}{a}\right)\left(\lambda_3 \lambda_1 - \frac{c}{a}\right)$$

$$+ \left(\lambda_1 + \frac{b}{a}\right)\left(\lambda_2 + \frac{b}{a}\right)\left(\lambda_1 \lambda_2 - \frac{c}{a}\right) = (\lambda_2 \lambda_3)^2 + (\lambda_3 \lambda_1)^2 + (\lambda_1 \lambda_2)^2$$

$$-(\lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1 + \lambda_1 \lambda_2) \frac{c}{a} + [(\lambda_2 + \lambda_3) \lambda_2 \lambda_3 + (\lambda_3 + \lambda_1) \lambda_3 \lambda_1 + (\lambda_1 + \lambda_2) \lambda_1 \lambda_2] \frac{b}{a}$$

$$- 2 (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) \frac{b}{a} \frac{c}{a} + (\lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1 + \lambda_1 \lambda_2) \frac{b^2}{a^2} - 3 \frac{b^2}{a^2} \frac{c}{a}.$$

Hier treten zwei symmetrische Funktionen auf, die nicht elementar sind, d. h. nicht unmittelbar durch die Koeffizienten der kubischen Gleichung sich ausdrücken lassen, aber doch leicht auf elementare zurückgeführt werden können; denn es ist:

$$(\lambda_2 \lambda_3)^2 + (\lambda_3 \lambda_1)^2 + (\lambda_1 \lambda_2)^2 = (\lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1 + \lambda_1 \lambda_2)^2 - 2 \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)$$

$$= \frac{9c^2}{a^2} - 6 \frac{bd}{a^2},$$

$$(\lambda_2 + \lambda_3) \lambda_2 \lambda_3 + (\lambda_3 + \lambda_1) \lambda_3 \lambda_1 + (\lambda_1 + \lambda_2) \lambda_1 \lambda_2$$

$$= (\lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1 + \lambda_1 \lambda_2)(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) - 3 \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = - \frac{9bc}{a^2} + \frac{3d}{a};$$

also wird unser Koeffizient: $- \frac{3(abd + b^2 c - 2ac^2)}{a^3}$ und der von x

wird: $-\frac{3(2b^2d-acd-bc^2)}{a^3}$; daher ist, nach Wegwerfung von $-\frac{1}{a^3}$:

$$\begin{aligned} J = (a^2d-3abc+2b^3)x^3 + 3(abd+b^2c-2ac^2)x^2 \\ + 3(2b^2d-acd-bc^2)x + (3bcd-ad^2-2c^3). \end{aligned} \tag{2}$$

Wir haben in Nr. 144 gefunden, daß die Doppelelemente der Involution $\lambda_1\mu_1, \lambda_2\mu_2, \lambda_3\mu_3$ mit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ die beiden äquianharmonischen Doppelverhältnisse bilden; für ihre Parameter x gilt also:

$$\frac{\lambda_1-\lambda_3}{\lambda_2-\lambda_3} : \frac{\lambda_1-x}{\lambda_2-x} = \tfrac{1}{2}(1 \pm i\sqrt{3})$$

oder:

$$\lambda_1\lambda_2 + \lambda_3\lambda_1 - 2\lambda_2\lambda_3 + (\lambda_2+\lambda_3-2\lambda_1)x \mp i\sqrt{3}(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_1-x) = 0, \tag{3}$$

also multipliziert:

$$[\lambda_1\lambda_2 + \lambda_3\lambda_1 - 2\lambda_2\lambda_3 + (\lambda_2+\lambda_3-2\lambda_1)x]^2 + 3(\lambda_2-\lambda_3)^2(\lambda_1-x)^2 = 0.$$

Der Koeffizient von x^2 ist:

$$\begin{aligned} &4(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2-\lambda_2\lambda_3-\lambda_3\lambda_1-\lambda_1\lambda_2) \\ &= 4\{(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)^2 - 3(\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1+\lambda_1\lambda_2)\}, \end{aligned}$$

der von x:

$$\begin{aligned} &-4(\lambda_2^2\lambda_3+\lambda_2\lambda_3^2+\lambda_3^2\lambda_1+\lambda_3\lambda_1^2+\lambda_1^2\lambda_2+\lambda_1\lambda_2^2-6\lambda_1\lambda_2\lambda_3) \\ &= -4[(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)(\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1+\lambda_1\lambda_2) - 9\lambda_1\lambda_2\lambda_3], \end{aligned}$$

und das absolute Glied:

$$\begin{aligned} &4(\lambda_2^2\lambda_3^2+\lambda_3^2\lambda_1^2+\lambda_1^2\lambda_2^2-\lambda_1^2\lambda_2\lambda_3-\lambda_1\lambda_2^2\lambda_3-\lambda_1\lambda_2\lambda_3^2) \\ &= 4[(\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1+\lambda_1\lambda_2)^2 - 3(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)\lambda_1\lambda_2\lambda_3]. \end{aligned}$$

Die quadratische Gleichung wird:

$$H = (ac-b^2)x^2 + (ad-bc)x + (bd-c^2) = 0, \tag{4}$$

also ohne Binomialkoeffizienten, oder:

$$\begin{vmatrix} a, & b, & c \\ b, & c, & d \\ 1, & -x, & x^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Die beiden Elemente $H = 0$ werden gewöhnlich die den drei Elementen $Q = 0$ zugeordneten Hesseschen Elemente genannt.

Wir haben uns a. a. O. klar gemacht: wenn $Q = 0$ drei reelle Wurzeln hat, so sind die von $H = 0$ imaginär; wenn von jenen nur eine reell ist, so sind diese reell. Dazu kommt: wenn von den drei Größen λ zwei einander gleich sind, etwa $\lambda_2 = \lambda_3$, so fällt in (3) der Unterschied der Vorzeichen weg, und $H = 0$ hat zwei gleiche Wurzeln; die (1) verwandeln sich, nach Wegwerfung von $\lambda_1 - \lambda_3 \gtrless 0$, alle drei in $x - \lambda_2 = 0$; alle drei μ werden λ_2, wie ja auch aus bekannten Eigenschaften harmonischer Elemente folgt; und die Invo-

lution $\lambda_1\mu_1$, $\lambda_2\mu_2$, $\lambda_3\mu_3$ wird parabolisch. Es wird also J ein Kubus und H ein Quadrat.[1])

Die Diskriminante von H sei

$$D_1 = 4(ac-b^2)(bd-c^2) - (ad-bc)^2;$$

sie ist >0, $=0$, <0, wenn die Wurzeln von $H=0$ imaginär, gleich, reell sind; dann hat, wie wir wissen, $Q=0$ drei reelle Wurzeln, zwei gleiche oder nur eine reelle. Wir haben daher D_1 oder $-D_1$ als Diskriminante D von Q; wir nehmen $-D_1$ und haben:

$$D = a^2d^2 + 4ac^3 + 4b^3d - 6abcd - 3b^2c^2;$$

also je nachdem $D<0$, $=0$, >0 ist, hat $Q=0$ drei reelle Wurzeln, zwei gleiche oder nur eine reelle Wurzel.[2]) D ist natürlich Invariante für Q.

Macht man binär und transformiert linear, so geht:

$$Q = ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3$$

über in:

$$Q' = a'X^3 + 3b'X^2Y + 3c'XY^2 + d'Y^3,$$

worin:

$$\begin{aligned}
a' &= a\alpha^3 + 3b\alpha^2\gamma + 3c\alpha\gamma^2 + d\gamma^3,\\
b' &= a\alpha^2\beta + 2b\alpha\beta\gamma + b\alpha^2\delta + 2c\alpha\gamma\delta + c\beta\gamma^2 + d\gamma^2\delta,\\
c' &= a\alpha\beta^2 + 2b\alpha\beta\delta + b\beta^2\gamma + 2c\beta\gamma\delta + c\alpha\delta^2 + d\gamma\delta^2,\\
d' &= a\beta^3 + 3b\beta^2\delta + 3c\beta\delta^2 + d\delta^3.
\end{aligned}$$

Wird nun D' aus a', b', c', d' ebenso gebildet wie D aus a, b, c, d, ferner H', J' aus a', b', c', d', X, Y ebenso wie H, J aus a, b, c, d, x, y, so prägt sich die Invarianten-Eigenschaft in folgenden Relationen aus:

$$D' = D\cdot(\alpha\delta-\beta\gamma)^6,\quad H' = H\cdot(\alpha\delta-\beta\gamma)^2,\quad J' = J\cdot(\alpha\delta-\beta\gamma)^3,$$

wie man in ähnlicher Weise als oben durch Einsetzen bestätigen kann.

Die Methoden der Invariantentheorie, durch welche dies einfacher erkannt wird, zu erörtern, würde hier zu weit führen.

Für die biquadratische Gleichung: 151

$$Q = ax^4 + 4bx^3 + 6cx^2 + 4dx + e = 0,$$

welche die vier Elemente L_1, L_2, L_3, L_4 liefert, entwickeln wir zuerst zwei Invarianten, indem wir die Bedingungen dafür aufsuchen, daß die vier Elemente einen äquianharmonischen bzw. einen harmonischen Wurf bilden.

---

1) Ist $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, so werden sie identisch null.

2) Für die kubische Gleichung $x^3 + px + q = 0$ ist

$$D = q^2 + 4\frac{p^3}{27} = 4\left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right).$$

Hat etwa $(L_1 L_2 L_3 L_4) = \varrho$ den Wert $\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})$ oder $\frac{1}{2}(1-i\sqrt{3})$, so haben, wie wir wissen, $(L_1 L_3 L_4 L_2) = \frac{1}{1-\varrho}$ und $(L_1 L_4 L_2 L_3) = \frac{\varrho - 1}{\varrho}$ denselben Wert und die reziproken den andern. Es genügt also eine der Bedingungen zu erfüllen:

$$(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_4) - \tfrac{1}{2}(1 \pm i\sqrt{3})(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_4) = 0.$$

Das Produkt ist:

$$(\lambda_1 - \lambda_3)^2(\lambda_2 - \lambda_4)^2 + (\lambda_2 - \lambda_3)^2(\lambda_1 - \lambda_4)^2$$
$$- (\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_4)(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_4) = 0.$$

Bezeichnen wir symmetrische Funktionen durch ein typisches Glied mit dem Summenzeichen davor, welches anzeigt, daß die Summierung über alle ähnlichen Glieder ausgedehnt werden soll, so läßt sich die Gleichung schreiben:

$$\Sigma\lambda_1^2\lambda_2^2 - \Sigma\lambda_1^2\lambda_2\lambda_3 + 6\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4 = 0.$$

Nun ist aber:

$$\Sigma\lambda_1^2\lambda_2^2 = (\Sigma\lambda_1\lambda_2)^2 - 2\Sigma\lambda_1^2\lambda_2\lambda_3 - 6\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4;$$

mithin haben wir zunächst:

$$(\Sigma\lambda_1\lambda_2)^2 - 3\Sigma\lambda_1^2\lambda_2\lambda_3 = 0;$$

ferner ist:

$$\Sigma\lambda_1^2\lambda_2\lambda_3 = \Sigma\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \cdot \Sigma\lambda_1 - 4\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4;$$

daher:

$$(\Sigma\lambda_1\lambda_2)^2 - 3\Sigma\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \cdot \Sigma\lambda_1 + 12\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4 = 0$$

oder:

$$\left(\frac{6c}{a}\right)^2 - 3 \cdot \frac{4d}{a} \cdot \frac{4b}{a} + 12\frac{e}{a} = 0;$$

also:

$$S = ae - 4bd + 3c^2 = 0.$$

Wird diese Bedingung von den Koeffizienten von Q erfüllt, so bilden die vier Elemente, wie sie auch angeordnet seien, einen äquianharmonischen Wurf.

Im zweiten Falle muß einer — und nur einer — der drei Würfe $L_1 L_2 L_3 L_4$, $L_1 L_3 L_2 L_4$, $L_1 L_4 L_2 L_3$ harmonisch sein, weil darin alle Fälle des Zugeordnetseins vertreten sind.

Die Harmonizitäts-Bedingung:

$$2(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_3\lambda_4) - (\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_3 + \lambda_4) = 0$$

kann man:

$$3(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_3\lambda_4) - \Sigma\lambda_1\lambda_2 = 0$$

oder:

$$a(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_3\lambda_4) - 2c = 0$$

schreiben; also haben wir:

$$\{a(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_3\lambda_4) - 2c\}\{a(\lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_4) - 2c\}\{a(\lambda_1\lambda_4 + \lambda_2\lambda_3) - 2c\} = 0$$

Der Faktor von a^3 ist:

$$\Sigma\lambda_1^2\lambda_2^2\lambda_3^2 + \lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4\Sigma\lambda_1^2 = (\Sigma\lambda_1\lambda_2\lambda_3)^2 - 2\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4\Sigma\lambda_1\lambda_2$$
$$+ \lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4\{(\Sigma\lambda_1)^2 - 2\Sigma\lambda_1\lambda_2\}$$
$$= (\Sigma\lambda_1\lambda_2\lambda_3)^2 + \lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4\{(\Sigma\lambda_1)^2 - 4\Sigma\lambda_1\lambda_2\}$$
$$= \frac{16\,d^2}{a^2} + \frac{16\,b^2e}{a^3} - \frac{24\,ce}{a^2};$$

derjenige von $-2a^2c$ ist:

$$\Sigma\lambda_1\lambda_2\lambda_3\cdot\Sigma\lambda_1 - 4\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4 = 16\frac{bd}{a^2} - 4\frac{e}{a};$$

$4ac^2$ hat den Faktor $\Sigma\lambda_1\lambda_2 = \frac{6c}{a}$, dazu kommt $-8c^3$.

Also wird die Bedingungsgleichung für Harmonizität:

$$T = ace + 2bcd - ad^2 - b^2e - c^3 = \begin{vmatrix} a, & b, & c \\ b, & c, & d \\ c, & d, & e \end{vmatrix} = 0.$$

Gehören wieder S', T' zu der linear transformierten Form, so ist:

$$S' = S\cdot(\alpha\delta - \beta\gamma)^4, \quad T' = T\cdot(\alpha\delta - \beta\gamma)^6.$$

Daraus folgt:

$$\frac{S'^3}{T'^2} = \frac{S^3}{T^2},$$

so daß $\frac{S^3}{T^2}$ eine absolute Invariante ist.

Absolute Invarianten bei vier Elementen sind die sechs Doppelverhältnisse; ist σ eins von ihnen, so läßt sich $\frac{S^3}{T^2}$ als Funktion von σ darstellen und zwar als eine solche, die sich nicht ändert, wenn σ durch die fünf andern $\frac{1}{\sigma}$, $1-\sigma$, $\frac{1}{1-\sigma}$, $\frac{\sigma-1}{\sigma}$, $\frac{\sigma}{\sigma-1}$ (Nr. 5) ersetzt wird.

Wir können zu S und T auch in folgender Weise gelangen: $\frac{1}{2}(1 \pm i\sqrt{3})$ sind die Wurzeln von $\sigma^2 - \sigma + 1 = 0$; setzt man also in diese Gleichung:

$$\sigma = \frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_3}\cdot\frac{\lambda_2 - \lambda_4}{\lambda_1 - \lambda_4}$$

ein, so muß sich $S = 0$ ergeben. Wird mit dem Nenner $(\lambda_2 - \lambda_3)^2(\lambda_1 - \lambda_4)^2$ multipliziert und noch ein Faktor μ eingeführt, der nachträglich zur Vereinfachung entfernt werden kann, ein, so muß also sein:

$$\mu S = (\sigma^2 - \sigma + 1)(\lambda_2 - \lambda_3)^2(\lambda_1 - \lambda_4)^2.$$

Bei vier harmonischen Elementen hat das Doppelverhältnis σ einen der drei Werte -1, 2, $\frac{1}{2}$, genügt also der kubischen Gleichung $(\sigma + 1)(\sigma - 2)(2\sigma - 1) = 0$. Wir erhalten ebenso:

$$\nu T = (\sigma + 1)(\sigma - 2)(2\sigma - 1)(\lambda_2 - \lambda_3)^3(\lambda_1 - \lambda_4)^3;$$

also:

$$\frac{S^3}{T^2} = \frac{\nu^3}{\mu^2} \frac{(\sigma^2 - \sigma + 1)^3}{(\sigma + 1)^2 (\sigma - 2)^2 (2\sigma - 1)^2}.$$

Nimmt man den Spezialfall $d = e = 0$ an, so wird $S = 3c^2$, $T = -c^3$; die Gleichung $Q = 0$ hat zwei Wurzeln 0, also zwei Elemente sind vereinigt, und eins der Doppelverhältnisse, das wir als σ nehmen, ist 0; daher:

$$\frac{27c^6}{c^6} = \frac{\nu^3}{\mu^2} \cdot \frac{1}{4}, \quad \frac{\nu^3}{\mu^2} = 108.$$

Wir haben, wenn wir $\frac{S^3}{T^2} = 27\,\theta$ setzen, die Gleichung 6. Grades:

$$\frac{4(\sigma^2 - \sigma + 1)^3}{(\sigma + 1)^2 (\sigma - 2)^2 (2\sigma - 1)^2} - \theta = 0,$$

welche die sechs zur absoluten Invariante $\frac{S^3}{T^2}$ gehörigen Doppelverhältnisse liefert.

Sie ist eine reziproke Abelsche Gleichung und kann in die Form:

$$\left(\sigma^3 + \frac{1}{\sigma^3}\right) - 3\left(\sigma^2 + \frac{1}{\sigma^2}\right) + \frac{3(8+\theta)}{4(1-\theta)}\left(\sigma + \frac{1}{\sigma}\right) - \frac{28 + 26\,\theta}{4(1-\theta)} = 0$$

gebracht werden (vgl. Nr. 6, wo $a = \frac{8+\theta}{4(\theta - 1)}$).

152 Wenn zwei der Elemente sich vereinigen, so werden je zwei von den sechs Doppelverhältnissen 1, 0, ∞; jeder dieser Werte führt zu $\theta = 1$, und danach ist $\frac{S^3}{T^2} = 27$, also:

$$D = S^3 - 27\,T^2 = 0;$$

womit die Diskriminante der Gleichung 4. Grades gewonnen ist. Für sie ist:

$$D' = D \cdot (\alpha\delta - \beta\gamma)^{12}.$$

Je nachdem $D > 0$ oder < 0, sind die vier Wurzeln gleichartig (alle reell oder alle imaginär) oder ungleichartig.

In der Tat, wenn alle vier Elemente reell oder alle vier imaginär sind, so ist σ reell; es ist dann $\theta > 1$, denn:

$$4(\sigma^2 - \sigma + 1)^3 - (\sigma + 1)^2 (\sigma - 2)^2 (2\sigma - 1)^2 = 27(\sigma - 1)^2 \sigma^2 > 0;$$

also ist: $\frac{S^3}{T^2} > 27$ oder $D > 0$.

Sind aber zwei Wurzeln reell, die andern konjugiert imaginär, so ist ein Doppelverhältnis, in dem jene und diese zugeordnet sind, von der Gestalt $\frac{a + bi}{a - bi}$; für θ erhalten wir:

$$\theta = \frac{(a^2 - 3b^2)^3}{a^2(a^4 + 18a^2b^2 + 81b^4)} < 1;$$

denn $a^2(a^4 + 18a^2b^2 + 81b^4) - (a^2 - 3b^2)^3 = 27b^2(a^4 + 2a^2b^2 + 3b^4) > 0.$

Wenn eine Involution 4. Grades vorliegt:

$$ax^4 + 4bx^3 + 6cx^2 + 4dx + e$$
$$+ \lambda(a_1x^4 + 4b_1x^3 + 6c_1x^2 + 4d_1x + e_1) = 0,$$

so führt die Einsetzung von $a + \lambda a_1, \ldots$ an Stelle von $a, \ldots$ in $S = 0$, $T = 0$, $S^3 - 27\,\theta T^2 = 0$ zu Gleichungen 2., 3., 6. Grades in λ, aus denen folgt, daß eine Involution 4. Grades zwei äquianharmonische, drei harmonische Gruppen und sechs von beliebigem gegebenen Doppelverhältnisse enthält.

Wir bilden aus den vier Wurzeln $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ folgende drei Größen

$$\lambda_1\lambda_2 + \lambda_3\lambda_4, \quad \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_4, \quad \lambda_1\lambda_4 + \lambda_2\lambda_3,$$

welche durch Vertauschung der λ ineinander übergehen; sie sind alle drei reell, wenn die λ reell, aber auch, wenn sie zweimal je zwei konjugiert imaginär sind: λ_1, λ_2 und λ_3, λ_4; denn dann sind $\lambda_1\lambda_2$, $\lambda_3\lambda_4$ reell und sowohl $\lambda_1\lambda_3$ und $\lambda_2\lambda_4$, als auch $\lambda_1\lambda_4$, $\lambda_2\lambda_3$ konjugiert imaginär. Sind aber λ_1, λ_2 reell und λ_3, λ_4 konjugiert imaginär, so ist nur $\lambda_1\lambda_2 + \lambda_3\lambda_4$ reell, die beiden andern sind konjugiert imaginär.

Wir konstruieren die kubische Gleichung mit den Wurzeln

$$\tfrac{1}{4}[2c - a(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_3\lambda_4)], \ \tfrac{1}{4}[2c - a(\lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_4)], \ \tfrac{1}{4}[2c - a(\lambda_1\lambda_4 + \lambda_2\lambda_3)],$$

die sich hinsichtlich ihrer Realität ebenso verhalten; die Summe der Wurzeln ist null; das Produkt aller drei ist $-\frac{1}{4}T$, die Summe der Produkte zu je zweien ist $-\frac{1}{4}S$. Also ist die gesuchte kubische Gleichung — eine sogenannte **Resolvente** der biquadratischen:

$$4x^3 - Sx + T = 0.$$

Ihre Diskriminante ist $16\,T^2 - \frac{16\,S^3}{27} = -\frac{16}{27}(S^3 - 27\,T^2)$; je nachdem die biquadratische Gleichung vier gleichartige Wurzeln hat oder zwei reelle und zwei imaginäre, hat die Resolvente drei reelle Wurzeln oder nur eine, ist ihre Diskriminante < 0 oder > 0, also $S^3 - 27\,T^2 > 0$ oder < 0.

Die vier Elemente L_1, L_2, L_3, L_4 von 153

$$Q = ax^4 + 4bx^3 + 6cx^2 + 4dx + e = 0,$$

jetzt nicht notwendig alle reell, **können wir auf drei Weisen in zwei Paare zerlegen und erhalten drei Involutionen:**

$$L_2L_3, L_1L_4; \quad L_3L_1, L_2L_4; \quad L_1L_2, L_3L_4.$$

Je zwei von ihnen stützen sich (Nr. 85); denn z. B. durch die zweite geht das Paar L_2L_3 der ersten in das Paar L_4L_1 über, das ebenfalls der ersten angehört.

Es seien

$$M_1, N_1; \quad M_2, N_2; \quad M_3, N_3$$

die Doppelelemente; aus:

$$(M_1 N_1 L_2 L_3) = (N_1 M_1 L_1 L_4) = (N_1 M_1 L_4 L_1) = -1$$

folgt, daß $M_1 N_1$, $L_1 L_2$, $L_3 L_4$ in Involution sind und ebenso $M_1 N_1$, $L_2 L_4$, $L_3 L_1$, daß also die Doppelelemente einer der Involutionen in jeder der beiden andern ein Paar bilden.

Sind die vier Elemente reell, so haben wir den uns schon bekannten Fall: zwei Involutionen sind hyperbolisch, etwa die beiden ersten, die dritte elliptisch; das zu den elliptisch gelegenen $M_1 N_1$, $M_2 N_2$ gemeinsame harmonische Paar $M_3 N_3$ kann nicht aus reellen Elementen bestehen. Es seien alle vier Elemente imaginär, und zwar L_1 und L_3, L_2 und L_4 konjugiert; so sind diese Paare $L_1 L_2$, $L_3 L_4$ durch reelle Gleichungen definiert, reell-imaginäre Paare und die Involution ist reell, und zwar hyperbolisch eben wegen dieser reell-imaginären Paare. Die Gleichungen von $L_3 L_1$ und $L_2 L_4$ sind konjugiert imaginär zueinander: $R + Si = 0$, $R - Si = 0$; sie befinden sich in der durch die reellen (oder reell-imaginären) Paare $R = 0$, $S = 0$ bestimmten reellen Involution, und dasselbe gilt für die dritte Involution $L_1 L_2$, $L_3 L_4$. Beide können, weil einander stützend, nicht elliptisch sein. Wenn wir die Art mit Hilfe von $\Delta\Delta_1 - \Delta_{01}^2$ feststellen wollen, so müssen wir, weil nur bei reellen Konstituenten zu einem reellen λ ein reelles Paar gehört, reelle Konstituenten zugrunde legen. Sind die Wurzeln $\alpha \pm \beta i$, $\gamma \pm \delta i$, so sind solche für die eine dieser Involutionen:

$$R = x^2 - (\alpha + \gamma)\, x + \alpha\gamma - \beta\delta = 0,$$
$$S = 0 \cdot x^2 + (\beta + \delta)\, x - (\alpha\delta + \beta\gamma) = 0;$$

es ist:

$$\Delta = -\tfrac{1}{4}\{4\beta\delta + (\alpha - \gamma)^2\}, \quad \Delta_1 = -\tfrac{1}{4}(\beta + \delta)^2,$$
$$\Delta_{01} = \tfrac{1}{4}(\alpha - \gamma)(\beta - \delta);$$

also

$$\Delta\Delta_1 - \Delta_{01}^2 = \tfrac{1}{4}\beta\delta\{(\alpha - \gamma)^2 + (\beta + \delta)^2\}.$$

Für die andere haben wir δ mit $-\delta$ zu vertauschen (oder β mit $-\beta$); dadurch wechselt diese Größe ihr Vorzeichen; die beiden Involutionen sind also verschiedenartig.

Wenn alle vier Elemente L imaginär sind, so führen sie auch zu zwei hyperbolischen und einer elliptischen Involution.

In dem Falle hingegen, wo L_1, L_3 reell und L_2, L_4 konjugiert imaginär sind, ist nur die Involution $L_1 L_2$, $L_3 L_4$ reell; die beiden andern sind imaginär (denn in einer reellen muß einem reellen Elemente ein ebensolches gepaart sein) und zwar konjugiert zueinander.

Die drei Paare der Doppelelemente $M_1 N_1, \ldots$ führen zu einer 154
zur biquadratischen Form

$$Q = ax^4 + 4bx^3y + 6cx^2y^2 + 4dxy^3 + ey^4$$

gehörigen Kovariante 6. Grades. Denn die quadratische Gleichung für M_1, N_1 ist (Nr. 23):

$$x^2(\lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_1 - \lambda_4) - 2x(\lambda_2\lambda_3 - \lambda_1\lambda_4) + (\lambda_2 + \lambda_3)\lambda_1\lambda_4 - (\lambda_1 + \lambda_4)\lambda_2\lambda_3 = 0;$$

wird diese mit den beiden analogen Gleichungen für M_2N_2, M_3N_3 multipliziert und werden in ähnlicher Weise wie früher die symmetrischen Funktionen der λ durch die Koeffizienten der Form Q ersetzt, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} I = {} & (a^2d - 3abc + 2b^3)x^6 + (a^2e + 2abd - 9ac^2 + 6b^2c)x^5y \\ & + 5(abe - 3acd + 2b^2d)x^4y^2 + 10(b^2e - ad^2)x^3y^3 \\ & + 5(-ade + 3bce - 2bd^2)x^2y^4 + (-ae^2 - 2bde + 9c^2e - 6cd^2)xy^5 \\ & + (-be^2 + 3cde - 2d^3)y^6 = 0; \end{aligned}$$

die Invariantengleichung ist:

$$I' = I \,.\, (\alpha\delta - \beta\gamma)^3 \text{ [1]}.$$

Diese Kovariante gehört nicht bloß zu dem Quadrupel $Q = 0$, sondern zu einer ganzen Involution 4. Grades von Quadrupeln (Nr. 136).

In der bilinearen Relation der Projektivität 155

$$\lambda\xi\xi' + \mu\xi + \mu'\xi' + \nu = 0$$

haben wir auch zwei Invarianten; wird die lineare Substitution:

$$\xi = \frac{\alpha\eta + \beta}{\gamma\eta + \delta}, \quad \xi' = \frac{\alpha\eta' + \beta}{\gamma\eta' + \delta}$$

vorgenommen, so geht die Relation über in:

$$\lambda_1\eta\eta' + \mu_1\eta + \mu_1'\eta' + \nu_1 = 0,$$

worin:

$$\begin{aligned} & \lambda_1 = \lambda\alpha^2 + (\mu + \mu')\alpha\gamma + \nu\gamma^2, \quad \nu_1 = \lambda\beta^2 + (\mu + \mu')\beta\delta + \nu\delta^2, \\ & \mu_1 = \lambda\alpha\beta + \mu\alpha\delta + \mu'\beta\gamma + \nu\gamma\delta, \quad \mu_1' = \lambda\alpha\beta + \mu\beta\gamma + \mu'\alpha\delta + \nu\gamma\delta. \end{aligned}$$

Die beiden Invarianten sind:

$$\mu - \mu' \quad \text{und} \quad \mu\mu' - \lambda\nu,$$

die uns schon häufig entgegengetreten sind; es ist:

$$\mu_1 - \mu_1' = (\mu - \mu')(\alpha\delta - \beta\gamma), \quad \mu_1\mu_1' - \lambda_1\nu_1 = (\mu\mu' - \lambda\nu)(\alpha\delta - \beta\gamma)^2.$$

Es ist $\mu - \mu' = 0$, bei ineinander liegenden projektiven Gebilden, das

---

1) Handelt es sich um die Kovariante einer einzigen Form n^{ten} Grades und ist m der Grad der Kovariante in den Variabeln, r derjenige in den Koeffizienten der Grundform, so ist der Exponent der Potenz von $\alpha\delta - \beta\gamma$, wie die Vergleichung der beiden Seiten der Invariantengleichung in bezug auf den Grad von α, β, γ, δ zeigt, gleich $\frac{1}{2}(rn - m)$; bei einer Invariante $\frac{1}{2}rn$.

Kennzeichen, daß sie involutorisch sind, und $\mu\mu' - \lambda\nu = 0$ drückt aus, daß die Projektivität ausgeartet ist; beides sind projektive Eigenschaften. Und die Kennzeichen für die zyklische Projektivität 3. und 4. Grades (Nr. 146) bestehen in Beziehungen zwischen diesen Größen, und wird dies auch für die höheren Grade gelten.

Von $\mu\mu' - \lambda\nu$, in dessen Invariantenformel die zweite Potenz der Substitutionsdeterminante auftritt, ist auch das Vorzeichen invariant. Wir fanden (Nr. 67, 68), wenn die Variabeln Abszissen sind, daß wir aus dem positiven, negativen Vorzeichen auf Ungleichsinnigkeit, bzw. Gleichsinnigkeit der ineinander liegenden projektiven Punktreihen schließen können; wir folgern nun, daß das auch für allgemeine Parameter, die ja linear aus Abszissen ableitbar sind, und andere Gebilde gilt.

Diese Invariante ist aber, wie ja aus ihrer Bedeutung auch für nicht ineinander liegende Gebilde hervorgeht, im weiteren Sinne invariant; wir können auf ξ und ξ' verschiedene lineare Substitutionen:

$$\xi = \frac{\alpha\eta + \beta}{\gamma\eta + \delta}, \quad \xi' = \frac{\alpha'\eta' + \beta'}{\gamma'\eta' + \delta'}$$

anwenden, die bilineare Relation wird dann:

$$\lambda_1 \eta\eta' + \mu_1 \eta + \mu_1' \eta' + \nu_1 = 0,$$

wo

$$\lambda_1 = \lambda\alpha\alpha' + \mu\alpha\gamma' + \mu'\gamma\alpha' + \nu\gamma\gamma',$$
$$\mu_1 = \lambda\alpha\beta' + \mu\alpha\delta' + \mu'\gamma\beta' + \nu\gamma\delta',$$
$$\mu_1' = \lambda\beta\alpha' + \mu\beta\gamma' + \mu'\delta\alpha' + \nu\delta\gamma',$$
$$\nu_1 = \lambda\beta\beta' + \mu\beta\delta' + \mu'\delta\beta' + \nu\delta\delta';$$

es ist:

$$\mu_1\mu_1' - \lambda_1\nu_1 = (\mu\mu' - \lambda\nu)(\alpha\delta - \beta\gamma)(\alpha'\delta' - \beta'\gamma').$$

Zweiter Teil.

Einführung mehrdeutiger Verwandtschaften.

§ 24. Mehrdeutige Verwandtschaften oder Korrespondenzen. Korrespondenzprinzip. Vielfachheit der Koinzidenzen.

Einstufige Gebilde haben wir bis jetzt schon acht erhalten, die 156
drei ursprünglichen Grundgebilde und die fünf auf Trägern zweiten Grades. Ihr Bereich wird sich bald noch mehr erweitern. Aber begnügen wir uns zunächst mit jenen acht; u, u_1 seien irgend zwei gleichartige oder ungleichartige von ihnen; es sollen zwischen ihnen nun mehrdeutige Korrespondenzen hergestellt werden. In jedes wird eine parametrische Bestimmung gelegt (Nr. 102) und dann eine algebraische Verwandtschaftsgleichung zwischen den Parametern x, x_1 entsprechender Elemente X, X_1 festgelegt, welche in bezug auf x vom n^{ten}, in bezug auf x_1 vom n_1^{ten} Grade ist. Diese lautet in ihrer allgemeinen Form, etwa nach x geordnet:

$$\begin{aligned}
&(a_{n,n_1}x_1^{n_1} + a_{n,n_1-1}x_1^{n_1-1} + \cdots + a_{n,0})x^n \\
&+ (a_{n-1,n_1}x_1^{n_1} + a_{n-1,n_1-1}x_1^{n_1-1} + \cdots + a_{n-1,0})x^{n-1} \\
&+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&+ (a_{0,n_1}x_1^{n_1} + a_{0,n_1-1}x_1^{n_1-1} + \cdots + a_{0,0}) = 0,
\end{aligned}$$

worin $a_{i,k}$ von $a_{k,i}$ verschieden ist. Z. B. wenn $n = 3$, $n_1 = 2$:

$$\begin{aligned}
&(a_{32}x_1^2 + a_{31}x_1 + a_{30})x^3 + (a_{22}x_1^2 + a_{21}x_1 + a_{20})x^2 \\
&+ (a_{12}x_1^2 + a_{11}x_1 + a_{10})x + (a_{02}x_1^2 + a_{01}x_1 + a_{00}) = 0,
\end{aligned}$$

oder nach x_1 angeordnet:

$$\begin{aligned}
(a_{32}x^3 + a_{22}x^2 + a_{12}x + a_{02})x_1^2 + (a_{31}x^3 + a_{21}x^2 + a_{11}x + a_{01})x_1 \\
+ (a_{30}x^3 + a_{20}x^2 + a_{10}x + a_{00}) = 0.
\end{aligned}$$

Es werden durch diese Korrespondenzgleichung jedem Element X des ersten Gebildes n_1 Elemente X_1 des zweiten und jedem aus diesem n Elemente aus jenem zugeordnet; wir nennen die Verwandtschaft eine $[n, n_1]$-deutige oder kürzer eine Verwandtschaft oder Korrespondenz $[n, n_1]$.

Das Gebilde u, in welchem n Elemente einem Elemente des andern entsprechen, können wir auch das n-deutige Gebilde nennen und u_1 das n_1-deutige. An der Reihenfolge soll festgehalten werden: ist das zuerst genannte Gebilde das n-deutige, so wird $[n, n_1]$, nicht umgekehrt gesagt werden.

Weil die Beziehung in den Parametern entsprechender Elemente ausgedrückt ist, so ist die Verwandtschaft projektiv; d. h. wenn u und u_1 sich in einer Korrespondenz $[n, n_1]$ befinden, so kommen auch zwei Gebilde u' und u_1', die zu ihnen bzw. projektiv sind, in eine solche Verwandtschaft. Deshalb benutzt Thomä[1]) das Projektivitätszeichen $\overline{\wedge}$ für die Verwandtschaft [2, 2] zwischen u und u_1 in folgender Weise:

$$u \overset{2,2}{\overline{\wedge}} u_1.$$

Diese projektive Überführung von u in u', u_1 in u_1' geschieht durch zwei lineare Substitutionen zwischen x und y, x_1 und y_1; durch dieselben geht die Gleichung in x und x_1 in eine Gleichung in y und y_1 über, die wegen der Linearität in y vom n^{ten}, in y_1 vom n_1^{ten} Grade ist. Im engeren Sinne sind solche lineare Substitutionen nur Änderungen der parametrischen Bestimmung, welche an den Gebilden und ihrer Korrespondenz nichts ändern.

Die Anzahl der Glieder der Verwandtschaftsgleichung ist

$$(n+1)(n_1+1),$$

daher die Anzahl der wesentlichen Konstanten

$$(n+1)(n_1+1)-1 = nn_1+n+n_1.$$

Zwischen zwei gegebenen Gebilden sind demnach $\infty^{nn_1+n+n_1}$ Korrespondenzen $[n, n_1]$ möglich; z. B. ∞^5 Korrespondenzen [1, 2], ∞^8 Korrespondenzen [2, 2].

Ferner, nn_1+n+n_1 Paare entsprechender Elemente geben ebenso viele Gleichungen für diese Konstanten, welche, da sie linear in ihnen sind, die Konstanten und die Verwandtschaft eindeutig bestimmen.

Eine Korrespondenz $[n, n_1]$ zwischen gegebenen Gebilden ist eindeutig durch nn_1+n+n_1 Paare entsprechender Elemente bestimmt.

Wird ein Paar entsprechender Elemente weniger gegeben, so bleibt eine der Konstanten, die dann λ heiße, unbestimmt und die

---

1) J. Thomä, Untersuchungen über zweizweideutige Verwandtschaften, Abh. der Ges. der Wiss. zu Leipzig (math. phys. Klasse), Bd, 21, S. 437. — Auch Cremona hat neben der Ausdrucksweise, daß die beiden Gebilde die Korrespondenz $[n, n_1]$ haben, gelegentlich von zwei projektiven Gebilden $[n, n_1]$ gesprochen; z. B. in seiner Abhandlung über die Regelflächen 4. Grades: Memorie dell'Istituto di Bologna, Ser. II, Bd. 8.

übrigen sind lineare Funktionen derselben; die Verwandtschaftsgleichung bekommt die Form

$$f(x, x_1) + \lambda f_1(x, x_1) = 0,$$

und führt zu einem Büschel von Korrespondenzen zwischen denselben Gebilden, jede einem Parameter λ zugeordnet. Die konstituierenden Korrespondenzen $f(x, x_1) = 0$, $f_1(x, x_1) = 0$ können, auf Grund der nämlichen Überlegung wie bei den Involutionen in Nr. 136, durch beliebige zwei Korrespondenzen aus dem Büschel ersetzt werden.

Und ebenso wie dort schließt man, daß alle Paare entsprechender Elemente, welche den beiden konstituierenden Verwandtschaften gemeinsam sind, auch zu den übrigen Korrespondenzen des Büschels gehören. Unter ihnen befinden sich die $nn_1 + n + n_1 - 1$ gegebenen; aber dieser gemeinsamen Paare können, wie wir später erkennen werden, mehr sein.

Wenn die beiden Gebilde gleichartig sind und ineinander liegen, 157
so kommen wir wiederum zu der Frage nach den Koinzidenzelementen. Wir nehmen dann, wie in Nr. 67, 68, an, daß in beiden Gebilden die nämliche parametrische Bestimmung gilt, damit aus gleichen Parametern auf identische Elemente geschlossen werden kann, setzen, wie dort, $x_1 = x$ und erhalten eine Koinzidenzgleichung $(n + n_1)^{\text{ten}}$ Grades, aus welcher sich der fundamentale Satz, das sogenannte Chaslessche Korrespondenzprinzip[1]), zufolge des Grundsatzes der Algebra ergibt:

Zwei ineinander liegende Gebilde, welche in einer Korrespondenz $[n, n_1]$ stehen, haben $n + n_1$ Koinzidenzelemente.

Dieser Satz umfaßt den früheren Satz über die zwei Koinzidenzen konjektiver Gebilde.

Dies Prinzip gilt zunächst für die acht Gebilde; aber man erkennt sofort, daß es auf alle Gebilde übergeht, für welche sich dartun läßt, daß sie sich eindeutig — aber in beiderlei Sinne — auf eins der genannten Gebilde (und damit auch auf die übrigen) beziehen lassen. Alle diese Gebilde sollen unikursal heißen. Unikursal ist z. B. die Punktreihe auf einer ebenen Kurve 3. Ordnung mit einem Doppelpunkt, wie der Strahlenbüschel um diesen Punkt zeigt, aber nicht diejenige auf einer allgemeinen (doppelpunktslosen) ebenen Kurve 3. Ordnung.

Für alle unikursalen Gebilde gilt das Chaslessche Korrespondenzprinzip. Eine Korrespondenz auf einem unikursalen Gebilde kann man ja immer übertragen denken durch die eindeutige Abbildung auf eins der obigen Gebilde, etwa auf eine Punktreihe, und koinzi-

1) Ausgesprochen von Chasles in den Comptes rendus, Bd. 58 (1864), S. 1175 und in vielen folgenden Artikeln der Comptes rendus verwertet.

dierende entsprechende Elemente bilden sich ab in ebenfalls koinzidierende entsprechende.

Ferner, die Verwandtschaftsgleichung ist algebraisch. **Grundbedingung für die Anwendung des Korrespondenzprinzips ist daher, daß man es nur mit algebraischen Beziehungen zu tun hat**; man muß sich des algebraischen Charakters aller vorkommenden Operationen bewußt sein. Die Verwandtschaftsgleichung herzustellen, d. h. alle ihre Koeffizienten zu ermitteln, wird jedoch in den meisten Fällen nicht notwendig sein. Die Bestimmung der beiden Zahlen n, n_1 reicht hin. Die Beispiele werden darüber orientieren.

158 Der schwierigste Punkt der Anwendung des Korrespondenzprinzips ist die Bestimmung der **Vielfachheit** der Koinzidenzen. Dazu ist eine längere Erörterung unerläßlich.

Im Grunde ist die Existenz von (ebenen) Kurven n^{ter} Ordnung nur durch die analytische Gleichung bewiesen; wenn es auch möglich ist, allmählich in die Höhe steigend, mit Hilfe von Kurven niedrigerer Ordnung, also zunächst von Geraden und Kegelschnitten, durch geometrische Konstruktion zu Kurven höherer Ordnung zu gelangen, weit ist man auf diesem Wege noch nicht gekommen.

Es liege also eine durch ihre Gleichung n^{ten} Grades in gewöhnlichen **Cartesischen** Koordinaten definierte Kurve n^{ter} Ordnung vor. Sie liefert uns eine Korrespondenz $[n, n]$ zwischen den Büscheln der Parallelen zu den Axen: Parameter eines jeden dieser Strahlen ist die Koordinate, die er von der andern Axe abschneidet, und Verwandtschaftsgleichung ist die Kurvengleichung. Wir wissen, dieselbe steigt bis zum n^{ten} Grade in x und y zusammen, während die allgemeine Verwandtschaftsgleichung einer Korrespondenz $[n, n]$ zwischen den Büscheln auch Produkte von x und y in den Dimensionen $n+1$ bis $2n$ hat. Erläutern wir das Fehlen dieser oberen Glieder.

Auf einer Gerade v entsteht ebenfalls ein Korrespondenz $[n, n]$, deren entsprechende Punkte von entsprechenden Strahlen der Büschel herrühren, d. h. von solchen, die sich auf der Kurve schneiden.

Zu den $2n$ Koinzidenzen dieser Korrespondenz gehören ersichtlich die n Schnitte der Kurve mit der Gerade, andere endliche Punkte nicht; folglich müssen die n übrigen sich im unendlich fernen Punkte vereinigen. Und daß dieser vielfache Koinzidenz ist, ergibt sich daraus, daß der unendlich fernen Gerade als Strahl des einen Büschels die n Strahlen des andern korrespondieren, welche nach ihren Schnitten mit der Kurve gehen, also n in ihr selbst vereinigte Strahlen. Daraus allein könnte man auf die n-fachheit der Koinzidenz im unendlich fernen Punkt der Gerade v noch nicht mit Sicherheit schließen; sie folgt daraus, daß nur n andere Koinzidenzen vorhanden sind.

Denken wir uns zweitens die Gleichung der durch die Kurve vermittelten Verwandtschaft zwischen den beiden Parallelstrahlen-Büscheln in der allgemeinen Form von Nr. 156 geschrieben:

$$\sum_{i=0,\, k=0}^{i=n,\, k=n} a_{ik}\, x^i\, y^k = 0.$$

Die Gerade v sei eine durch den Anfangspunkt gehende $y = qx$; so ergibt sich durch Elimination von y, wodurch für die Punkte auf der Gerade die x-Koordinate Parameter wird, die Koinzidenzgleichung:

$$\begin{aligned} & a_{n,n}\, q^n\, x^{2n} + (a_{n,n-1} + a_{n-1,n}\, q)\, x^{2n-1} \\ & + (a_{n,n-2} + a_{n-1,n-1}\, q + a_{n-2,n}\, q^2)\, x^{2n-2} + \cdots \\ & + (a_{n,1} + a_{n-1,2}\, q + \cdots + a_{1,n}\, q^{n-1})\, x^{n+1} + \cdots = 0. \end{aligned}$$

Auf jeder Gerade ist der unendlich ferne Punkt eine n-fache Koinzidenz; diese Gleichung hat also, für jeden Wert von q, n Wurzeln ∞, es fallen die n oberen Glieder weg. Die Koeffizienten von x^{2n} bis x^{n+1} sind, für jeden Wert von q, gleich 0, d. h. alle a_{ik} sind 0, bei denen $i + k > n$. Es fehlen in der Korrespondenzgleichung alle Glieder, welche in x und y von höherer als n^{ter} Dimension sind; es bleibt eben die Kurvengleichung.

Betrachten wir nunmehr die allgemeine Korrespondenzgleichung:

$$\sum_{i=0,\, k=0}^{i=n,\, k=n_1} a_{ik}\, x^i\, x_1^{\,k} = 0,$$

in welcher die oberen Glieder nicht fehlen, und fassen in ihr x und x_1 als Koordinaten auf. Dann stellt sie eine Kurve von der Ordnung $n + n_1$ dar, aber mit spezieller Eigenschaft hinsichtlich der unendlich fernen Punkte der Koordinatenaxen. Jede Parallele $x = k$ zur Axe $x = 0$ führt zu einer Gleichung in x_1, die statt $(n + n_1)^{\text{ten}}$ nur n_1^{ten} Grades ist; die n oberen Glieder fehlen, sie hat n_1 endliche Wurzeln und n Wurzeln ∞. Von den Schnitten der Gerade mit der Kurve sind n_1 endlich und n haben sich im unendlich fernen Punkte vereinigt; und da dies für jede Parallele zu $x = 0$ gilt, so wird der unendlich ferne Punkt der Axe $x = 0$ ein n-facher Punkt der Kurve, und der von $x_1 = 0$ ein n_1-facher. Sie repräsentieren so die $n + n_1$ Schnitte der unendlich fernen Gerade mit der Kurve.

Diese Gerade wird übrigens in der Korrespondenz zwischen den beiden Büscheln nicht sich selbst entsprechend, wie vorhin, sondern ihr entsprechen, als Strahl des einen oder andern Büschels, die n_1 Tangenten des n_1-fachen, die n Tangenten des n-fachen Punktes. Jeder Strahl des ersten Büschels erhält durch seine n_1 endlichen Schnitte mit der Kurve seine entsprechenden Strahlen im zweiten.

159 Es sollen nun etwas allgemeinere Koordinaten genommen werden. Ein Dreieck ABC sei zugrunde gelegt; sind für einen Punkt P die Schnitte von $P(A, B, C)$ mit $BC, \ldots$ durch $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ bezeichnet, so hat man:

$$\frac{B\mathfrak{A}}{C\mathfrak{A}} \cdot \frac{C\mathfrak{B}}{A\mathfrak{B}} \cdot \frac{A\mathfrak{C}}{B\mathfrak{C}} = -1.$$

Wir nehmen als Koordinaten von P die beiden Teilverhältnisse:

$$\alpha = \frac{C\mathfrak{A}}{B\mathfrak{A}}, \quad \beta = \frac{C\mathfrak{B}}{A\mathfrak{B}},$$

so daß, wenn $\gamma = \frac{B\mathfrak{C}}{A\mathfrak{C}}$ ist, $\beta : \alpha = -\gamma$.

Es ist α Parameter für einen Strahl durch A, β für einen durch B, und α, β sind die Koordinaten des Schnittpunktes. Für jeden Punkt auf AB sind beide Koordinaten ∞.

Eine Kurve n^{ter} Ordnung, in allgemeiner Lage zum Dreieck, bringt die beiden Büschel A, B in eine Korrespondenz $[n, n]$ und was vorhin für die unendlich ferne Gerade und den Anfangspunkt galt, gilt jetzt für AB und C.

In der Korrespondenzgleichung in α, β fehlen also die Glieder von der $2n^{\text{ten}}$ bis zur $(n+1)^{\text{ten}}$ Dimension; wir können sie als Gleichung der Kurve in den Koordinaten α, β bezeichnen[1]):

$$\sum a_{ik} \alpha^i \beta^k = 0,$$

wo diese Summe sich über alle i, k erstreckt, für die $i + k \leqq n$. Wir schneiden die Kurve mit CB, auf welcher $\beta = 0$; es ergibt sich:

$$a_{n0} \alpha^n + a_{n-1,0} \alpha^{n-1} + \cdots + a_{00} = 0;$$

also, wenn $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ die Wurzeln sind:

$$\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n = (-1)^n \frac{a_{00}}{a_{n0}}.$$

Ebenso auf CA, wo $\alpha = 0$ ist und $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n$ die zu den Schnitten gehörigen Werte von β sind:

$$\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_n = (-1)^n \frac{a_{00}}{a_{0n}}.$$

Die Division der Kurvengleichung mit α^n gibt:

$$\sum a_{ik} \frac{\beta^k}{\alpha^{n-i}} = 0 \quad \text{oder} \quad \sum a_{ik} \cdot \frac{1}{\alpha^{n-i-k}} (-\gamma)^k = 0.$$

Auf AB ist $\alpha = \infty$, also fallen alle Glieder weg, in denen $i + k < n$; daher bleibt:

$$a_{0n}(-\gamma)^n + a_{1,n-1}(-\gamma)^{n-1} + \cdots + a_{n0} = 0$$

$$\text{oder} \quad a_{0n}\gamma^n - a_{1,n-1}\gamma^{n-1} + a_{2,n-2}\gamma^{n-2} - + \cdots + (-1)^n a_{n0} = 0.$$

1) Chasles, Aperçu historique, S. 280; Chasles' Porisma von Cremona ɜnnt: Einleitung in eine geometrische Theorie der ebenen Kurven, Nr. 36.

Also:

$$\gamma_1 \gamma_2 \ldots \gamma_n = \frac{a_{n0}}{a_{0n}}.$$

Demnach:

$$\frac{\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_n}{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n \cdot \gamma_1 \gamma_2 \ldots \gamma_n} = 1.$$

Wenn also die Schnitte einer Kurve mit den Seiten BC, CA, AB eines Dreiecks durch $A_1, A_2, \ldots A_n$; $B_1, \ldots B_n$; $C_1, \ldots C_n$ bezeichnet werden, so ist:

$$\frac{BA_1 \cdot BA_2 \ldots BA_n}{CA_1 \cdot CA_2 \ldots CA_n} \cdot \frac{CB_1 \cdot \ldots CB_n}{AB_1 \cdot \ldots AB_n} \cdot \frac{AC_1 \cdot \ldots AC_n}{BC_1 \cdot \ldots BC_n} = 1.$$

Das ist Carnots Satz[1]).

Aus ihm kann man eine zuerst von Halphen[2]) in präziser Form 160
ausgesprochene Regel ableiten, durch welche die Anzahl der Schnitte einer Gerade mit einer Kurve n^{ter} Ordnung, die in einem Punkte P vereinigt sind, bestimmt wird.

Diese unbekannte Anzahl sei ζ; die Gerade sei die Seite AB des Dreiecks und zwar liege die Ecke A dem P unendlich nahe (in 1. Ordnung), die übrigen Schnitte seien $C_{\zeta+1}, C_{\zeta+2}, \ldots C_n$. Die an P unendlich nahe vorbeigehende Seite AC wird dann eine gewisse Anzahl η von Schnitten $B_1, B_2, \ldots B_\eta$ haben, die dem A unendlich nahe liegen; wobei die Strecken $AB_1, AB_2, \ldots AB_\eta$ von verschiedener Ordnung unendlich klein sein können; die übrigen Schnitte seien $B_{\eta+1}, \ldots B_n$; die Schnitte endlich von BC seien $A_1, A_2, \ldots A_n$. Nach Carnots Satz ist dann:

$$\frac{AP^\zeta}{AB_1 \ldots AB_\eta} = \frac{BP^\zeta \cdot BC_{\zeta+1} \ldots BC_n \cdot CA_1 \ldots CA_n \cdot AB_{\eta+1} \ldots AB_n}{AC_{\zeta+1} \ldots AC_n \cdot BA_1 \ldots BA_n \cdot CB_1 \ldots CB_n}.$$

Rechts stehen lauter endliche Strecken. Mithin ist das links stehende Verhältnis endlich, und demnach ζ gleich der Summe der Ordnungen, in denen $AB_1, AB_2, \ldots AB_\eta$ unendlich klein sind. Also:

Die Anzahl der Schnitte einer Kurve und einer Gerade, die in einem Punkte P vereinigt sind, ist gleich der Summe der Ordnungen der unendlich kleinen Strecken zwischen der Kurve und der Gerade auf einer Sekante, deren Entfernung von P unendlich klein 1. Ordnung ist.

Nun liege eine Korrespondenz $[n, n_1]$ auf einer Gerade u vor; P sei eine vielfache Koinzidenz derselben; es soll eine Regel für die Bestimmung der Vielfachheit ζ gewonnen werden. Wir projizieren die beiden Punktreihen aus zwei beliebig gelegenen Punkten U, U_1;

1) Carnot, Géométrie de position (1803), S. 291. Vgl. Cremona a. a. O., Nr. 38.

2) Mémoires présentés par divers savants, Bd. 26, Nr. 2, S. 10. Bulletin de la Société math. de France, Bd. 1, S. 132.

die Büschel kommen ebenfalls in eine Korrespondenz $[n, n_1]$, und das Erzeugnis der Schnitte entsprechender Strahlen ist eine Kurve von der Ordnung $n + n_1$, wie es die auf einer beliebigen Gerade entstehende Korrespondenz beweist. Es kommt darauf an, wie viele Schnitte dieser Kurve mit u sich in P vereinigen. Ist dann X ein Punkt auf u, dessen Entfernung von P unendlich klein 1. Ordnung ist, so wollen wir die Gerade u und den Strahl XU als zwei Seiten des Dreiecks annehmen. Der Punkt X der ersten Reihe hat eine Anzahl entsprechender Punkte $X_1, X_2, \dots X_\eta$, die ihm unendlich nahe sind. Sie liefern, mit U_1 verbunden, auf UX die dem X unendlich nahen Schnitte $Y_1, Y_2, \dots Y_\eta$ mit der Kurve, und ζ ist gleich der Summe der Ordnungen, in denen $XY_1, XY_2, \dots XY_\eta$ unendlich klein sind, oder, was dasselbe ist, in denen $XX_1, XX_2, \dots XX_\eta$ es sind; denn die Verhältnisse $\frac{XX_1}{XY_1}, \frac{XX_2}{XY_2}, \dots \frac{XX_\eta}{XY_\eta}$ sind endlich.

Die Vielfachheit einer Koinzidenz P einer Punkte-Korrespondenz auf u ist daher gleich der Summe der Ordnungen, in denen $XX_1, XX_2, \dots XX_\eta$ unendlich klein sind, wenn X ein Punkt von u ist, dessen Entfernung von P unendlich klein 1. Ordnung ist, und $X_1, X_2, \dots X_\eta$ diejenigen von den ihm in dem einen Sinne entsprechenden sind, welche ihm unendlich nahe liegen[1]).

Die dem X im andern Sinne entsprechenden unendlich nahen Punkte brauchen nicht dieselbe Anzahl zu haben, aber die Summe der Ordnungen, in denen die Strecken von ihm nach ihnen unendlich klein sind, muß die nämliche sein.

§ 25. Sätze über Schnittpunkte, Plückersche Formeln, Geschlechtssatz.

161 Es wird sich empfehlen, hiervon einige Anwendungen zu machen.

Der Satz über die Anzahl nn' der Schnittpunkte zweier Kurven n^{ter} und n'^{ter} Ordnung (derselben Ebene) wird in der analytischen Geometrie auf den Satz der Algebra begründet, daß zwei Gleichungen n^{ten} und n'^{ten} Grades mit zwei Unbekannten nn' gemeinsame Lösungen haben. Zu ihnen gelangt man, wenn die eine Unbekannte eliminiert wird, wodurch sich eine Gleichung vom Grade nn' in der andern ergibt. Diese Elimination, ja selbst schon die Feststellung des Grades der resultierenden Gleichung ist nicht leicht, wenn die beiden Gradzahlen nicht kleine Zahlen sind, und ebenso die Er-

1) Zeuthen, Bulletin des Sciences mathématiques, 1. Ser., Bd. 5 (1873), 37; vorher in etwas weniger präziser Fassung in der Abhandlung: Almindelige ...skaber ved Systemer af plane Kurver, Nr. 26 (Schriften der dänischen ...emie, 5. Reihe, Bd. 10, IV).

örterung, daß zu jeder Wurzel der Gleichung nn'^{ten} Grades nur ein Wert der eliminierten Unbekannten gehört, der mit ihr zusammen beiden Gleichungen genügt.

Ist aber eine der Gradzahlen 1, so ist sowohl jene Elimination, als auch diese Erörterung einfach. Mit Hilfe dieser Schnittpunkte-Zahl $n \cdot 1$ läßt sich, ohne umständliche Eliminationen, vermittelst des Korrespondenzprinzips, also unter alleiniger Benutzung des Gaußschen Fundamentalsatzes, die allgemeine Schnittpunkte-Zahl nn' ableiten[1]).

Wir ordnen den beiden Kurven C^n, $C^{n'}$ zwei Büschel in ihrer Ebene zu, welche denselben Scheitel Q haben, und stellen zwischen ihnen eine Korrespondenz her, in der zwei Strahlen einander entsprechen, welche nach solchen Punkten von C^n und $C^{n'}$ gehen, die mit einem festen Punkte O in gerader Linie liegen. Ein Strahl x des C^n zugeordneten Büschels trifft diese Kurve in n Punkten, deren Verbindungslinien mit O die $C^{n'}$ in nn' Punkten schneiden, nach denen die entsprechenden Strahlen x' des zweiten Büschels gehen, und ebenso entsprechen jedem x' nn' Strahlen x; so daß eine Korrespondenz $[nn', nn']$ vorliegt. Unter den $2nn'$ Koinzidenzstrahlen befindet sich ersichtlich $q = QO$; für diesen Strahl als x oder x' fallen alle nn' entsprechenden Strahlen in ihn. Daraus kann noch nicht geschlossen werden, daß er eine nn'-fache Koinzidenz ist. Wir wenden unsere Regel an, von Punkten auf Strahlen übertragen. Durch Q sei ein dem q unendlich naher Strahl x gezogen. Z sei irgend einer der n Schnitte mit C^n, bei der beliebigen Lage von O und Q in endlicher Entfernung von ihnen, Z' sei wiederum einer der n' Schnitte von OZ mit $C^{n'}$, ebenfalls in endlicher Entfernung von beiden Punkten und von Z. Der Strahl $x' = QZ'$ ist daher einer von den x entsprechenden. Aber Z ist unendlich nahe an q, daher auch OZ, Z' und $QZ' = x'$; demnach x' unendlich nahe an x.

Es ist (Nr. 53):
$$\frac{\sin qx}{\sin xx'} = \frac{OZ}{ZZ'} \cdot \frac{QZ'}{OQ},$$
wobei es für die vorliegende Betrachtung nur auf absolute Werte ankommt.

Rechts stehen lauter endliche Größen, daher ist $\sphericalangle\, xx'$ ebenfalls unendlich klein erster Ordnung wie qx. Das gilt für alle nn' Strahlen x', welche dem x entsprechen. Folglich ist die Vielfachheit von q in der Tat nn'.

Jede von den nn' übrigen Koinzidenzen weist auf zwei Punkte von C^n und $C^{n'}$ hin, die sowohl auf einer Gerade durch O liegen, als auch — wegen der Koinzidenz — auf einer Gerade durch Q liegen, ohne daß jedoch diese beiden Geraden, wie vorhin, identisch sind.

1) Chasles, Comptes rendus, Bd. 75, S. 736.

Daher müssen sich die beiden Punkte von C^n und $C^{n'}$ in den Schnitt der beiden Geraden vereinigen, also in einen gemeinsamen Punkt der Kurven; und umgekehrt, jeder gemeinsame Punkt liefert einen Koinzidenzstrahl unserer Korrespondenz[1]).

Der Satz, daß zwei Kurven n^{ter} und n'^{ter} Klasse (derselben Ebene) nn' gemeinsame Tangenten haben, ist dual zu beweisen.

Aus ihnen folgen die entsprechenden Sätze über konzentrische Kegel, und daß die Schnittkurve zweier Flächen n^{ter} und n'^{ter} Ordnung nn'^{ter} Ordnung ist und die gemeinsamen Berührungsebenen zweier Flächen n^{ter} und n'^{ter} Klasse einen Torsus[2]) nn'^{ter} Klasse bilden; denn die Kurven, in denen jene Flächen von einer Ebene geschnitten werden, haben nn' gemeinsame Punkte, und die Tangentialkegel aus einem Punkte an diese Flächen nn' gemeinsame Berührungsebenen.

In ähnlicher Weise kann die Zahl nn' der Schnittpunkte einer Raumkurve n^{ter} Ordnung R^n und einer Fläche n'^{ter} Ordnung $F^{n'}$ bewiesen werden. Es sei ein Punkt O und eine Gerade q gegeben. Eine Ebene ξ durch q schneidet die R^n in n Punkten, deren Verbindungslinien mit O die Fläche in nn' Punkten schneiden; die Ebenen ξ' von q nach diesen ordnen wir der ξ zu. Der Kegel n'^{ter} Ordnung, welcher aus O die Schnittkurve einer Ebene ξ' von q mit $F^{n'}$ projiziert, hat mit demjenigen, welcher R^n projiziert, nn' Kanten gemein; nach den Begegnungspunkten derselben mit R^n gehen von q die der Ebene ξ' entsprechenden Ebenen ξ. Daher liegt wiederum eine Korrespondenz $[nn', nn']$ im Büschel q vor. Unter den $2nn'$ Koinzidenzen derselben befindet sich die Ebene $\varrho = qO$ nn'-fach. Denn es sei ξ eine der ϱ unendlich nahe Ebene im Büschel q, Z einer ihrer Schnitte mit R^n und Z' einer der Schnitte von OZ mit $F^{n'}$, endlich ξ' die nach ihm gehende Ebene aus q. Z und Z' befinden sich, wegen der beliebigen Lage von q und O, in endlichen Entfernungen von diesen und voneinander, aber unendlich nahe an ϱ. Durch OZZ' läßt sich im allgemeinen keine Ebene senkrecht zu der Axe q legen. Es sei daher durch Z eine zu q windschiefe und rechtwinklige Gerade gelegt, welche ϱ in R und ξ' in W' trifft; ist dann noch V ihr Schnittpunkt mit der Ebene π durch q, welche zu OZZ' parallel ist, ein Punkt, der ebenfalls endliche Entfernung von R und W' hat; so haben wir, wegen der Doppelverhältnis-Gleichheit der beiden mit dem Wurfe $\varrho\xi'\xi\pi$ perspektiven Würfe:

$$\frac{RZ}{ZW'} : \frac{RV}{W'V} = \frac{OZ}{ZZ'}.$$

1) Einen etwas anderen Beweis hat Chasles Comptes rendus, Bd. 76, S. 126 gegeben.

2) Für den Ebenenort 1. Stufe hat Cayley das Wort Torse gebraucht; in obiger Form habe ich es schon seit längerer Zeit an Stelle des umständlichen „abwickelbare Fläche“ übernommen.

Durch die neue Gerade ist eine zu q senkrechte Ebene möglich, welche die Neigungswinkel der Ebenen ϱ, ξ, ξ' ausschneidet; ist Q ihr Schnitt mit q, so ist:

$$\frac{\sin \varrho\xi}{\sin \xi\xi'} = \frac{RZ}{ZW'} \cdot \frac{QW'}{QR} = \frac{OZ}{ZZ'} \cdot \frac{RV}{W'V} \cdot \frac{QW'}{QR}.$$

Rechts stehen lauter endliche Größen, daher ist $\sphericalangle\, \xi\xi'$ ebenso unendlich klein 1. Ordnung wie $\sphericalangle\, \varrho\xi$, und das gilt für alle nn' Ebenen ξ', welche der ξ korrespondieren. Folglich ist, wie behauptet, ϱ eine nn'-fache Koinzidenz. Die übrigen nn' Koinzidenzen führen je zu zwei Punkten, von denen der eine auf der Kurve R^n, der andere auf $F^{n'}$ liegt, und welche beide sowohl in einer Ebene durch q, als auch auf einem nicht in diese Ebene fallenden Strahle durch O liegen, daher sich in den Schnittpunkt beider vereinigen müssen. Also:

Eine Raumkurve n^{ter} und eine Fläche n'^{ter} Ordnung haben nn' Punkte gemein.

Ist jene der volle Schnitt zweier Flächen, so ergibt sich:

Drei Flächen n^{ter}, n'^{ter}, n''^{ter} Ordnung haben $nn'n''$ Punkte gemein[1]).

Als weitere Anwendung mögen Beweise der Plückerschen 162
Formeln gewählt werden. Es liege also eine Kurve n^{ter} Ordnung n'^{ter} Klasse mit d Doppelpunkten und r Rückkehrpunkten vor. Wir lassen in einem Strahlenbüschel L zwei Strahlen x und x_1 entsprechen, welche nach zwei Punkten der Kurve gehen, die mit einem festen Punkte M in gerader Linie liegen. Jedem Strahle x entsprechen ersichtlich $n\ (n-1)$ Strahlen x_1, und ebenso umgekehrt. Die n' Tangenten aus M an die Kurve führen zu einfachen Koinzidenzen in den Strahlen von L nach ihren Berührungspunkten.

Der Strahl $m = LM$ aber ist eine $n(n-1)$-fache Koinzidenz. Es sei x ihm unendlich nahe im Büschel L, Z einer von seinen n Schnitten mit der Kurve, Z_1 einer der $n-1$ weiteren Schnitte von MZ, zwei Punkte, welche in endlicher Entfernung von L und M und von einander sich befinden; ist dann x_1 der Strahl LZ_1, der dem m und dem x unendlich nahe ist, so haben wir wieder:

$$\frac{\sin mx}{\sin xx_1} = \frac{MZ}{ZZ_1} \cdot \frac{LZ_1}{LM};$$

also sind xx_1 und mx von gleicher Ordnung unendlich klein. Das gilt ebenso für jeden der $n(n-1)$ dem x entsprechenden Strahlen x_1.

Wenn D ein Doppelpunkt der Kurve ist, so ist $d = LD$ eine zweifache Koinzidenz. Denn es sei x wieder dem d unendlich nahe

---

1) Der Beweis ist demjenigen nachgebildet, den Fouret im Bulletin de la Société mathématique de France, Bd. 1, S. 122 für diesen speziellen Fall gegeben hat. Dieser und die Chaslesschen Beweise enthalten noch nicht die schärfere Bestimmung der Vielfachheit der auszuscheidenden Koinzidenz.

im Büschel L, Z einer der beiden Schnitte der Kurve mit x, welche dem D unendlich nahe sind; so daß $v = DZ$ unendlich wenig von der einen Tangente des Doppelpunkts verschieden ist und $MZ = y$ unendlich wenig von $MD = s$. Daher liegt auf y ein zweiter dem D naher Punkt Z_1 auf dem andern Aste, so daß dann wiederum $v_1 = DZ_1$ sich wenig von der andern Tangente des Doppelpunktes unterscheidet. Nach Z_1 geht x_1 von L. Wir haben:

$$\frac{\sin dx}{\sin dv} = \frac{DZ}{LZ}, \quad \frac{\sin xx_1}{\sin x_1 y} = \frac{ZZ_1}{LZ},$$

also:

$$\frac{\sin xx_1}{\sin dx} = \frac{\sin x_1 y}{\sin dv} \cdot \frac{ZZ_1}{DZ} = \frac{\sin x_1 y}{\sin dv} \cdot \frac{\sin vv_1}{\sin yv_1}.$$

Wieder stehen rechts lauter endliche Winkel, insbesondere ist vv_1 nur unendlich wenig von dem Winkel der beiden Doppelpunkts-Tangenten verschieden. Daher ist $\sphericalangle\, xx_1$ unendlich klein 1. Ordnung, und ebenso der Winkel, der sich bei dem zweiten dem D unendlich nahen Schnitte von x ergibt.

Ist aber der Doppelpunkt in einen Rückkehrpunkt R übergegangen, so ist der Winkel vv_1 unendlich klein und zwar von der Ordnung $\frac{1}{2}$. Eine unendlich nahe am Rückkehrpunkte vorbeigehende Gerade schneidet die Kurven in zwei ihm unendlich nahen Punkten, welche mit dem Rückkehrpunkte verbunden, einen Winkel ergeben, der unendlich klein von der Ordnung $\frac{1}{2}$ ist. An der Kurve $y^2 = ax^3$, durch welche man jede Kurve mit Rückkehrpunkt in dessen Nähe ersetzen kann, ist dies leicht zu ersehen.

Für den Winkel xx_1 ergibt sich daher die Ordnung $\frac{3}{2}$ und wegen der zwei Schnitte von x, die sich in der Nähe von R befinden, erhalten wir die Summe 3 der Ordnungen der beiden unendlichen kleinen Winkel xx_1, also LR als dreifache Koinzidenz.

Daher ist:

$$2n(n-1) = n' + n(n-1) + 2d + 3r$$

oder:

1) $$n(n-1) = n' + 2d + 3r,$$

die erste der Plückerschen Formeln[1].

Die zweite:

2) $$n'(n'-1) = n + 2d' + 3r',$$

worin d', r' die Anzahlen der Doppel- und der Wendetangenten sind, ergibt sich dual.

Wir lassen nunmehr in einem Büschel L zwei Strahlen x und x_1 entsprechen, von denen x nach einem Punkt der Kurve geht und x_1 nach einem der $n-2$ weiteren Schnitte seiner Tangente. Jedem x

---

1) Plücker, Theorie der algebraischen Kurven, 1839.

korrespondieren daher $n(n-2)$ Strahlen x_1. Von jedem Punkte der Kurve gehen, außer der zugehörigen Tangente und der unendlich nahen, $n'-2$ anderwärts berührende aus; daher entsprechen jedem Strahle x_1 $n(n'-2)$ Strahlen x; und es liegt eine Korrespondenz $[n(n'-2), n(n-2)]$ vor.

Die r' Wendetangenten führen zu einfachen Koinzidenzen. Die n' Tangenten, welche von L kommen, sind hingegen vielfache Koinzidenzen. Es sei t eine von ihnen und T ihr Berührungspunkt, x ein dem t unendlich naher Strahl aus L, Z einer von den beiden Schnitten mit der Kurve, welche dem T unendlich nahe sind. Die Tangente in Z ist daher der Tangente t unendlich nahe und ihr Schnitt S mit t in der Nähe von T gelegen, Z_1 sei einer ihrer $n-2$ weiteren Schnitte mit der Kurve und x_1 der Strahl LZ_1. Es ist wiederum:

$$\frac{\sin xx_1}{\sin tx} = \frac{ZZ_1}{SZ} \cdot \frac{LS}{LZ_1}.$$

Von den rechts stehenden Strecken sind ZZ_1, SL, LZ_1 endlich, dagegen SZ unendlich klein und zwar von der Ordnung $\frac{1}{2}$.

Betrachten wir dazu die Parabel, welche t in T und ZS in Z berührt; ist Y der Schnitt des durch Z gehenden Durchmesser s mit t und U dessen Schnitt mit der durch T gehenden und zur Tangente ZS parallelen Polare von Y, so ist $YZ = ZU$, $SZ = \frac{1}{2}TU$; daher:

$$SZ^2 = \tfrac{1}{2}p \cdot YZ,$$

wo p der zu jenem Durchmesser gehörige Parameter ist.

ZY ist aber ebenso unendlich klein 1. Ordnung, wie $\sphericalangle\, tx$; daher SZ unendlich klein von der Ordnung $\frac{1}{2}$. Also gilt dies auch für $\sphericalangle\, xx_1$. Dasselbe ergibt sich bei jedem der $n-2$ übrigen Schnitte von ZS, und ebenso bei jedem der $n-2$ übrigen, zu welchen der zweite Schnitt von x führt, der dem T unendlich nahe ist. Somit ist in diesem Falle die Summe der Ordnungen und die Vielfachheit von t als Koinzidenz $2(n-2) \cdot \frac{1}{2} = n-2$.

Jeder Strahl d von L nach einem Doppel- oder Rückkehrpunkte der Kurve ist Koinzidenz und zwar in beiden Fällen zweifache. Ist nämlich x dem d unendlich nahe und Z einer der beiden dem ausgezeichneten Punkte unendlich nahen Schnitte, Z_1 der ebenfalls unendlich nahe Schnitt seiner Tangente mit dem andern Aste und x_1 der Strahl LZ_1, so ist $\sphericalangle\, xx_1$ von derselben Ordnung unendlich klein wie dx. Für den Fall des Rückkehrpunktes kann man wieder $y^2 = ax^3$ benutzen[1]).

Folglich ist:

$$n(n'-2) + n(n-2) = r' + n'(n-2) + 2(d+r);$$

1) Hat Z die Koordinaten α, β, so sind $\frac{1}{4}\alpha$, $-\frac{1}{8}\beta$ die von Z_1.

also:

$$r' = n^2 - 4n + 2n' - 2(d + r),$$

und weil $n' = n(n-1) - 2d - 3r$, so wird:

3) $$r' = 3n(n-2) - 6d - 8r.$$

Das ist die dritte Plückersche Formel; die zu ihr duale ist:

4) $$r = 3n'(n'-2) - 6d' - 8r'.$$

Was hier für eine Kurve erhalten ist, kann sofort durch Projektion auf einen Kegel übertragen werden.

Die vier Formeln sind mit dreien äquivalent. Zieht man die mit 3 multiplizierte Formel 1) von 3) ab, so ergibt sich:

5) $$3n - r = 3n' - r'.$$

Diese Formel, deren Seiten zueinander dual sind, ergibt sich ebenso aus 2) und 4). Und man nimmt am besten 1), 2), 5); aus 1) und 5) folgt 3), aus 2) und 5) folgt 4)[1].

163 Schreibt man 5) in der Form:

$$n' + r - 2(n-1) = n + r' - 2(n'-1)$$

und ersetzt links n' durch $n(n-1) - 2d - 3r$, rechts n durch $n'(n'-1) - 2d' - 3r'$, so ergibt sich:

6) $$\tfrac{1}{2}(n-1)(n-2) - (d+r) = \tfrac{1}{2}(n'-1)(n'-2) - (d'+r').$$

Die beiden zueinander dualen Seiten dieser Formel werden als das Geschlecht p der Kurve bezeichnet. Es ist also auch:

7) $$p = \tfrac{1}{2}(n'+r) - (n-1) = \tfrac{1}{2}(n+r') - (n'-1).$$

Aus 6) und 5) folgt noch:

8) $$\tfrac{1}{2}n(n+3) - d - 2r = \tfrac{1}{2}n'(n'+3) - d' - 2r'.$$

Das Geschlecht hat für die Theorie der Kurven eine große Bedeutung erhalten, vor allem wegen des fundamentalen Satzes, der von Clebsch[2]) herrührt:

Zwei eindeutig aufeinander bezogene ebene Kurven haben das nämliche Geschlecht.

Die beiden Kurven seien C, C_1; zu der einen gehören n, n', d, r, d', r', p, zu der andern n_1, n_1', ...; O und O_1 seien zwei beliebige Punkte in der einen und der andern Ebene. Ein Strahl g des Büschels O trifft C in n Punkten, denen infolge der eindeutigen Verwandtschaft der beiden Kurven ebenso viele Punkte auf C_1 korrespondieren; die Strahlen aus O_1 nach ihnen schneiden in $n(n_1 - 1)$ weiteren Punkten,

1) Zu den vorangehenden Betrachtungen vgl. Zeuthen, Nouv. Annales de Mathématiques, 2. Serie, Bd. 6, S. 200.
2) Journal f. Math., Bd. 64, S. 98.

denen wiederum ebenso viele auf C entsprechen; die Strahlen g' aus O nach ihnen seien dem g zugeordnet. Ersichtlich sind auch jedem g' $n(n_1-1)$ Strahlen g zugeordnet, da g aus g' ebenso entsteht, wie g' aus g. Es ergibt sich also in O eine Korrespondenz:

$$[n(n_1-1), \quad n(n_1-1)],$$

in welcher zwei Strahlen g und g' entsprechend sind, die nach Punkten von C gehen, deren entsprechende auf C_1 mit O_1 in gerader Linie liegen. Koinzidenzen kommen in folgender Weise zustande. Es gebe v Paare von Punkten auf C, die mit O in gerader Linie liegen und deren entsprechende auf C_1 mit O_1 in gerader Linie liegen. Jedes dieser Paare liefert eine Koinzidenz, die nicht einfach ist; eine genauere Untersuchung zeigt, daß sie doppelt ist; aber wir brauchen für unsere Zwecke diese Vielfachheit nicht genauer zu bestimmen, sie sei x; so daß auf diese Weise xv Koinzidenzen entstehen. Die beiden Punkte von C, welche den beiden unendlich nahen Punkten entsprechen, die eine Tangente aus O_1 an C_1 mit dieser Kurve gemein hat, führen ersichtlich zu einfachen Koinzidenzen; ihre Zahl ist n_1'. Den Punkten, welche in einem Doppelpunkte von C_1 übereinander und deshalb mit O_1 in gerader Linie liegen, entsprechen auf C nicht wiederum in einem Doppelpunkte übereinander liegende, sondern getrennte Punkte[1]). Diese Punkte rücken aber zusammen, wenn der Doppelpunkt ein Rückkehrpunkt wird, und liefern eine Koinzidenz im Büschel O; die Anzahl dieser Koinzidenzen ist r_1. Auf andere Weise können nicht Koinzidenzen entstehen. Also:

$$2n(n_1-1) = xv + n_1' + r_1.$$

Vertauscht man O und O_1 und C und C_1, so bleibt die Zahl xv unverändert, weil die betreffenden Koinzidenzen gleichartig zu C und O und zu C_1 und O_1 sich verhalten. Mithin:

$$2n_1(n-1) = xv + n' + r;$$

also erhalten wir durch Elimination von xv:

$$n_1' + r_1 - 2n_1 = n' + r - 2n,$$

mithin wegen 7) $2(p_1+1) = 2(p+1)$ oder:

$$p_1 = p\text{[2]}.$$

1) Eindeutig sind z. B. entsprechend eine Kurve und der Ort der Fußpunkte der aus einem Punkte auf ihre Tangenten gefällten Lote (Fußpunktskurve); hier sieht man deutlich, wie einem Doppelpunkte zwei getrennte Punkte zugeordnet sind.

2) Den obigen geometrischen Beweis des Satzes von Clebsch hat Zeuthen gegeben: Mathem. Annalen, Bd. 3, S. 150. Für die ganze vorangehende Besprechung der Vielfachheit einer Koinzidenz ist mir ein ausführlicher Brief meines Freundes Zeuthen sehr wertvoll gewesen.

Nehmen wir an, daß wir die Gleichheit des Ordnungsgeschlechts $p = \frac{1}{2}(n-1)(n-2) - (d+r)$ und des Klassengeschlechts $p' = \frac{1}{2}(n'-1)(n'-2) - (d'+r')$ (Formel 6)) noch nicht kennen, so folgt aus diesen Definitionsgleichungen und den Formeln 1), 2), daß

$$p = \tfrac{1}{2}(n'+r) - (n-1), \quad p' = \tfrac{1}{2}(n+r') - (n'-1).$$

Dualisieren wir nun in der zweiten Ebene, setzen also voraus, daß die Punkte von C eindeutig auf die Tangenten von C_1 bezogen sind, so erhalten wir:

$$p = p_1'.$$

Das Ordnungsgeschlecht der Kurve C ist gleich dem Klassengeschlecht der Kurve C_1.

Wenn nun $C_1 \equiv C$, so besteht die eindeutige Beziehung zweifellos, jedem Punkte entspricht seine Tangente. Also ist:

$$p = p'.$$

Die beiden Geschlechter einer Kurve sind gleich. Aus:

$$n' + r - 2(n-1) = n + r' - 2(n'-1)$$

folgt Formel 5), und diese, verbunden mit 1) oder 2), gibt 3), bzw. 4).

Wie die beiden Kurven aufeinander bezogen, ob gleichartige oder ungleichartige Elemente entsprechend sind, macht kaum einen Unterschied; der eine Fall zieht den andern nach sich.

Unikursale Kurven, d. h. Kurven, welche eindeutig auf eine Gerade (oder ein anderes Grundgebilde 1. Stufe) sich beziehen lassen, sind vom Geschlechte 0, wie die Gerade; vor allem die Kegelschnitte, die ja auf die Strahlenbüschel um ihre Punkte oder auf die Punktreihen ihrer Tangenten eindeutig bezogen sind.

Die Kurve 3. Ordnung mit Doppelpunkt ist, wie schon gesagt, auf den Strahlenbüschel um diesen Punkt, die kubische Raumkurve auf jeden Ebenenbüschel um eine Doppelsekante eindeutig bezogen.

Die ebenen Kurven, in welche eine Raumkurve aus den verschiedenen Punkten des Raumes projiziert wird, (oder die projizierenden Kegel) sind alle eindeutig auf sie bezogen und also auch aufeinander; sie haben daher alle dasselbe Geschlecht. Es wird das Geschlecht der Raumkurve genannt; und der obige Satz kann auch auf die Raumkurven ausgedehnt werden. Auch Regelflächen erhalten ein Geschlecht, da durch die geraden Erzeugenden alle ebenen Schnitte in eindeutige Beziehung kommen; und so hat eine Regelfläche, deren Erzeugenden in eindeutiger Beziehung zu

den Elementen einer (ebenen oder unebenen) Kurve stehen, das nämliche Geschlecht wie diese[1]).

Umgekehrt, jede Kurve n^{ter} Ordnung vom Geschlechte 0 läßt sich eindeutig auf eine Gerade beziehen. Für sie gilt:

$$\sum \tfrac{1}{2} i(i-1) = \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2),$$

indem ein i-facher Punkt für $\frac{1}{2}i(i-1)$ Doppelpunkte zählt.

Man lege eine Kurve $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung durch jeden i-fachen Punkt der gegebenen Kurve, als $(i-1)$-fachen Punkt, und durch $2n-3$ einfache Punkte derselben, so sind dies

$$\sum \tfrac{1}{2}(i-1)i + 2n - 3 = \tfrac{1}{2}(n-1)(n+2) - 1$$

lineare Bedingungen[2]), so daß durch sie ein Büschel von Kurven $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung bestimmt wird; und jede Kurve dieses Büschels hat mit der C^n

$$\sum i(i-1) + 2n - 3 = (n-1)(n-2) + 2n - 3 = n(n-1) - 1$$

Punkte gemein, weshalb nur ein mit der Kurve des Büschels beweglicher Schnittpunkt bleibt. Daher befindet sich, weil auch umgekehrt durch jeden Punkt von C^n eine Kurve des Büschels geht, die krumme Punktreihe auf C^n in eindeutiger Beziehung zum Büschel und zu jedem unikursalen Gebilde.

Statt Kurven $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung kann man auch Kurven $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung nehmen, die sich ebenso zu den vielfachen Punkten der C^n verhalten und durch $n-3$ einfache Punkte derselben gehen.

Daher sind Kurven vom Geschlechte 0 auch stets aufeinander eindeutig beziehbar. Ob man aber stets zwischen irgend zwei Kurven von gleichem, aber höherem Geschlechte eine eindeutige Beziehung herstellen, z. B. alle Kurven vom Geschlechte 1 in eindeutige Beziehung zur niedrigsten Kurve dieses Geschlechts, der allgemeinen Kurve 3. Ordnung bringen kann, bleibt noch dahingestellt.

§ 26. Erzeugnisse mehrdeutiger Verwandtschaften.

In einer Ebene seien zwei Strahlenbüschel U, U_1 gegeben, 164
welche in einer Verwandtschaft $[n, n_1]$ stehen; wir haben schon gelegentlich (Nr. 160) erkannt, daß das Erzeugnis der Schnittpunkte entsprechender Strahlen eine Kurve $(n+n_1)^{\text{ter}}$ Ordnung ist.

1) Eine Regelfläche benutzend, hat Cremona den ersten geometrischen Beweis der Geschlechtsgleichheit eindeutig bezogener Kurven gegeben: Preliminari ad una teoria geometrica delle superficie (Memorie dell'Accademia di Bologna, Ser. II, Bd. 6), Nr. 54.

2) Hierbei setzen wir folgende Sätze als bekannt voraus: Eine ebene Kurve n^{ter} Ordnung wird durch $\frac{1}{2}n(n+3)$ Punkte eindeutig bestimmt, $\frac{1}{2}n(n+3)-1$ Punkte bestimmen einen Büschel, und ein gegebener i-facher Punkt ist mit $\frac{1}{2}i(i+1)$ Punkten in bezug auf die Bestimmung gleichbedeutend.

Die Scheitel der beiden Büschel sind vielfache Punkte derselben (Nr. 158); der Strahl $U_1 U$ des Büschels U_1 schneidet sich mit seinen entsprechenden Strahlen im Punkte U; so wird U ein n-facher Punkt der Kurve und die genannten n Strahlen sind seine Tangenten; wie die Betrachtung des Nachbarstrahls von $U_1 U$ im Büschel U_1 und seiner entsprechenden Strahlen ergibt. Jeder Strahl von U hat n_1 weitere Schnitte mit der Kurve, in denen er von den n_1 entsprechenden Strahlen von U_1 geschnitten wird; für jeden der erwähnten n Strahlen ist einer dieser Schnitte nach U gerückt. Der Punkt U_1 ist ein n_1-facher Punkt der Kurve.

Zwischen den beiden Büscheln U, U_1 bestehe noch eine zweite Korrespondenz $[n', n_1']$; dann haben die beiden Kurven $(n + n_1)^{\text{ter}}$ bzw. $(n' + n_1')^{\text{ter}}$ Ordnung, außer den vielfachen Punkten U, U_1, noch

$$(n + n_1)\ (n' + n_1') - nn' - n_1 n_1' = nn_1' + n_1 n'$$

Punkte gemein; nach jedem von ihnen gehen entsprechende Strahlen der einen und der andern Korrespondenz. Also:

Zwei Korrespondenzen $[n, n_1]$ und $[n', n_1']$ zwischen den nämlichen Gebilden haben $nn_1' + n_1 n'$ gemeinsame Paare entsprechender Elemente.

Die Zahl ist $2nn_1$, wenn beide Korrespondenzen $[n, n_1]$ sind.

Nun fanden wir (Nr. 156), daß alle Korrespondenzen $[n, n_1]$, welche durch $nn_1 + n + n_1 - 1$ Paare entsprechender Elemente bestimmt sind, einen Büschel bilden und dann alle Paare entsprechender Elemente gemein haben, welche den Konstituenten gemeinsam sind, also $2nn_1$; folglich sind dann durch jene $nn_1 + n + n_1 - 1$ Paare $nn_1 - n - n_1 + 1$ weitere Paare entsprechender Elemente bestimmt, welche allen Korrespondenzen $[n, n_1]$ gemeinsam sind, denen jene gemeinsam sind; wir nennen sie ihnen assoziiert, oder auch die ganze Gruppe von $2nn_1$ Paaren eine Gruppe von assoziierten Paaren entsprechender Elemente. Die Zahl $nn_1 - n - n_1 + 1$ ist $\geqq 0$, und zwar $= 0$ nur wenn eine der Zahlen n, n_1 gleich 1 ist. Sie ist $= 1$, wenn $n = n_1' = 2$; so daß, wenn es sich um Korrespondenzen $[2, 2]$ handelt, sieben Paare entsprechender Elemente ein achtes assoziiertes bestimmen.

Der Schnitt mit einer Gerade oder einer Ebene lehrt, daß zwei Ebenenbüschel u, u_1, welche sich in einer Verwandtschaft $[n, n_1]$ befinden, eine Regelfläche $(n + n_1)^{\text{ten}}$ Grades durch die Schnittlinien entsprechender Ebenen liefern. Jede Ebene von u enthält n_1 Erzeugenden, eingeschnitten durch die entsprechenden Ebenen aus u_1, und jede Ebene von u_1 n Erzeugenden. Beide Axen werden von allen Erzeugenden geschnitten, sind daher Leitaden der Fläche.

Die Regelfläche entsteht, wie die Regelschar (Nr. 94), noch auf eine zweite Weise; jeder der beiden Ebenenbüschel schneidet in die andere Axe eine Punktreihe, und diese beiden Punktreihen auf u, u_1 stehen ebenfalls in einer Korrespondenz, aber nicht $[n, n_1]$, sondern $[n_1, n]$; denn einem Punkte von u entsprechen diejenigen n Punkte von u_1, nach welchen die n Ebenen von u gehen, die der nach jenem Punkte von u kommenden Ebene von u_1 entsprechen. Die Verbindungslinie zweier entsprechender Punkte ist, ebenso wie bei der Regelschar, identisch mit der Schnittlinie der beiden entsprechenden Ebenen, welche sie einschneiden. Die Punktreihen in Korrespondenz $[n_1, n]$ erzeugen dieselbe Regelfläche wie die Ebenenbüschel in Korrespondenz $[n, n_1]$.

Von jedem Punkte von u gehen also n Erzeugenden aus, er wird so n-fach und u eine n-fache Leitgerade, und dadurch wird der Schnitt in jeder Ebene durch u zur $(n+n_1)^{\text{ter}}$ Ordnung vervollständigt. Ebenso ist u_1 n_1-fache Leitgerade. Der Schnitt mit einer Ebene gibt ebenfalls diese Vielfachheit zu erkennen.

Auch hier läßt sich — es soll jedoch zunächst noch nicht näher darauf eingegangen werden — beweisen, daß jede Ebene durch eine Erzeugende Berührungsebene der Fläche ist und daher jede Ebene durch u eine n_1-fache und jede durch u_1 eine n-fache[1]).

Zwei verbundene Regelscharen seien in einer Korrespon- 165
denz $[n, n_1]$; sie rufen dann auf jedem ebenen Schnitte der Trägerfläche eine eben solche Korrespondenz hervor. Deren Koinzidenzen beweisen, daß es in jeder Ebene $n + n_1$ Schnitte entsprechender Geraden gibt, durch diese Schnittpunkte also eine auf der genannten Fläche verlaufende Raumkurve $(n+n_1)^{\text{ter}}$ Ordnung entsteht. Jede Gerade der ersten Schar trifft sie in den n_1 Schnitten mit den entsprechenden Geraden der andern Schar, und jede aus dieser in n Punkten.

Den Fall $n = n_1 = 1$ haben wir in Nr. 105 gehabt; die nächst einfacheren Fälle sind: $n = 2$, $n_1 = 1$ (kubische Raumkurve), $n = n_1 = 2$ (Raumkurve 4. Ordnung 1. Art), $n = 3$, $n_1 = 1$ (Raumkurve 4. Ordnung 2. Art).

Umgekehrt, jede auf der Trägerfläche verlaufende Raumkurve von der Ordnung $n + n_1$, welche einer Gerade der ersten Regelschar in n_1 Punkten begegnet, muß, wie die Ebenen durch diese lehren, jeder der andern Schar in n Punkten und daher wiederum jeder der ersteren Schar in n_1 Punkten begegnen und bringt die beiden Scharen in eine Korrespondenz $[n, n_1]$, in welcher auf ihr sich schneidende Geraden zugeordnet sind.

1) In bezug auf die durch eine Korrespondenz [1, 2] erzeugten Kurven und Regelflächen vgl. Emil Weyr, Theorie der mehrdeutigen geometrischen Elementargebilde (1869, 1870).

Und weil die Korrespondenz durch $nn_1 + n + n_1$ Paare entsprechender Elemente eindeutig bestimmt und $\infty^{nn_1+n+n_1}$ Korrespondenzen zwischen den Regelscharen bestehen, so bestimmen $nn_1 + n + n_1$ Punkte auf der Trägerfläche eindeutig auf dieser eine Raumkurve $(n + n_1)^{\text{ter}}$ Ordnung mit dem erörterten Verhalten gegen die beiden Regelscharen und es gibt $\infty^{nn_1+n+n_1}$ so beschaffene Kurven.

In den vier erwähnten Fällen beträgt diese Zahl 3, 5, 8, 7. Von den kubischen Raumkurven und den Raumkurven 4. Ordnung 2. Art haben wir auf der Fläche zwei verschiedene Systeme mit entgegengesetztem Verhalten gegen die Regelscharen.

Ferner lehrt der Satz über die gemeinsamen Paare entsprechender Elemente zweier Korrespondenzen zwischen den nämlichen Gebilden (Nr. 164):

Zwei auf der Trägerfläche verbundener Regelscharen befindliche Raumkurven von den Ordnungen $n + n_1$, $n' + n_1'$, welche den Geraden der einen Regelschar in n, bzw. n' Punkten, denen der anderen in n_1, bzw. n_1' Punkten begegnen, haben $nn_1' + n_1 n'$ Punkte gemeinsam[1]), z. B. zwei kubische Raumkurven aus demselben oder aus verschiedenen Systemen vier, bzw. fünf Punkte, zwei Raumkurven 4. Ordnung 1. Art acht Punkte.

166 Der Tangentenbüschel eines Kegelschnitts K sei auf einen Strahlenbüschel U_1 oder auf den Tangentenbüschel eines andern Kegelschnitts K_1 projektiv bezogen; es handelt sich um den Ort der Schnittpunkte entsprechender Strahlen.

Auf einer Transversale l bewirken sie folgende Korrespondenz. Durch einen Punkt X derselben gehen zwei Tangenten an K, die beiden entsprechenden Strahlen von U_1 oder Tangenten von K_1 schneiden l in den korrespondierenden Punkten X_1. Durch einen Punkt X_1 von l geht ein Strahl von U_1, zwei Tangenten von K_1, denen eine, bzw. zwei Tangenten von K entsprechen und ebensoviele Schnitte X mit l. Die Korrespondenz auf l ist daher im ersten Falle eine [1, 2], im zweiten eine [2, 2], und die Koinzidenzen beweisen, daß die erzeugte Kurve 3., bzw. 4. Ordnung ist[2]).

Im ersten Falle erkennt man U_1 sofort als Doppelpunkt, weil die beiden Tangenten t, t' an K aus U_1 sich in ihm mit den entsprechenden Strahlen t_1, t_1' von U_1 begegnen, und je nach der Lage

1) Wenig verschieden ist die Ableitung dieser Zahl, bei welcher die Kurven aus einem Punkte O der Trägerfläche auf eine Ebene projiziert und die Schnitte der Projektionen abgezählt werden, die nicht in die Spuren der beiden in O sich schneidenden Geraden der Scharen fallen. Jedem dieser Schnitte entspricht, weil der Projektionsstrahl die Fläche nur noch einmal trifft, ein gemeinsamer Punkt der Raumkurven.

2) Schröter, Journal f. Math., Bd. 54, S. 31.

des U_1 zu K (außerhalb, auf, innerhalb) wird er eigentlicher Doppelpunkt, Rückkehrpunkt oder isolierter Doppelpunkt. Es seien $\bar{t}$ und $\bar{t}_1$ die entsprechenden Elemente unendlich nahe neben t, t_1, so ist $\bar{t}\bar{t}_1$ der unendlich nahe Punkt der erzeugten Kurve neben $U_1 = tt_1$; also die Verbindungslinie $\bar{t}_1$, oder auf der Grenze t_1 selbst, die eine Tangente in U_1 und t_1' die andere, also diejenigen Strahlen von U_1, die in der gegebenen Projektivität den Tangenten aus U_1 an K entsprechen.

Beide Kurven 3., bzw. 4. Ordnung befinden sich in eindeutiger Beziehung zu unikursalen Gebilden (Kegelschnitt, Strahlenbüschel), sind also (Nr. 163) vom Geschlecht 0, und müssen einen, bzw. drei Doppelpunkte haben. Die drei Doppelpunkte der Kurve 4. Ordnung ergeben sich einfacher, wenn die Kollineation erörtert sein wird.

Betrachten wir noch zwei Ausartungen.

Im ersten Falle seien die beiden Tangenten t, t' aus U_1 an K sich selbst entsprechend; sie lösen sich von dem Erzeugnis ab, und als eigentliches Erzeugnis ergibt sich daher eine Gerade, und zwar eine Tangente von K.

Es seien x und x_1 entsprechend in der gegebenen Projektivität, und w sei die zweite Tangente an K aus xx_1 neben x, so wird diese Gerade, als Tangente, vom Tangentenbüschel von K_1 in einer Punktreihe geschnitten, die zu ihm, also zum Strahlenbüschel U_1 und daher auch zur Punktreihe projektiv ist, welche dieser in w einschneidet; diese Konjektivität hat drei Koinzidenzen, nämlich wt, wt', xx_1. Also sind alle Punkte sich selbst entsprechende, durchweg schneiden sich korrespondierende Elemente der beiden Büschel 2. Klasse und 1. Klasse auf w.

Im zweiten Falle seien drei von den gemeinsamen Tangenten, t, t', t'', der beiden Kegelschnitte K, K_1 sich selbst entsprechend; als eigentliches Erzeugnis bleibt die vierte gemeinsame Tangente w. Denn auf ihr entstehen durch die beiden projektiven Büschel 2. Klasse konjektive Punktreihen mit drei Koinzidenzen $w(t, t', t'')$, also schneiden sich durchweg entsprechende Tangenten auf w.

Die felddualen Ergebnisse sind:

Wenn die Punktreihe auf einem Kegelschnitte K zu der auf einer Gerade u_1 oder auf einem andern Kegelschnitte K_1 projektiv ist, so umhüllen die Verbindungslinien entsprechender Punkte eine Kurve 3. oder 4. Klasse. Für erstere ist u_1 Doppeltangente: die Berührungspunkte sind die den Punkten von K auf u entsprechenden Punkte.

Es sei die Punktreihe von K zum Tangentenbüschel 167
von K_1 projektiv; womit dann auch die beiden Punktreihen und die beiden Tangentenbüschel projektiv werden.

Auf K entsteht eine Korrespondenz [2, 2], wenn wir jedem Punkte X die beiden Schnitte X' mit der korrespondierenden

Tangente von K_1 zuordnen; denn auch durch jeden Punkt X' von K gehen zwei Tangenten von K_1. Die vier Koinzidenzen dieser [2, 2] zeigen, daß viermal ein Punkt von K und die entsprechende Tangente von K_1 inzident sind.

Es sei A, a_1 ein solches Paar, a die Tangente von A, A_1 der Berührungspunkt von a_1; so ist A ein Punkt der durch die beiden Tangentenbüschel erzeugten Kurve 4. Ordnung, a_1 eine Tangente der durch die beiden Punktreihen entstehenden Kurve 4. Klasse. Wenn a', a_1' die benachbarten entsprechenden Tangenten sind, so ist $a'a_1'$ der Nachbarpunkt von A auf der Kurve 4. Ordnung; a', welche mit a sich in A schneidet, enthält daher diese unendlich nahen Punkte, also ist sie oder auf der Grenze die a selbst die Tangente der Kurve 4. Ordnung in A. Und ebenso ergibt sich A_1 als Berührungspunkt der a_1 mit der Kurve 4. Klasse.

Die Kurve 4. Ordnung, welche durch die beiden projektiven Tangentenbüschel erzeugt wird, berührt beide Kegelschnitte viermal; die Berührungspunkte sind solche Punkte, durch welche die der Tangente entsprechende Tangente des andern Kegelschnitts geht.

Und die Kurve 4. Klasse, welche durch die projektiven Punktreihen auf K, K_1 entsteht, berührt ebenfalls beide Kegelschnitte viermal; die Tangente eines solchen Berührugspunktes geht durch den entsprechenden Punkt auf dem andern Kegelschnitte.

Im ersten Falle liefern die vier Berührungspunkte alle gemeinsamen Punkte der Kurve 4. Ordnung, im zweiten die Tangenten in ihnen alle gemeinsamen Tangenten der Kurve 4. Klasse und des betreffenden Kegelschnitts.

Nehmen wir an, daß fünfmal eine Tangente von K_1 durch den entsprechenden Punkt von K geht, so hat die Kurve 4. Klasse mit K_1 zehn Tangenten, die der 4. Ordnung mit K zehn Punkte gemeinsam; K_1 ist ein Teil von jener, K ein Teil von dieser, und alle Tangenten von K_1 gehen durch die entsprechenden Punkte von K. Wie jedoch die Verhältnisse in diesem Falle genauer sich gestalten, soll später mit Hilfe der ebenen Korrelation untersucht werden.

Ordnet man jeder Tangente eines Kegelschnitts K das auf sie aus einem festen Punkte O gefällte Lot zu, so entsteht, weil jeder Strahl des Büschels O auf zwei parallelen Tangenten senkrecht steht, die aus dem zu seinem unendlich fernen Punkte in der absoluten Involution gepaarten Punkte kommen, zwischen dem Tangentenbüschel und dem Strahlenbüschel eine Korrespondenz [2, 1], welche auf einer beliebigen Gerade eine [2, 2] hervorruft.

Die Fußpunkts-Kurve eines Punktes O in bezug auf einen Kegelschnitt ist eine Kurve 4. Ordnung. Sie steht in eindeutiger

Beziehung zu dem Kegelschnitte und ist daher vom Geschlechte 0. Die drei Doppelpunkte, die ihr deshalb zukommen, sind leicht nachzuweisen. Einer ist O, wegen der beiden Tangenten aus ihm an K; die beiden andern sind die absoluten Punkte, denn für jede Tangente aus einem derselben geht das Lot auch nach ihm, da er sich selbst gepaart ist in jener Involution.

Auch die Punktreihe auf K steht zum Büschel O in Korrespondenz [2, 1]; ordnen wir jedem Punkt von K die Schnitte des korrespondierenden Strahls zu, so entsteht auf K eine Korrespondenz [2, 2], diesmal eine Projektivität zweier Involutionen, von denen die eine durch den Strahlenbüschel O eingeschnitten wird, die andere die der Berührungspunkte paralleler Tangenten ist, mit dem Mittelpunkt als Zentrum.

Viermal geht daher ein Strahl von O durch den entsprechenden Punkt, oder viermal liegt der Fußpunkt im Berührungspunkt; vier Normalen gehen durch O und die Enveloppe der Normalen, die Evolute, ist 4. Klasse.

Wir erkennen, wie oben, daß die Fußpunktskurve in diesen vier Punkten den Kegelschnitt berührt.

Wenn eine der beiden Zahlen n, n_1 gleich 1 ist, etwa n_1, 168
dann ergibt sich im n-deutigen Gebilde eine Involution n^{ten} Grades; denn die Verwandtschaftsgleichung ist:

$$(a_{n1}x^n + a_{n-1,1}x^{n-1} + \cdots + a_{01})\,x_1 + (a_{n0}\,x^n + a_{n-1,0}x^{n-1} + \cdots + a_{00}) = 0$$

oder kürzer:

$$Q_0 + x_1 Q_1 = 0;$$

das ist die Gleichung der Gruppe von n Elementen in u, welche dem Elemente x_1 von u_1 entsprechen; verändert sich dies, so entsteht eine Involution n^{ten} Grades; wir haben also eine eindeutige Beziehung zwischen den Elementen von u_1 und den Gruppen dieser Involution, eine Projektivität zwischen u_1 und der Involution (Nr. 135).

Eine Korrespondenz [n, 1] ist Projektivität zwischen einer Involution n^{ten} Grades in u und dem Gebilde u_1[1]).

Genau wie aus der Gleichung $Q + \lambda Q_1 = 0$ der Involution die Möglichkeit, dieselbe projektiv zu beziehen, gefolgert werden kann, kann man auch die projektive Beziehbarkeit der Büschel und Scharen von Kurven in der Ebene (von Kegeln im Bündel), von Flächen im Raume am einfachsten und für alle Fälle gleichartig erkennen,

1) Cremona charakterisiert, in der ersten Zeit der Betrachtung mehrdeutiger Verwandtschaften, z. B. zwei Ebenenbüschel in Korrespondenz [2, 1] als zwei „projektive" Ebenenbüschel, von denen der eine „doppelt involutorisch", der andere einfach ist; vgl. z. B. Annali di Matematica, Ser. I, Bd. 4, S. 80.

wenn man die analytische Gleichung

$$S + \lambda S_1 = 0$$

zugrunde legt. Sind $S = 0$ und $S_1 = 0$ die Gleichungen zweier Kurven n^{ter} Ordnung derselben Ebene in Punktkoordinaten, so entsteht durch jene Gleichung der Büschel n^{ter} Ordnung, mit von Kurve zu Kurve veränderlichem Parameter λ; alle Kurven des Büschels gehen durch die n^2 Punkte, welche $S = 0$, $S_1 = 0$ gemeinsam sind, die Grundpunkte des Büschels.

Sind aber $S = 0$, $S_1 = 0$ Gleichungen n^{ten} Grades in Linienkoordinaten, also von Kurven n^{ter} Klasse, so stellt $S + \lambda S_1 = 0$ eine Kurvenschar n^{ter} Klasse dar mit n^2 Grundtangenten.

Wir haben einen Flächenbüschel n^{ter} Ordnung, wenn $S = 0$, $S_1 = 0$ Gleichungen n^{ten} Grades in räumlichen Punktkoordinaten sind; die Kurve $n^{2\text{ter}}$ Ordnung, welche den beiden Konstituenten oder irgend zwei Flächen des Büschels gemeinsam ist, ist allen Flächen desselben gemein: seine Grundkurve. Und sind die Variablen Ebenenkoordinaten, so liegt eine Flächenschar n^{ter} Klasse vor: mit einem Grundtorsus $n^{2\text{ter}}$ Klasse von ∞^1 gemeinsamen Tangentialebenen.

Für die einfacheren Fälle machen wir einige andere Überlegungen, durch welche die Möglichkeit der projektiven Beziehung sich dartun läßt.

Die Grundpunkte eines Kegelschnitt-Büschels sind entweder alle vier, oder nur zwei reell, oder keiner. In den beiden ersten Fällen kann man vermittelst eines reellen Grundpunktes G sofort Grundgebilde erhalten, die zum Büschel in eindeutiger Beziehung stehen und deshalb geeignet sind, die projektive Beziehung zu vermitteln. Ein solches ist der Tangentenbüschel in G. Jeder Kegelschnitt des Büschels hat eine Tangente in G, und jeder Strahl von G bestimmt einen Kegelschnitt des Büschels, der ihn berührt; der unendlich nahe Punkt auf ihm neben G bestimmt ihn, neben den vier Grundpunkten[1]). Oder die Punktreihe auf einer Gerade durch G ist ein solches Gebilde, denn jeder Kegelschnitt des Büschels hat einen zweiten Schnitt mit ihr, und jeder Punkt auf ihr bestimmt einen Kegelschnitt im Büschel. Als solche Gebilde hat man ferner den Büschel der Polaren eines festen Punktes in bezug auf die Kurven des Büschels — wovon der Tangentenbüschel in G der anschaulichste Fall ist — und die Punktreihe 2. Ordnung der Pole einer festen Gerade; wenn man diese Örter schon kennt.

Man dualisiere dies für die Kegelschnitt-Schar und übertrage es in den Bündel.

1) Das gilt für jeden Kurvenbüschel, der mindestens einen reellen Grundpunkt besitzt.

Beim Flächenbüschel 2. Ordnung liegen, wenn er eine reelle Grundkurve besitzt (was nicht notwendig ist), in dem Tangentialebenen-Büschel in einem Punkte derselben (um die Tangente der Grundkurve) oder in der Punktreihe auf einer Transversale, welche die Grundkurve trifft, derartige die projektive Beziehung vermittelnde Grundgebilde vor.

Damit ist eine ganz erhebliche Erweiterung des Bereichs der projektiv beziehbaren (unikursalen) Gebilde eingetreten.

Die Fundamental-Eigenschaft des Büschels von Kurven n^{ter} Ordnung in einer Ebene oder von Flächen n^{ter} Ordnung ist, daß durch jeden Punkt der Ebene oder des Raumes (der nicht Grundpunkt ist oder der Grundkurve angehört) nur ein Element (Kurve oder Fläche) des Büschels geht. Aus ihr folgt die zweite Eigenschaft, daß die Büschel eine Transversale in einer Involution schneiden. In der Tat, zwischen inzidierenden Elementen des Büschels und der Transversale entsteht eine Korrespondenz [1, n]; jedes Element des Büschels schneidet n Punkte ein, durch jeden Punkt der Transversale geht aber nur ein Element des Büschels. Folglich bilden nach dem obigen Satz die Schnittpunkte-Gruppen auf der Transversale eine Involution n^{ten} Grades. Eine Kurvenschar n^{ter} Klasse erhält aus einem Punkte ihrer Ebene eine Involution n^{ten} Grades von Tangenten und eine Flächenschar n^{ter} Klasse aus einer Gerade eine Involution n^{ten} Grades von Berührungsebenen.

Zwischen der Punktreihe auf einem Kegelschnitte und einem 169
Strahlenbüschel seiner Ebene besteht eine Korrespondenz [2, 1], in welcher inzidente Elemente zugeordnet sind, also entsteht, wie wir schon wissen, auf dem Kegelschnitt durch den Büschel eine Involution (2. Grades); und ebenso bilden im Tangentenbüschel eines Kegelschnitts die Paare der Tangenten, die von den Punkten einer Gerade kommen, eine Involution.

Ferner, wenn zwei Kurvenbüschel n^{ter} und n_1^{ter} Ordnung derselben Ebene projektiv bezogen sind, so ist das Erzeugnis der Schnittpunkte entsprechender Elemente eine Kurve $(n+n_1)^{ter}$ Ordnung; denn auf einer Transversale entsteht durch die Schnittpunkte mit entsprechenden Kurven eine Korrespondenz [n, n_1], die offenbar Projektivität zwischen den eingeschnittenen Involutionen n^{ten} Grades und n_1^{ten} Grades ist, mit $n+n_1$ Koinzidenzen.

Weil durch jeden Grundpunkt eine Kurve aus dem andern Büschel geht, so sind alle $n^2+n_1^2$ Grundpunkte auf dem Erzeugnisse gelegen.

In gleicher Weise ist der Ort der Schnittkurven entsprechender Flächen zweier projektiven Flächenbüschel n^{ter} und n_1^{ter} Ordnung eine Fläche $(n+n_1)^{ter}$ Ordnung. Sie enthält beide Grundkurven.

Wir heben hervor: die gewöhnlich[1]) nach Chasles benannte Erzeugung einer ebenen Kurve 3. Ordnung durch einen Kegelschnitt-Büschel und einen Strahlenbüschel, welche projektiv sind, und die nach Steiner benannte Erzeugung einer Fläche 3. Ordnung durch einen Flächenbüschel 2. Ordnung und einen zu ihm projektiven Ebenenbüschel. Die Fläche entsteht durch Kegelschnitte in den Ebenen des letzteren Büschels.

170 Ein Kegelschnitt-Büschel enthält zwei Kegelschnitte, welche eine gegebene Gerade seiner Ebene berühren: in den Doppelpunkten der eingeschnittenen Involution; und dasselbe gilt für einen Flächenbüschel 2. Ordnung. Dieser enthält drei Flächen, welche eine gegebene Ebene tangieren, diejenigen nämlich, von denen die Geradenpaare des Kegelschnitt-Büschels herrühren, in dem er die Ebene schneidet.

Daher entsteht, wenn in einer Ebene ein Strahlenbüschel U und ein Kegelschnitt-Büschel vorliegen, welche projektiv sind, in ersterem eine Korrespondenz [2, 2], in welcher ein Strahl und die Tangenten aus dem Scheitel des Büschels an den korrespondierenden Kegelschnitt entsprechend sind. Denn jeder Strahl x hat zwei entsprechende Tangenten x_1 im Büschel U und andererseits berührt jeder Strahl x_1 von U zwei Kegelschnitte des Büschels und hat zwei entsprechende Strahlen x. Die vier Koinzidenzen lehren, daß vier Strahlen des Büschels den entsprechenden Kegelschnitt berühren und deshalb auch die erzeugte Kurve 3. Ordnung.

Auch im Kegelschnitt-Büschel entsteht eine Korrespondenz [2, 2], in der zwei Kegelschnitte zugeordnet sind, von denen der eine einem Strahle von U entspricht, der andere ihn berührt.

Bei einem Flächenbüschel 2. Ordnung und einem Ebenenbüschel, welche projektiv sind, entsteht in dem letzteren eine Korrespondenz [2, 3]; es gibt also fünf Ebenen in diesem Büschel, welche die entsprechende Fläche berühren und die erzeugte Fläche 3. Ordnung in einem Geradenpaar schneiden.

Wird eine Kegelschnitt-Schar projektiv auf eine Punktreihe derselben Ebene bezogen, so umhüllen die Tangenten aus den Punkten der letzteren je an den entsprechenden Kegelschnitt eine Kurve 3. Klasse.

Wenn aber eine Schar von Kegelschnitten projektiv zu einem Strahlenbüschel derselben Ebene ist, so entsteht auf einer Transversale durch die Schnitte mit entsprechenden Elementen, [illegible] jeden Punkt zwei Kegelschnitte der Schar gehen (deren

[1]) [illegible]mann hat sie früher gekannt: Gesammelte Werke. Bd. II, 1. Teil, [illegible] und Anmerkungen von G. Scheffers.

Tangenten die Doppelstrahlen der Tangenteninvolution sind), eine Korrespondenz [2, 2], und das **Erzeugnis der Schnitte entsprechender Elemente ist eine Kurve 4. Ordnung, welche den Scheitel des Strahlenbüschels zum Doppelpunkte hat.**

Durch einen Punkt gehen drei Flächen **einer Flächenschar 2. Klasse; bezieht man sie projektiv auf einen Ebenenbüschel,** so entsteht auf einer Gerade eine Korrespondenz [3, 2], und **das Erzeugnis ist eine Fläche 5. Ordnung mit der Axe des Ebenenbüschels als dreifacher Gerade,** weil jeder ihrer Punkte dreimal auf entsprechenden Elementen liegt.

Bei der **Erzeugung einer Kurve oder Fläche $(n+n_1)^{\text{ter}}$ Ordnung durch zwei projektive Kurven- oder Flächenbüschel** n^{ter}, bzw. n_1^{ter} **Ordnung** ist, wie schon bemerkt, die Korrespondenz $[n, n_1]$, welche auf zwei verschiedenen oder auf derselben Transversale entsteht, Projektivität der eingeschnittenen Involutionen n^{ten}, n_1^{ten} Grades. 171
Handelt es sich um dieselbe Transversale, so sind die Koinzidenzen Punkte, welche entsprechenden Gruppen angehören, die Schnitte mit dem Erzeugnisse. Die Involutionen seien

$$Q - \lambda R = 0, \quad Q_1 - \lambda_1 R_1 = 0;$$

zur Projektivität gehöre die bilineare Relation:

$$\alpha\lambda\lambda_1 + \beta\lambda + \beta_1\lambda_1 + \gamma = 0.$$

Die Gruppen, zu denen ein bestimmter Punkt mit dem Parameter x gehört, haben die Parameter

$$\lambda = \frac{Q}{R}, \quad \lambda_1 = \frac{Q_1}{R_1},$$

wo in Q, R, Q_1, R_1 dies x eingesetzt ist; gehört x zu einem Koinzidenzpunkte, so gilt:

$$\alpha \frac{Q}{R}\frac{Q_1}{R_1} + \beta \frac{Q}{R} + \beta_1 \frac{Q_1}{R_1} + \gamma = 0$$

oder

$$\alpha Q Q_1 + \beta Q R_1 + \beta_1 Q_1 R + \gamma R R_1 = 0.$$

Die Wurzeln dieser Gleichung $(n+n_1)^{\text{ten}}$ Grades in x sind also die Parameter der Koinzidenzpunkte.

Wir nehmen jetzt einige Spezialfälle vor, in denen es uns gelingen wird, in einfacher Weise die Vielfachheit einer Koinzidenz zu bestimmen (Nr. 158).

Der **erste Büschel besitze einen Grundpunkt** G, **der für zwei Kurven desselben, welche wir als die Konstituenten nehmen,** r**-fach sei.** Es werde eine beliebige Transversale durch ihn gelegt, so bestehen die beiden konstituierenden Gruppen der ersten Involution aus dem r-fachen G und $n-r$ andern Punkten. Es sei α der Parameter von G, so ist $(x-\alpha)^r$ in Q und in R enthalten,

also in $Q - \lambda R$; d. h. alle Gruppen der Involution haben ihn zum r-fachen Punkte und die Involution ist, abgesehen von diesem gemeinsamen r-fachen Punkte, nur $(n-r)^{\text{ten}}$ Grades (Nr. 135); und da die Transversale beliebig ist, so ist der Punkt r-facher Schnitt jeder weiteren Kurve des Büschels mit jeder Gerade durch ihn, also r-fach für jede Kurve des Büschels.

Nehmen wir an, derselbe Grundpunkt G sei r_1-facher Punkt für alle Kurven des zweiten Büschels, so daß $(x-\alpha)^{r_1}$ in Q_1 und in R_1 aufgeht, so erhält jedes Glied der Koinzidenzgleichung den Faktor $(x-\alpha)^{r+r_1}$, und $x=\alpha$ wird $(r+r_1)$-fache Wurzel derselben, G $(r+r)$-fache Koinzidenz auf jeder Gerade durch ihn, $(r+r_1)$-facher Punkt auf der erzeugten Kurve. Also gilt für die Erzeugung einer Kurve $(n+n_1)^{\text{ter}}$ Ordnung durch zwei projektive Büschel n^{ter} und n_1^{ter} Ordnung:

Ein gemeinsamer Grundpunkt der beiden Büschel, der r-fach für alle Kurven des einen und r_1-fach für alle des andern ist (von welchen Zahlen r, r_1 auch die eine 0 sein kann), ist $(r+r_1)$-fach für die erzeugte Kurve.

Bei den Flächen kann G ein gemeinsamer Punkt der beiden Grundkurven sein mit den genannten Vielfachheiten für die Flächen des einen und des andern Büschels; er ist dann $(r+r_1)$-facher Punkt der erzeugten Fläche. Es kann sich aber auch um einen gemeinsamen Teil der beiden Grundkurven handeln, wo dann die Transversale irgend eine diesen Teil treffende Gerade ist. Z. B. wenn die Grundkurven zweier projektiven Flächenbüschel 2. Ordnung beide in eine Gerade und eine kubische Raumkurve oder in zwei Kegelschnitte zerfallen und der eine Teil gemeinsam ist, aber einfach für alle Flächen beider Büschel, so ist er auf der erzeugten Fläche 4. Ordnung doppelt; und wir erhalten drei interessante Spezialfälle dieser Fläche: mit einer doppelten Gerade, einem doppelten Kegelschnitte, einer doppelten kubischen Raumkurve.

Wir nehmen zweitens an, daß S ein Schnittpunkt entsprechender Kurven sei, s-fach auf der einen, s_1-fach auf der andern, wobei etwa $s_1 \geqq s$ sei. Wir legen durch ihn wieder eine Transversale und lassen die Konstituenten $Q=0$, $Q_1=0$ von diesen Kurven herrühren. Also sind $\lambda=0$ und $\lambda_1=0$ in der bilinearen Relation entsprechend; das fordert, daß $\gamma=0$ sei, so daß in der Koinzidenzgleichung das vierte Glied wegfällt. Ist β Parameter von S, so geht $(x-\beta)^s$ in Q, $(x-\beta)^{s_1}$ in Q_1 auf; folglich geht die niedrigere Potenz $(x-\beta)^s$ in allen drei Gliedern auf und $x=\beta$ ist s-fache Wurzel der Koinzidenzgleichung; wir schließen, weil die Transversale beliebig ist, daß S ein s-facher Punkt der erzeugten Kurve ist.

Ist ein Punkt für die eine von zwei entsprechenden Kurven s-fach, für die andere s_1-fach, so ist er, wofern $s_1 \geqq s$, für die erzeugte Kurve s-fach.

Aber heben wir auch folgendes Ergebnis hervor: Wenn bei zwei projektiven Involutionen, welche ineinander liegen, zwei entsprechende Gruppen ein s-faches und ein s_1-faches Element haben, die sich decken, so ist dies eine s-fache Koinzidenz der Verwandtschaft $[n, n_1]$, z. B. eine doppelte bei zwei projektiven (gemeinen) Involutionen, in denen ein Doppelpunkt der einen einem der andern entspricht und mit ihm zusammenfällt.

Nehmen wir wieder die Voraussetzung, daß G für alle Kurven des einen Büschels r-fach, für alle des andern r_1-fach sei, sowie, daß auf einer bestimmten Gerade von einer bestimmten Kurve des ersten Büschels nach s weitere Schnittpunkte in G gerückt sind, und von der entsprechenden im zweiten s_1 weitere, wo wiederum $s_1 \geqq s$; dann ist bei der Koinzidenzgleichung, zu der diese Gerade führt, $(x-\alpha)^{r+r_1+s}$ Faktor der linken Seite, also repräsentiert der Punkt G für diese Gerade $r + r_1 + s$ Schnitte mit der erzeugten Kurve.

Wenn z. B. in einem gemeinsamen für beide Büschel einfachen Grundpunkte G jede zwei entsprechenden Kurven sich berühren, so gilt: $r = r_1 = s = s_1 = 1$; also hat jede Gerade durch den Punkt drei vereinigte Schnitte mit der erzeugten Kurve; der Grundpunkt ist ein dreifacher Punkt derselben.

Oder der Punkt G sei nur Grundpunkt des ersten Büschels, und zwar einfacher, aber für eine Kurve desselben doppelt, und die ihr entsprechende im zweiten gehe durch ihn einfach; so gilt auf jeder Gerade durch ihn:

$$r = 1, \quad r_1 = 0, \quad s = s_1 = 1;$$

der Punkt ist Doppelpunkt der erzeugten Kurve.

Wenn dagegen auch die erste Kurve nur einfach durch ihn geht, so gelten dieselben Zahlen bloß für ihre Tangente, und diese wird Tangente an die erzeugte Kurve[1]).

§ 27. Verzweigungs- und Doppelelemente mehrdeutig bezogener Gebilde.

Weil jetzt mindestens eine der Zahlen n, n_1 größer als 1 ange- 172
nommen wird, so treten ausgezeichnete Elemente auf, welche bei der Projektivität nicht vorhanden sind. Es sei $n > 1$, so daß jedem Elemente des zweiten Gebildes u_1 mehr als ein Element im ersten u korrespondieren. Dann kann es eintreten, daß zwei von diesen Elementen sich vereinigen. Man nennt dasjenige Element von u, in dem die Vereinigung stattfindet, ein Doppelelement, und das von u_1, unter dessen entsprechenden es sich befindet,

1) Vgl. Cremona, Einleitung in eine geometrische Theorie der ebenen Kurven, Nr. 51.

mit einem der Funktionentheorie entlehnten Namen ein Verzweigungselement. Dabei stellen wir uns im allgemeinen u und u_1 getrennt vor; liegen sie ineinander, so kommen noch die schon besprochenen Koinzidenzelemente hinzu, in denen entsprechende Elemente sich miteinander vereinigen und welche wohl von den Doppelelementen zu unterscheiden sind; die in einem Doppelelemente sich vereinigenden Elemente entsprechen, im allgemeinen, nicht einander, sondern demselben Elemente des andern Gebildes.

Die Zahl der Verzweigungselemente in u_1 und der Doppelelemente in u, von denen jedes einem von jenen zugeordnet ist, ist gleich groß: um diese Zahl zu ermitteln, wollen wir in u eine Korrespondenz zweier ineinander liegender Gebilde herstellen, auf die das Korrespondenzprinzip angewandt werden kann; wir lassen zwei Elemente X und X' von u einander entsprechen, die demselben Elemente X_1 von u_1 korrespondieren. Jedem Elemente X von u entsprechen n_1 Elemente X_1 von u_1 und jedem derselben in u $n-1$ weitere außer X, also im ganzen entsprechen dem X $n_1(n-1)$ Elemente X'; und weil X aus X' ebenso hervorgeht, wie X' aus X — unsere Hilfskorrespondenz ist eine solche, die wir bald als eine involutorische bezeichnen werden —, so entsprechen auch jedem Elemente X' $n_1(n-1)$ Elemente X; die Hilfskorrespondenz auf u ist daher $[n_1(n-1), n_1(n-1)]$ und hat $2n_1(n-1)$ Koinzidenzen.

Auf u hat man also $2n_1(n-1)$ Doppelelemente und ebensoviele Verzweigungselemente auf u_1; dagegen sind auf u_1 $2n(n_1-1)$ Doppelelemente und auf u ebensoviele Verzweigungselemente.

Ist etwa $n_1=1$, so haben wir nur $2(n-1)$ Doppelelemente auf u und ebenso viele Verzweigungselemente auf u_1. Die Korrespondenz ist die Projektivität zwischen dem einfachen Gebilde u_1 und einer Involution n^{ten} Grades auf u: jedem Elemente von u_1 entspricht eine Gruppe in dieser, und die $2(n-1)$ jetzigen Doppelelemente sind diejenigen, die wir schon bei der Involution beliebigen Grades als solche bezeichnet haben (Nr. 136); und der Name kann bestehen bleiben.

Damit haben wir jetzt die Zahl $2(n-1)$ der Doppelelemente einer Involution n^{ten} Grades erhalten unabhängig von dem Satze über die Diskriminante einer algebraischen Gleichung, der a. a. O. benutzt wurde.

Aber umgekehrt können wir diesen Satz der Algebra, daß nämlich die Diskriminante einer Gleichung n^{ten} Grades vom Grade $2(n-1)$ in den Koeffizienten derselben ist, benutzen zum Beweise unseres jetzigen Satzes über die Anzahl der Doppel- und Verzweigungselemente.

In der nach x geordneten Verwandtschaftsgleichung sind die Koeffizienten Funktionen n_1^{ten} Grades in x_1; setzen wir die Diskriminante dieser Gleichung n^{ten} Grades in x gleich Null, so erhalten wir

eine Gleichung in x_1, deren Wurzeln diejenigen Elemente auf u_1 liefern, unter deren entsprechenden in u sich zwei in ein Doppelelement vereinigen, also die Verzweigungselemente von u_1. Diese Diskriminantengleichung ist vom Grade $2(n-1)$ in den Koeffizienten der Gleichung n^{ten} Grades in x, also, da jeder eine Funktion n_1^{ten} Grades in x_1 ist, eine Gleichung vom Grade $2n_1(n-1)$ in x_1.

Ist $n = n_1 = 2$, so haben wir in jedem der beiden Gebilde 173
vier Verzweigungselemente und vier Doppelelemente.

In bezug auf die beiden Gruppen oder Würfe der Verzweigungselemente einer Korrespondenz $[2, 2]$ gilt, daß sie in den Doppelverhältnissen übereinstimmen.

Zu dem Ende wollen wir die Verwandtschaftsgleichung lieber mit Binomialkoeffizienten, also in der Form schreiben:

$$(a_{22}x_1^2 + 2a_{21}x_1 + a_{20})x^2 + 2(a_{12}x_1^2 + 2a_{11}x_1 + a_{10})x \\ + (a_{02}x_1^2 + 2a_{01}x_1 + a_{00}) = 0.$$

Die Bedingung für die Vereinigung der demselben Elemente x_1 korrespondierenden Elemente x ist:

$$(a_{22}x_1^2 + 2a_{21}x_1 + a_{20})(a_{02}x_1^2 + 2a_{01}x_1 + a_{00}) - (a_{12}x_1^2 + 2a_{11}x_1 + a_{10})^2 = 0$$

oder:

$$(a_{22}a_{02} - a_{12}^2)x_1^4 + 2(a_{22}a_{01} + a_{21}a_{02} - 2a_{12}a_{11})x_1^3 \\ + (a_{22}a_{00} + a_{20}a_{02} + 4a_{21}a_{01} - 2a_{12}a_{10} - 4a_{11}^2)x_1^2 \\ + 2(a_{21}a_{00} + a_{20}a_{01} - 2a_{11}a_{10})x_1 + (a_{20}a_{00} - a_{10}^2) = 0.$$

Sie liefert uns die vier Verzweigungselemente in u_1.

Schreiben wir sie in der Form:

$$ax_1^4 + 4bx_1^3 + 6cx_1^2 + 4dx_1 + e = 0,$$

und bilden, nach Nr. 151, die beiden Invarianten:

$$S = ae - 4bd + 3c^2 \quad \text{und} \quad T = ace + 4bcd - ad^2 - b^2e - c^3$$

der Äquianharmonizität und Harmonizität, oder besser: $12S$ und $216T$, so lehren die freilich etwas umständlich zu erhaltenden Resultate, daß sie durch Vertauschung der vorderen und hinteren Zeiger der Koeffizienten a sich nicht ändern[1]); d. h. daß die Gleichung 4. Grades, welche die Verzweigungselemente von u liefert, genau dieselben Invarianten hat. Man kann die Rechnung etwas vereinfachen durch eine passende Wahl der Parameter x und x_1 (die jedoch nicht immer auf reelle Weise möglich ist). Wir richten die beiden parametrischen Bestimmungen so ein, daß $x = 0$ ein Verzweigungselement

1) Cremona, Rendiconti dell'Istituto Lombardo, Ser. I, Bd. 4 (1867), S. 199.

und $x_1 = \infty$ das entsprechende Doppelelement und $x_1 = 0$ ebenfalls Verzweigungselement und $x = \infty$ das zugehörige Doppelelement ist. Also gehören zu $x = 0$ zwei Wurzeln $x_1 = \infty$; das fordert in $a_{02}x_1^2 + 2a_{01}x_1 + a_{00}$ das Verschwinden der beiden Koeffizienten a_{02}, a_{01}, und die andere Bedingung bedingt das von a_{20}, a_{10}. Die Verwandtschaftsgleichung vereinfacht sich in:

$$(a_{22}x_1^2 + 2a_{21}x_1)x^2 + 2(a_{12}x_1^2 + 2a_{11}x_1)x + a_{00} = 0,$$

und diejenige für die Verzweigungselemente in u_1 wird:

$$-a_{12}^2x_1^4 - 4a_{12}a_{11}x_1^3 + (a_{22}a_{00} - 4a_{11}^2)x_1^2 + 2a_{21}a_{00}x_1 = 0;$$

für diese ist:

$$12S = (a_{22}a_{00} - 4a_{11})^2 - 24a_{21}a_{12}a_{11}a_{00},$$

$$216T = 54a_{21}^2a_{12}^2a_{00}^2 - 72a_{21}a_{12}a_{11}a_{00}(a_{22}a_{00} - 4a_{11}^2) - (a_{22}a_{00} - 4a_{11}^2)^3:$$

woran die obige Behauptung sofort zu erkennen ist.

Beide Würfe von Verzweigungselementen haben also dieselben S und T, daher auch dasselbe $\frac{S^3}{T^2}$, also auch (Nr. 151) dieselbe Gleichung, welche die sechs Doppelverhältnisse liefert.

Die Diskriminante $S^3 - 27T^2$ ist auch in beiden Fällen dieselbe. Vereinigen sich in dem einen Wurfe zwei Verzweigungselemente, so geschieht es auch im andern; wenn in dem einen Wurfe die Elemente gleichartig sind (alle reell oder alle imaginär), so sind sie auch im andern gleichartig; und wenn jener aus zwei reellen und zwei imaginären Elementen besteht, so gilt es auch für diesen.

Läßt man den einen der beiden projektiven Würfe der Verzweigungselemente unverändert und gibt dem andern die vier Formen, bei denen er sich projektiv bleibt, so erhält man, daß die einen und andern Verzweigungselemente in vier Projektivitäten entsprechend sind:

$$\begin{aligned} ABCD &\barwedge A_1B_1C_1D_1, \\ &\barwedge B_1A_1D_1C_1, \\ &\barwedge C_1D_1A_1B_1, \\ &\barwedge D_1C_1B_1A_1. \end{aligned}$$

174 Wir wollen diese Projektivitäten nun auch durch geometrische Betrachtungen beweisen und werden dabei erkennen, daß sie sich auch über die Doppelelemente ausdehnen.

Die Korrespondenz [2, 2] sei auf zwei verbundene Regelscharen der g und der l übertragen. Die Schnittpunkte der entsprechenden Geraden erzeugen (Nr. 165) eine Raumkurve 4. Ordnung R^4 1. Art, weil sie den Geraden beider Scharen zweimal begegnet, die Grund-

kurve eines Flächenbüschels 2. Ordnung[1]). Verzweigungselemente sind die Geraden, welche R^4 tangieren: a, b, c, d aus der g-Schar, a_1, b_1, c_1, d_1 aus der l-Schar; und die zugehörigen Doppelgeraden sind die Geraden je aus der andern Schar, welche durch die Berührungspunkte gehen: $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$ in der g-Schar, $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{d}_1$ in der l-Schar, so daß $\mathfrak{a}_1$ z. B. durch den Berührungspunkt von a geht, usw.

Es sei V^2 einer der vier Kegel 2. Grades durch R^4 und U^2 der Tangentialkegel aus seinem Scheitel V an die Trägerfläche F^2 der beiden Regelscharen. Dieser Kegel bewirkt eine Projektivität zwischen diesen Scharen, in welcher je in derselben Berührungsebene von U^2 liegende Geraden entsprechend sind (Nr. 105). Jede Berührungsebene aber von V^2 berührt R^4 in den beiden Punkten, in denen diese Kurve von der Berührungskante getroffen wird. In den gemeinsamen Berührungsebenen von V^2 und U^2 sind daher die beiden Geraden aus den Regelscharen Tangenten von R^4. Folglich wird in jener Projektivität einer der vier Geraden $a, \ldots$ je eine der $a_1, \ldots$ zugeordnet; nehmen wir an: $abcd \barwedge a_1b_1c_1d_1$. Es sei k die Kante von V^2, auf welcher die Berührungspunkte von a und a_1 liegen. Die Ebene $k\mathfrak{a}$ ist Tangentialebene von F^2 und, weil sie durch V geht, von U^2; die zweite Gerade der F^2 in ihr, aus der l-Schar, ist diejenige, die den zweiten Schnitt von k mit F^2 (außer ka_1, durch den $\mathfrak{a}$ geht), enthält, also den ka, und ist daher $\mathfrak{a}_1$. Folglich entsprechen in der Projektivität auch den $\mathfrak{a}, \ldots$ die $\mathfrak{a}_1, \ldots$, und wir haben:

$$abcd\mathfrak{abcd} \barwedge a_1b_1c_1d_1\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1\mathfrak{d}_1.$$

Die drei andern Kegel durch R^4 geben die weitern Projektivitäten zwischen den 16 Geraden[2]).

Die Ebene der drei andern Kegelspitzen ist die Gegenebene ω des V im gemeinsamen Polartetraeder des Flächenbüschels durch R^4; auf ihr schneiden sich a und a_1, b und $b_1, \ldots$ $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}_1, \ldots$, denn die Schnitte sind Berührungspunkte von Tangentialebenen von F^2, die durch V gehen.

1) Daß sie das ist, erkennt man so. Durch acht beliebige Punkte $A, \ldots H$ auf ihr und einen neunten außerhalb der Trägerfläche befindlichen Punkt I sei eine zweite Fläche 2. Grades gelegt. Die Grundkurve des Büschels, welchen beide bestimmen, und die R^4 projizieren wir aus A auf eine Ebene; die Projektionen, Kurven 3. Ordnung, haben neun Punkte gemein, welche wegen der Beliebigkeit eine Kurve 3. Ordnung eindeutig bestimmen, nämlich die Projektionen von $B, \ldots H$ und die Spuren der beiden durch A gehenden Geraden der Trägerfläche; also sind die Projektionen identisch und demnach auch die Raumkurven selbst; beide werden durch die zweiten Schnitte der Projektionsstrahlen mit der Trägerfläche gebildet.

2) Emil Weyr, Annali di Matematica, Ser. II, Bd. 4, S. 272, sowie: Über einen Korrespondenzsatz, Wiener Sitzungsberichte, Bd. 87 (1883), S. 592.

Wenn nun in der Projektivität, zu welcher der Kegel V_1^2 mit der Spitze V_1 führt, der a die b_1 zugeordnet wird, dann wird der b die a_1 zugeordnet. Die Verbindungslinie von aa_1 und bb_1 ist die gemeinsame Spur der Ebenen ab_1 und ba_1 in ω; als Spur der ersteren geht sie durch V_1, und daher liegt dieser Punkt auch auf ba_1, welche so Berührungsebene des Tangentialkegels aus V_1 wird, den auch ab_1 berührt. Als zweite Geraden in den durch c und d gehenden Berührungsebenen dieses Kegels bleiben nur d_1 und c_1; denn cc_1, dd_1 berühren den Tangentialkegel aus V. Und daraus folgt dann, daß den $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ die $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{c}_1$ zugeordnet werden. Die drei weiteren Projektivitäten sind also:

$$abcd\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d} \barwedge b_1a_1d_1c_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{a}_1\mathfrak{d}_1\mathfrak{c}_1, \barwedge c_1d_1a_1b_1\mathfrak{c}_1\mathfrak{d}_1\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1, \barwedge d_1c_1b_1a_1\mathfrak{d}_1\mathfrak{c}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{a}_1.$$

Weil die acht Ebenen ab_1, ba_1 ... $\mathfrak{a}\mathfrak{b}_1$, ... den Tangentialkegel aus V_1 berühren, so laufen ihre vier Spuren in ω in den Punkt V_1 zusammen; diese vier Geraden sind die Verbindungslinien der Spuren von a und b oder a_1 und b_1, von c und d oder c_1 und d_1, ... Also liegen diese Spuren auf dem Kegelschnitte $F^2\omega$. Folglich schneiden die Geraden a, b; c, d; $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$; $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ oder a_1, b_1; c_1, d_1; $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$; $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{d}_1$ vier Punktepaare einer Involution auf diesem Kegelschnitte ein und bilden selbst eine Involution in der betreffenden Regelschar. Demnach haben wir in der g-Schar die drei Involutionen:

$$a, b; c, d; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}; \mathfrak{c}, \mathfrak{d} \mid a, c; b, d; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}; \mathfrak{b}, \mathfrak{d} \mid a, d; b, c; \mathfrak{a}, \mathfrak{d}; \mathfrak{b}, \mathfrak{c};$$

und entsprechend in der l-Schar.

175 Wir geben einen zweiten geometrischen Beweis für diese Projektivitäten und Involutionen, in dem wir ebenfalls eine Fläche 2. Grades benutzen.

Wenn eine Fläche F^2 und zwei Geraden u, u_1 vorliegen, so rufen die Tangenten jener, welche diese treffen, auf ihnen eine Korrespondenz [2, 2] hervor und erzeugen deshalb eine Regelfläche 4. Grades, welche die beiden Geraden zu doppelten Leitgeraden hat (Nr. 164). Denn die Tangenten aus einem Punkte von u oder u_1, welche die andere Gerade treffen, sind die Tangenten an den Kegelschnitt, in welchem F^2 von der Ebene geschnitten wird, die den Punkt mit u_1 oder u verbindet. Man sieht sofort, wie die Verzweigungs- und Doppelpunkte der Korrespondenz zustande kommen. Die Verzweigungspunkte auf u sind die Schnitte A, B mit F^2 und die Punkte C, D, in denen u von den Berührungsebenen α_1, β_1, die von u_1 kommen, geschnitten wird. Zugehörige Doppelpunkte sind die Schnitte $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1$ der Berührungsebenen von A, B mit u_1 und die Punkte [illegible]$_1$, in denen die nach C, D gehenden Tangenten in α_1, β_1 die effen. In gleicher Weise sind auf u_1 die Schnitte C_1, D_1 mit

F^2 und A_1, B_1 mit den Berührungsebenen γ, δ durch u die Verzweigungspunkte und $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ die zugehörigen Doppelpunkte.

Eine Korrespondenz [2, 2] ist durch acht Paare entsprechender Elemente (in allgemeiner Lage) eindeutig bestimmt (Nr. 156). Liegt also eine solche Korrespondenz [2, 2] zwischen zwei Punktreihen u, u_1 vor, so sei an acht beliebige Erzeugenden der Regelfläche 4. Grades P^4, zu der sie führt, eine Fläche 2. Grades F^2 tangential gelegt; es gibt ∞^1 Flächen 2. Grades, welche diese Berührungen erfüllen. Die Korrespondenz [2, 2], welche diese Fläche F^2 auf u, u_1 hervorruft, ist mit der gegebenen identisch, und die Verzweigungs- und Doppelpunkte ergeben sich in der obigen Weise. Alle Erzeugenden von P^4 sind daher Tangenten der F^2.

Es seien a, b, c_1, d_1 die Geraden aus der einen Regelschar von F^2 durch A, B, C_1, D_1 und a', b', c_1', d_1' diejenigen aus der andern und es sei $\gamma = ba'$, $\delta = ab'$, $\alpha_1 = d_1 c_1'$, $\beta_1 = c_1 d_1'$.

Die Ebenenwürfe, welche a, b, c_1, d_1 aus c_1', d_1', a', b' projizieren, sind projektiv; wir schneiden sie mit u, bzw. u_1 und erhalten:

$$AB\mathfrak{C}C \barwedge ABD\mathfrak{D} \barwedge \mathfrak{A}_1 A_1 C_1 D_1 \barwedge B_1 \mathfrak{B}_1 C_1 D_1 \barwedge g(a, b, c_1, d_1),$$

wo g irgend eine Gerade aus der Regelschar $a', b', \ldots$ ist.

$A\mathfrak{A}_1$, $B\mathfrak{B}_1$, $C_1\mathfrak{C}$, $D_1\mathfrak{D}$ sind Tangenten der Fläche in A, B, C_1, D_1; folglich sind $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}_1, C_1, D_1$ die Schnitte der Polarebenen der Punkte $A, B, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ von u mit der Gerade u_1; daher ist:

$$AB\mathfrak{C}\mathfrak{D} \barwedge \mathfrak{A}_1 \mathfrak{B}_1 C_1 D_1;$$

weil eine Polreihe und der zugehörige Polarebenen-Büschel in bezug auf eine Fläche 2. Grades projektiv sind.

Aus den obigen Projektivitäten folgt:

$$(AB\mathfrak{C}C) \cdot (ABD\mathfrak{D}) = (\mathfrak{A}_1 A_1 C_1 D_1) \cdot (B_1 \mathfrak{B}_1 C_1 D_1),$$

was sich umformen läßt in:

$$\frac{(AB\mathfrak{C}\mathfrak{D})}{(ABCD)} = \frac{(\mathfrak{A}_1 \mathfrak{B}_1 C_1 D_1)}{(A_1 B_1 C_1 D_1)};$$

also ist:

$$(ABCD) = (A_1 B_1 C_1 D_1);$$

womit die Gleichheit der Doppelverhältnisse der beiden Würfe der Verzweigungselemente bewiesen ist.

Wir schneiden ferner die nach a, b, c_1, d_1 gehenden Berührungsebenen der Tangentialkegel von F^2 aus A_1, B_1 mit den Tangenten u, g dieser Kegel und die der Tangentialkegel aus C, D mit u_1, g; u liegt z. B. bei dem Kegel aus A_1 in der Berührungsebene $A_1 b = ba' = \gamma$, ihr Berührungspunkt ist $\mathfrak{A}$; denn der von γ mit F^2 liegt auf $A_1\mathfrak{A}$. Wir haben dann:

$$A\mathfrak{A}DC \barwedge \mathfrak{B}BDC \barwedge B_1 A_1 C_1 \mathfrak{C}_1 \barwedge B_1 A_1 \mathfrak{D}_1 D_1 \barwedge g(a, b, c_1, d_1);$$

so daß auch diese Würfe mit den obigen projektiv sind; z. B.:

$$A\mathfrak{A}DC \barwedge \mathfrak{A}_1A_1C_1D_1.$$

Infolgedessen kann die Projektivität der Verzweigungspunkte auch noch auf die Doppelpunkte ausgedehnt werden:

$$ABCD\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D} \barwedge A_1B_1C_1D_1\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_1;$$

denn wir haben:

$\mathfrak{A}_1A_1C_1D_1 \barwedge A\mathfrak{A}DC \barwedge \mathfrak{A}ACD$, $B_1\mathfrak{B}_1C_1D_1 \barwedge \mathfrak{B}BDC \barwedge B\mathfrak{B}CD$, usw.

Ferner ist:

$$ABCD \barwedge B_1A_1D_1C_1;$$

auch das läßt sich erweitern in:

$$ABCD\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D} \barwedge B_1A_1D_1C_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{A}_1\mathfrak{D}_1\mathfrak{C}_1;$$

denn wir haben:

$A\mathfrak{A}DC \barwedge B_1\mathfrak{B}_1C_1D_1$, $\mathfrak{B}BDC \barwedge \mathfrak{A}_1A_1C_1D_1$, $AB\mathfrak{C}C \barwedge B_1A_1\mathfrak{D}_1D_1$,

$$ABD\mathfrak{D} \barwedge B_1A_1C_1\mathfrak{C}_1.$$

Und ebenso ergeben sich die beiden andern Projektivitäten.

Sodann folgt aus:

$$ABD\mathfrak{D} \barwedge AB\mathfrak{C}C \barwedge BAC\mathfrak{C}$$

und aus:

$$A\mathfrak{A}DC \barwedge \mathfrak{B}BDC \barwedge B\mathfrak{B}CD,$$

daß:

$$AB,\quad CD,\quad \mathfrak{A}\mathfrak{B},\quad \mathfrak{C}\mathfrak{D}$$

in Involution sind und ebenso:

$$A_1B_1,\quad C_1D_1,\quad \mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1,\quad \mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_1.$$

Und ähnlich erhält man je die beiden andern Involutionen auf u und u_1[1]).

Von den drei Involutionen auf derselben Gerade transformiert jede die beiden andern in sich selbst, so daß sie ein Tripel sich stützender Involutionen bilden (Nr. 85).

Daraus folgt, daß eine Involution: $A\mathfrak{A}$, $B\mathfrak{B}$, $C\mathfrak{C}$, $D\mathfrak{D}$ nicht möglich ist; denn diese würde alle drei in sich transformieren; das tut aber für je zwei von jenen dreien nur die dritte.

Die Punktreihe auf einem Kegelschnitte K^2 und der Tangentenbüschel um einen andern K_2' in derselben Ebene befinden sich, wenn inzidente Elemente einander zugeordnet werden, in einer Korrespondenz [2, 2] (Nr. 167). Verzweigungspunkte in der Punktreihe sind die vier gemeinsamen Punkte A, B, C, D, Verzweigungsstrahlen im Tangentenbüschel die gemeinsamen Tangenten a', b', c', d'. Dies

---

1) Journal f. Math., Bd. 101, S. 172 und Liniengeometrie, Bd. III, S. 118 ff.

können wir als einen Beweis für die Anzahl der gemeinsamen Punkte oder Tangenten ansehen; und verallgemeinern wir auf zwei unikursale Kurven n^{ter} Ordnung und n'^{ter} Klasse, die, wegen des Geschlechts 0, von der Klasse $2(n-1)$, bzw. der Ordnung $2(n'-1)$ sind, so liefern die $n \cdot 2(n'-1)$ gemeinsamen Punkte und die $n' \cdot 2(n-1)$ gemeinsamen Tangenten die Verzweigungselemente. Aber kehren wir zu den Kegelschnitten zurück. Doppelstrahlen im Tangentenbüschel sind die Tangenten $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$, $\mathfrak{d}'$ von K_2' in den gemeinsamen Punkten, Doppelpunkte in der Punktreihe die Berührungspunkte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ der gemeinsamen Tangenten mit K^2.

Daher bestehen zwischen diesen acht Punkten von K^2 und acht Tangenten von K_2' vier Projektivitäten, z. B.:

$$ABCD\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D} \barwedge a'b'c'd'\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'\mathfrak{d}'.$$

Heben wir insbesondere hervor, daß der Wurf der gemeinsamen Punkte von zwei Kegelschnitten, dem einen, und der Wurf der gemeinsamen Tangenten, dem andern zugerechnet, (in vier Weisen) projektiv sind.

Jeder von den beiden Würfen stimmt andererseits im Doppelverhältnis überein mit dem Wurf der zugehörigen Tangenten, bzw. der zugehörigen Berührungspunkte (Nr. 103). Ferner hat der Wurf der vier Grundpunkte eines Kegelschnitt-Büschels, den verschiedenen Kegelschnitten zugerechnet, lauter verschiedene Doppelverhältnisse; denn dies Doppelverhältnis ist $A(a, B, C, D)$, wenn a die von Kurve zu Kurve sich ändernde Tangente von A ist. Folglich sind das Doppelverhältnis der Punkte A, B, C, D auf K^2 und dasjenige der Tangenten $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$, $\mathfrak{d}'$ von K_2', also das der nämlichen Punkte, aber auf K_2', verschieden und unabhängig voneinander, da K_2' ein beliebiger zweiter Kegelschnitt durch diese vier Punkte ist.

Die Doppelverhältnisse der vier Verzweigungspunkte und der zugehörigen Doppelstrahlen sind ungleich und unabhängig voneinander.

Aus der Gleichheit der Doppelverhältnisse der vier gemeinsamen Punkte und der vier gemeinsamen Tangenten folgt, daß gleichartige gemeinsame Punkte (alle reell oder alle imaginär) mit gleichartigen gemeinsamen Tangenten und ungleichartige (zwei reelle und zwei imaginäre) mit ungleichartigen verbunden sind.

Für die Kurve $(n+n_1)^{ter}$ Ordnung, welche durch zwei 176
Strahlenbüschel U, U_1 erzeugt wird, die sich in einer Korrespondenz $[n, n_1]$ befinden, sind die Verzweigungsstrahlen, $2n(n_1-1)$ im Büschel U und $2n_1(n-1)$ in U_1, die von U, bzw. U_1 kommenden und anderwärts berührenden Tangenten der

Kurve, und die zugehörigen Doppelstrahlen gehen je aus dem andern Punkte nach den Berührungspunkten.

In der Tat, wegen der beiden vielfachen Punkte ist die Klasse der Kurve

$$(n + n_1)(n + n_1 - 1) - n(n - 1) - n_1(n_1 - 1) = 2nn_1.$$

Unter den $2nn_1$ Tangenten durch U zählen die n eigenen Tangenten dieses Punktes doppelt; es bleiben $2n(n_1 - 1)$ andere.

Im Falle $n = n_1 = 2$ sind beidemal 4 Tangenten.

Jede Kurve 4. Ordnung mit zwei Doppelpunkten bringt zwischen den Büscheln um sie eine Korrespondenz [2, 2] hervor; also sind bei ihr die Würfe der Tangenten aus den Doppelpunkten projektiv und jede der vier Projektivitäten erstreckt sich auch auf die Strahlen, die nach den Berührungspunkten der andern Tangenten gehen.

Die ebene Kurve 4. Ordnung muß zwei Doppelpunkte haben. um so erzeugt werden zu können; aber jede allgemeine ebene Kurve 3. Ordnung C^3 kann so erzeugt werden, wenn man eine gewisse Spezialität eintreten läßt.

Wenn nämlich die Büschelscheitel U, U_1 in beliebige Punkte der C^3 gelegt werden, so entsteht, weil jeder Strahl durch U oder U_1 die Kurve noch zweimal trifft, eine Korrespondenz [2, 2] zwischen den Büscheln, aber mit folgender besondern Eigenschaft. Wenn U' der dritte Schnitt von UU_1 mit C^3 ist, so entsprechen dem Strahle UU_1 von U in U_1 die Tangente $U_1 U_1$ in U_1 und der Strahl $U_1 U'$; d. i. $U_1 U$. Folglich entspricht der Verbindungsstrahl der Scheitel sich selbst und gehört zum Erzeugnis 4. Ordnung, und auf dem vollen Erzeugnisse sind, wie notwendig, U, U_1 doppelt; eigentliches Erzeugnis ist die Kurve 3. Ordnung, welche also aus jeden zwei ihrer Punkte so erzeugt werden kann. Wegen des sich selbst entsprechenden Strahles nennt man die in Korrespondenz [2, 2] befindlichen Büschel in halb perspektiver Lage; UU_1 hat sich je mit dem einen der beiden entsprechenden Strahlen vereinigt, der andere ist die Tangente in U_1, bzw. U.

Die Verzweigungsstrahlen sind die je von U, U_1 ausgehenden anderwärts berührenden Tangenten, und da U, U_1 beliebige Punkte auf C^3 sind, so erweist sich das Doppelverhältnis der vier von einem Punkte der Kurve ausgehenden Tangenten als konstant[1]).

---

1) Setzt man diesen Satz aus der Theorie der ebenen Kurve 3. Ordnung als bekannt voraus, so kann man ihn zum Beweise unseres jetzigen Satzes über die Verzweigungselemente einer [2, 2] benutzen, indem man erwägt, daß bei

So erhält jede ebene Kurve 3. Ordnung eine Invariante, das Doppelverhältnis des Tangentenwurfs; und man kann bei den Doppelverhältnissen -1 und $\frac{1}{2}(1 \pm i\sqrt{3})$ von harmonischen und äquianharmonischen Kurven 3. Ordnung sprechen.

Bei der Regelfläche vom Grade $n + n_1$, welche durch zwei in einer Verwandtschaft $[n, n_1]$ befindliche Punktreihen erzeugt wird (Nr. 164), enthält jede der beiden Leitgeraden u, u_1 eine Anzahl von Verzweigungspunkten, $2n(n_1 - 1)$, bzw. $2n_1(n - 1)$. Von den n_1 Erzeugenden, die von einem Verzweigungspunkte der u ausgehen nach den entsprechenden Punkten auf u_1, haben sich zwei in eine sogenannte Kuspidalerzeugende oder Torsallinie[1]) vereinigt; der Begegnungspunkt mit u_1 ist der zugehörige Doppelpunkt. Als ausgezeichnete Punkte der Fläche heißen die Verzweigungspunkte Kuspidalpunkte (Spitzen).

Bei der durch eine [2, 2] erzeugten Regelfläche 4. Grades haben wir wieder die vier Projektivitäten der acht ausgezeichneten Punkte der einen und der acht der andern Leitgerade (Nr. 175).

Wenn die Korrespondenz $[n, n_1]$ zwischen zwei Strahlenbüscheln die besondere Eigenschaft hat, daß zwei Strahlen vorhanden sind, von denen jeder Verzweigungsstrahl und der andere der zugehörige Doppelstrahl ist, dann haben beide mit der erzeugten Kurve $(n + n_1)^{\text{ter}}$ Ordnung in ihrem Schnittpunkte zwei vereinigte Punkte gemeinsam, wodurch dieser ein Doppelpunkt der Kurve wird. Es gibt dann aus jedem der beiden Scheitel zwei Tangenten weniger, welche anderwärts berühren, also zwei Verzweigungsstrahlen weniger. Der ausgezeichnete Strahl zählt demnach als Verzweigungsstrahl doppelt und daher auch als Doppelstrahl.

Zwei Elemente einer Korrespondenz $[n, n_1]$, von denen jedes Verzweigungs- und das andere das zugehörige Doppelelement ist, zählen für zwei Verzweigungselemente und zwei Doppelelemente.

Für die Regelfläche $(n + n_1)^{\text{ten}}$ Grades, welche durch eine Korrespondenz $[n, n_1]$ zweier Punktreihen mit dieser Eigenschaft entsteht, ist die Verbindungslinie der ausgezeichneten Punkte doppelte Erzeugende; und jede von den beiden Leitgeraden hat zwei Kuspidalpunkte weniger.

---

zwei Büscheln in Korrespondenz [2, 2] die Drehung des einen, durch welche der Verbindungsstrahl sich selbst entsprechend wird, am Doppelverhältnisse der Verzweigungsstrahlen nichts ändert.

1) So genannt, weil eine derartige Erzeugende die nächst folgende trifft und sich daher so verhält, wie bei einer abwickelbaren Fläche, einem Torsus (Nr. 161), jede Erzeugende.

§ 28. Sätze über eindeutig bezogene Örter 1. Stufe.

177 Es liegen zwei Kurven von den Ordnungen n_1, n_2 vor, deren Elemente eindeutig aufeinander bezogen sind. Wir fragen nach der Regelfläche der Verbindungslinien entsprechender Punkte. In einem Ebenenbüschel entsteht eine Korrespondenz $[n_2, n_1]$, wenn solche Ebenen zugeordnet werden, welche nach entsprechenden Punkten gehen. Die $n_1 + n_2$ Koinzidenzen lehren, daß von so vielen Paaren entsprechender Punkte beide Punkte und ihre Verbindungslinie in eine Ebene des Büschels fallen, also letztere die Axe trifft; die Regelfläche ist vom Grade $n_1 + n_2$.

Die Verbindungslinien der entsprechenden Punkte zweier eindeutig bezogener Kurven von den Ordnungen n_1, n_2, dual die Schnittlinien entsprechender Tangentialebenen zweier eindeutig bezogener Torsen von den Klassen n_1', n_2' erzeugen eine Regelfläche vom Grade $n_1 + n_2$, bzw. $n_1' + n_2'$.

Jedes etwa vorhandene sich selbst entsprechende Element (Punkt, Ebene) vermindert den Grad um 1.

Liegen die beiden Kurven in der nämlichen Ebene, so umhüllen die Verbindungslinien eine Kurve von der Klasse $n_1 + n_2$, und die Schnittpunkte entsprechender Tangenten erzeugen, wenn n_1', n_2' die Klassen sind, eine Kurve von der Ordnung $n_1' + n_1'$ (Nr. 167).

Fügen wir noch eine dritte Kurve von der Ordnung n_3 und der Klasse n_3' in derselben Ebene hinzu, welche auch eindeutig auf die früheren bezogen ist, so kann man fragen, wie oft drei entsprechende Punkte in gerader Linie liegen oder drei entsprechende Tangenten in einen Punkt zusammenlaufen.

Wir wollen den zweiten Fall nehmen. Auf einer Tangente der ersten Kurve seien dann die beiden Schnitte mit den entsprechenden Tangenten zugeordnet und aus einem Punkte O der Ebene projiziert, so ergeben die beiden Kurven von den Ordnungen $n_1' + n_2'$, $n_1' + n_3'$ die im Büschel O entstehende Korrespondenz $(n_1' + n_3', n_1' + n_2')$; von ihren Koinzidenzen sind n_1' die Tangenten aus O an die erste Kurve, die übrigen gehen nach den gesuchten Konkurrenzpunkten.

Bei drei eindeutig bezogenen Kurven derselben Ebene von den Ordnungen n_1, n_2, n_3 und den Klassen n_1', n_2', n_3' liegen $(n_1 + n_2 + n_3)$-mal entsprechende Punkte in gerader Linie und sind $(n_1' + n_2' + n_3')$-mal entsprechende Tangenten konkurrent.

Bei den Kurven (n_1, n_1') und (n_2, n_2') derselben Ebene sind $(n_1 + n_2')$-mal ein Punkt der ersten und die entsprechende Tangente an die zweite inzident.

Die Kurve, von der Klasse $n_1 + n_2$, der Verbindungslinien entsprechender Punkte lehrt uns, daß auf einer beliebigen Gerade l durch die Schnitte einer Tangente der zweiten Kurve und der Verbindungslinie ihres Berührungspunktes mit dem entsprechenden Punkte der ersten eine Korrespondenz $[n_1 + n_2, n_2']$ entsteht; von den Koinzidenzen sind n_2 die Schnitte der l mit der zweiten Kurve, die übrigen $n_1 + n_2'$ beweisen die Behauptung.

Wenn eine Kurve von der Ordnung n_1 und eine Regelfläche vom Grade n_2' in eindeutiger Beziehung ihrer Elemente stehen, so umhüllen die Verbindungsebenen entsprechender Punkte und Geraden einen Torsus von der Klasse $n_1 + n_2'$.

Denn der Kegel n_1^{ter} Ordnung, der die Kurve aus einem beliebigen Punkte O projiziert, und der Kegel $n_2'^{\text{ter}}$ Klasse aus O an die Regelfläche, der eingehüllt wird von den Ebenen, welche O mit den Erzeugenden verbinden, befinden sich auch in eindeutiger Beziehung; also fällt $(n_1 + n_2')$-mal eine Kante des ersteren und der Punkt der Kurve, nach dem sie geht, in die Ebene nach der entsprechenden Gerade der Regelfläche.

Analog liefern ein Torsus von der Klasse n_1' und eine Regelfläche vom Grade n_2, die in eindeutiger Beziehung stehen, durch die Schnitte entsprechender Ebenen und Geraden eine Kurve von der Ordnung $n_1' + n_2$.

Befinden sich eine Kurve von der Ordnung n_1 und ein Torsus von der Klasse n_2' in eindeutiger Beziehung, so fällt $(n_1 + n_2')$-mal ein Punkt der Kurve in die entsprechende Ebene des Torsus.

Der Fall einer ebenen Kurve ist schon erledigt; denn bei ihr handelt es sich nur um den Schnitt des Torsus mit ihrer Ebene. Es sei n_1' die Klasse der Raumkurve oder ihres Schmiegungsebenen-Torsus. Die beiden Torsen erzeugen eine Regelfläche vom Grade $n_1' + n_2'$, die eindeutig auf sie und die Kurve bezogen ist; daher umhüllen die Verbindungsebenen ihrer Geraden mit den entsprechenden Punkten der Kurve einen Torsus von der Klasse $n_1 + n_1' + n_2'$. Diese Verbindungsebenen sind, wofern die verbundenen Elemente nicht inzidieren, die Schmiegungsebenen der Kurve, deren Torsus die Klasse n_1' hat; folglich treten $n_1 + n_2'$ solche Inzidenzen ein, welche dann je einen Ebenenbüschel liefern. Jede sagt aus, daß ein Punkt der Kurve auf die entsprechende Ebene des gegebenen Torsus fällt.

Man kann auch, wenn r_1 der Rang der Kurve ist, die abwickelbare Regelfläche r_1^{ter} Ordnung ihrer Tangenten benutzen; die Schnittpunkte ihrer Erzeugenden mit den entsprechenden Ebenen des Torsus geben eine Kurve von der Ordnung $r_1 + n_2'$. Wir stellen dann in einem Ebenenbüschel die Korrespondenz $[r_1 + n_2', n_1]$ her, in welcher die

Ebenen zugeordnet sind, die nach einem Punkte der gegebenen Kurve und nach dem entsprechenden dieser neuen Kurve gehen; r_1 der Koinzidenzen rühren von den Tangenten der ersteren her, welche die Büschelaxe treffen; die andern beweisen die Behauptung.

Wenn drei Kurven von den Ordnungen n_1, n_2, n_3 gegeben sind, die in eindeutiger Beziehung stehen, so umhüllen die Verbindungslinien entsprechender Punkte einen Torsus von der Klasse $n_1 + n_2 + n_3$.

Wir haben zunächst durch die beiden ersten Kurven eine Regelfläche vom Grade $n_1 + n_2$ und durch diese und die dritte Kurve den Torsus.

Tritt nun noch eine vierte Kurve von der Ordnung n_4 hinzu, auch auf jene eindeutig bezogen, so ist sie auch auf den Torsus eindeutig bezogen, den die drei ersten liefern; also fällt $(n_1 + n_2 + n_3 + n_4)$-mal ein Punkt auf ihr in die entsprechende Ebene des Torsus, d. h. mit den drei entsprechenden Punkten auf den andern Kurven in eine Ebene.

Bei vier eindeutig bezogenen Kurven von den Ordnungen n_1, n_2, n_3, n_4 fallen $(n_1+n_2+n_3+n_4)$-mal entsprechende Punkte in dieselbe Ebene.

§ 29. Projektive Involutionen. Direktionskurve. Involutorische Elemente.

178 Das Charakteristische für eine solche Korrespondenz $[n, n_1]$, welche eine Projektivität zweier Involutionen n^{ten} und n_1^{ten} Grades ist (Nr. 169, 171), besteht darin, daß die n_1 Elemente des zweiten Gebildes u_1, die einem Elemente von u entsprechen und in u_1 eine Gruppe der Involution n_1^{ten} Grades bilden, sämtlich auch jedem der $n-1$ übrigen Elemente von u korrespondieren, welche die Gruppe der Involution n^{ten} Grades vervollständigen, zu der jenes Element gehört.

Ermitteln wir die Bedingung, unter welcher eine Korrespondenz [2, 2] eine solche Projektivität wird, und sehen wir zunächst zu, was eintritt, wenn wenigstens einmal zwei Elementen von u, mit den Parametern x', x'', dieselben beiden Elemente in u_1 entsprechen. Die Korrespondenzgleichung, nach x_1 geordnet, ist:

$$(a_{22}x^2 + a_{12}x + a_{02})x_1^2 + (a_{21}x^2 + a_{11}x + a_{01})x_1 + (a_{20}x^2 + a_{10}x + a_{00}) = 0.$$

Die Gleichungen in x_1, welche sich ergeben, wenn x' oder x'' für x eingesetzt wird, sollen dieselben Wurzeln haben; das erfordert, daß

die Koeffizienten der einen denen der andern proportional sind:

$$\alpha)\quad \begin{cases} \dfrac{a_{21}x'^2 + a_{11}x' + a_{01}}{a_{22}x'^2 + a_{12}x' + a_{02}} = \dfrac{a_{21}x''^2 + a_{11}x'' + a_{01}}{a_{22}x''^2 + a_{12}x'' + a_{02}}, \\[2ex] \dfrac{a_{20}x'^2 + a_{10}x' + a_{00}}{a_{22}x'^2 + a_{12}x' + a_{02}} = \dfrac{a_{20}x''^2 + a_{10}x'' + a_{00}}{a_{22}x''^2 + a_{12}x'' + a_{02}}. \end{cases}$$

Wenn die Nenner entfernt und alles nach links gebracht wird, so lassen sich beide Gleichungen mit $x' - x''$ dividieren, was erlaubt ist, da $x' \gtrless x''$; es ergibt sich:

$$\beta)\quad \begin{cases} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x'x'' + (a_{01}a_{22} - a_{02}a_{21})(x' + x'') + (a_{01}a_{12} - a_{02}a_{11}) = 0, \\ (a_{10}a_{22} - a_{12}a_{20})x'x'' + (a_{00}a_{22} - a_{02}a_{20})(x' + x'') + (a_{00}a_{12} - a_{02}a_{10}) = 0. \end{cases}$$

Je nachdem x'' oder x' eliminiert wird, erhält man:

$$(a_{22}x'^2 + a_{12}x' + a_{02})\Delta = 0,$$
$$(a_{12}x''^2 + a_{12}x'' + a_{02})\Delta = 0,$$

worin:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{00}, & a_{01}, & a_{02} \\ a_{10}, & a_{11}, & a_{12} \\ a_{20}, & a_{21}, & a_{22} \end{vmatrix}$$

ist. Folglich sind entweder die beiden Klammern null; oder $\Delta = 0$. Im ersteren Falle werden die Gleichungen α) dadurch befriedigt, daß beide Seiten ∞ werden; damit wird die gewünschte Proportionalität nicht erfüllt; da diese aber vorausgesetzt wird, so muß $\Delta = 0$ sein. Ist das aber der Fall, so sind die Koeffizienten der einen Gleichung β) zu denen der andern Gleichung proportional; denn die beiden Proportionen, welche dies ausdrücken, lassen sich leicht in $\Delta = 0$ umformen. Die beiden Gleichungen sind also nicht verschieden. Jedes von den ∞^1 Wertepaaren x', x'', welches der einen genügt, genügt auch der andern; aus den beiden β) folgen aber rückwärts die α), und aus diesen folgt, daß zwei solche x', x'' zu denselben Wurzeln der Gleichung in x_1 führen. Die eine Gleichung β), etwa die obere, die allein notwendig ist, ist nun in bezug auf x', x'' bilinear und symmetrisch; damit ist gesagt, daß die zugehörigen Elemente in u eine Involution durchlaufen; und die beiden Elemente von u_1, die je zwei so zusammengehörigen Elementen entsprechen, erzeugen auch eine Involution, deren Relation man erhält, wenn man in der obigen Betrachtung die beiden Gebilde, also vordere und hintere Zeiger, x und x_1, vertauscht; dadurch ergibt sich:

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x_1'x_1'' + (a_{10}a_{22} - a_{20}a_{12})(x_1' + x_1'') + (a_{10}a_{21} - a_{20}a_{11}) = 0.$$

Somit ist

$$\Delta = 0$$

die Bedingung dafür, daß eine Korrespondenz [2, 2] mit der obigen Verwandtschaftsgleichung eine Projektivität von zwei Involutionen ist[1]). Da nur eine Gleichung zu erfüllen ist, so ist es eine einfache Bedingung; wie wir sofort noch auf eine andere Weise erkennen werden. Wir gingen davon aus, daß einmal zwei Elementen des einen Gebildes dieselben zwei im andern entsprechen; das erforderte $\Delta = 0$, und daraus folgte, daß es im ersten Gebilde ∞^1 solche Paare gibt, die eine Involution bilden; zu jedem Elemente gehört dann ein anderes, das mit ihm dieselben entsprechenden Elemente hat. Also:

Wenn einmal bei einer Korrespondenz [2, 2] zwei verschiedenen Elementen des einen Gebildes dieselben zwei Elemente im andern korrespondieren, so korrespondieren durchweg die beiden einem Elemente des einen Gebildes entsprechenden Elemente des andern demselben zweiten Elemente jenes Gebildes: es liegt Projektivität zweier Involutionen vor.

Wird auf jeden der Parameter x und x_1 in der Verwandtschaftsgleichung eine lineare Substitution angewandt, wodurch die neuen Koeffizienten $a'_{22}, \ldots$ lineare Funktionen der alten und quadratische Funktionen sowohl der Koeffizienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ der einen Substitution, als derjenigen $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1$ der andern werden, so ergibt sich:

$$\Delta' = \Delta \cdot (\alpha\delta - \beta\gamma)^2 \cdot (\alpha_1\delta_1 - \beta_1\gamma_1)^2,$$

die Invariantenrelation für Δ.

Das anschaulichste Beispiel einer solchen Projektivität zweier Involutionen erhält man, wenn man zwei Kegelschnitte mit projektiven Strahlenbüscheln bzw. schneidet.

179 Auf zwei Geraden u und u_1 wird durch die Tangenten eines Kegelschnitts K eine Korrespondenz [2, 2] hervorgerufen. Wenn aber einmal die von zwei Punkten auf u an K gelegten Tangenten die Gerade u_1 in den nämlichen zwei Punkten treffen, so gibt es auf u eine Involution von Punktepaaren, der auf u_1 eine solche Involution projektiv zugeordnet ist. Die beiden Geraden sind dann konjugiert in bezug auf K, als Diagonalen von einem und dann ∞^1 dem Kegelschnitte umgeschriebenen Vierseiten. Und umgekehrt, aus der Konjugiertheit folgt diese Eigenschaft.

Ebenso, wenn von zwei Punkten U, U_1 einer ebenen Kurve 3. Ordnung zwei Strahlenpaare ausgehen, deren vier Schnittpunkte auf der Kurve liegen, so gehören diese Paare zu

---

1) de Jonquières, Mélanges de Géométrie pure (Paris 1856), S. 163.

zwei projektiven Involutionen 2. Grades, für deren entsprechende Paare dies durchweg gilt. Die Kurve ist das Erzeugnis projektiver Involutionen in halb perspektiver Lage (Nr. 176).

Hat U' dieselbe Bedeutung wie dort, so bilden auch $UU' \equiv UU_1$ mit der Tangente in U und $U_1U' \equiv UU_1$ mit der Tangente in U_1 zwei solche Paare; woraus folgt, daß die beiden Tangenten sich auf der Kurve schneiden und, nach der Terminologie bei den ebenen Kurven 3. Ordnung, U, U_1 konjugierte Punkte der Kurve sind.

Und umgekehrt, aus konjugierten Punkten wird die Kurve durch projektive Involutionen erzeugt.

Eine Involution vom Grade n_1 hat (Nr. 136) $2(n_1 - 1)$ Doppelelemente; darnach scheint die Projektivität zweier Involutionen n^{ten} und n_1^{ten} Grades weniger Doppelelemente zu haben, als ihr als Korrespondenz $[n, n_1]$ zukommen. Jedes dieser Doppelelemente gehört aber zu n Verzweigungselementen, nämlich zu allen n Elementen derjenigen Gruppe der Involution n^{ten} Grades, welche der das Doppelelement enthaltenden Gruppe der andern Involution entspricht; also zählt dieses n-fach und es ergibt sich die richtige Anzahl $2n(n_1 - 1)$.

Daraus folgt für eine durch zwei projektive (gemeine) Involutionen erzeugte Kurve 4. Ordnung die besondere Eigenschaft, daß von den vier Tangenten, die von einem der beiden Doppelpunkte ausgehen, zweimal zwei Berührungspunkte auf einem Strahle durch den andern liegen; und ähnliches gilt für konjugierte Punkte der Kurve 3. Ordnung.

Spezialisieren wir den Satz von Nr. 164 über die gemein- 180
samen Paare zweier Korrespondenzen zwischen denselben Gebilden für $n' = n_1' = 1$, so haben wir:

Es gibt bei einer Korrespondenz $[n, n_1]$ $n + n_1$ Paare von Elementen, die zugleich in einer Projektivität zwischen den nämlichen Gebilden entsprechend sind.

Die Elimination der einen Variabeln aus der Korrespondenzgleichung und der bilinearen Relation der Projektivität führt zu einer Gleichung vom Grade $n + n_1$ in der andern, aus der dieser Satz auch folgt.

Zwischen zwei Regelscharen (auf verschiedenen Trägerflächen) entsteht eine Korrespondenz [2, 2], wenn die einander schneidenden Geraden zugeordnet werden.

Daher gibt es bei zwei projektiven Regelscharen vier Paare sich schneidender entsprechender Geraden.

Liegen die beiden Gebilde ineinander, so gibt es $n + n_1$ Paare entsprechender Elemente der Korrespondenz, die in der Projektivität in dem einen Sinne, und $n + n_1$ Paare entsprechender Elemente, die

in ihr im andern korrespondieren. Ist aber die Projektivität involutorisch, so gilt:

Zwei ineinander liegende Gebilde, welche in einer Korrespondenz $[n, n_1]$ stehen, haben $n + n_1$ Paare entsprechender Elemente, welche zugleich in einer auf dem Träger befindlichen Involution gepaart sind.

Befinden sich die beiden Gebilde auf einem Kegelschnitte K (auf den sie eventuell von andern Trägern durch Projektion und Schnitt übertragen sind), so lehrt dieser Satz, weil ein Strahlenbüschel eine Involution einschneidet:

Die Verbindungslinien entsprechender Punkte umhüllen eine Kurve $\mathfrak{K}$ von der Klasse $n + n_1$; wir wollen sie die Direktionskurve der Korrespondenz nennen. Der bei der Projektivität sich ergebende Direktions-Kegelschnitt wurde in Nr. 106 erhalten.

Die von einem Punkte des K ausgehenden Tangenten der $\mathfrak{K}$ verbinden ihn mit den n_1 in dem einen Sinne und den n im andern Sinne entsprechenden Punkten.

Die $[n, n_1]$ auf K ruft in einem Strahlenbüschel O eine Korrespondenz $[2n, 2n_1]$ hervor, in welcher nach entsprechenden Punkten gehende Strahlen entsprechend sind. Ihre $2(n + n_1)$ Koinzidenzen sind die $n + n_1$ Tangenten der Direktionskurve aus O und die $n + n_1$ Strahlen nach den Koinzidenzen der $[n, n_1]$.

Verallgemeinern wir. Die Korrespondenz $[n, n_1]$ liege auf einer unikursalen Kurve m^{ter} Ordnung, so entsteht durch die Verbindungslinien entsprechender Punkte eine Regelfläche vom Grade $(n + n_1)(m - 1)$, die in eine Kurve von dieser Klasse ausartet, wenn die C^m eine ebene Kurve ist. Denn die in einem Ebenenbüschel hervorgerufene Korrespondenz $[mn, mn_1]$ erhält $n + n_1$ Koinzidenzen durch die gegebene Korrespondenz, deren Anzahl auch $n + n_1$ ist, weil der Träger unikursal ist, also zwischen ihm und etwa einem Kegelschnitte eine eindeutige Beziehung hergestellt werden kann (Nr. 163), durch welche die Korrespondenz in eine ebensolche, ihre Koinzidenzen in deren Koinzidenzen übergeführt werden. Die $(n + n_1)(m - 1)$ übrigen Koinzidenzen im Ebenenbüschel weisen auf ebensoviele Verbindungslinien entsprechender Punkte hin, welche die Axe des Büschels treffen, was den Grad der erzeugten Regelfläche gibt.

Kehren wir zum Kegelschnitte K als Träger zurück.

Durch jeden der $2n(n_1 - 1) + 2n_1(n - 1)$ Verzweigungspunkte der $[n, n_1]$ auf K gehen zwei unendlich nahe Tangenten an $\mathfrak{K}$; also sind sie Punkte der Direktionskurve.

Der Direktions-Kegelschnitt einer Projektivität auf K berührt diesen in den beiden Koinzidenzen (Nr. 107). Entsprechendes gilt hier. Es sei $C \equiv D_1$ ein Punkt auf K, der einem der $n + n_1$ Koin-

zidenzpunkte sehr nahe ist. Von den n_1 in dem einen Sinne entsprechenden Punkten ist einer, C_1, ihm sehr nahe; ebenso von den n im andern Sinne entsprechenden ist wiederum einer D sehr nahe. Es gehen also von ihm die beiden einander nahen Tangenten CC_1, $D_1 D$ an die Direktionskurve und $n + n_1 - 2$ weitere. Wenn wir den Punkt dem Koinzidenzpunkt immer mehr nähern, so nähern sich jene beiden Tangenten einander und der Tangente des Koinzidenzpunktes an K; ihr Schnittpunkt wird ein Punkt von $\mathfrak{K}$ und seine Tangente an diese Kurve ist die von K.

In den $n + n_1$ Koinzidenzen berührt die Direktionskurve den Träger-Kegelschnitt.

Die Verzweigungspunkte und die Koinzidenzpunkte sind aber die einzigen Punkte, welche K und $\mathfrak{K}$ gemeinsam haben; folglich ergibt sich als Ordnung von $\mathfrak{K}$:

$$\tfrac{1}{2}\{2n(n_1 - 1) + 2n_1(n - 1) + 2(n + n_1)\} = 2nn_1,$$

also 2, wenn $n = n_1 = 1$.

Wenn eine der Zahlen n, n_1, etwa $n_1 = 1$ ist, dann ist der Tangentenbüschel von $\mathfrak{K}$ eindeutig auf die „eindeutige" Punktreihe von K bezogen, also $\mathfrak{K}$, wie K, vom Geschlechte 0.

Bei ineinanderliegenden Gebilden liegt die Möglichkeit involuto- 181
risch, d. h. in beiderlei Sinne einander entsprechender Elemente vor. Bei der Projektivität $n = n_1 = 1$ ergab sich, daß ein solches — im allgemeinen nicht vorhandenes — involutorisches Paar sofort die ganze Beziehung involutorisch macht. Jetzt ist es anders.

Der Träger der Korrespondenz sei eine Gerade u; aus zwei Punkten O', O'' (in einer Ebene durch u) projizieren wir und zwar die erste Punktreihe aus O', die andere aus O''; die Strahlenbüschel kommen selbst in eine Korrespondenz $[n, n_1]$ und erzeugen eine Kurve von der Ordnung $n + n_1$, die O zum n-, O' zum n_1-fachen Punkte hat. Ist nun Y, Z ein involutorisches Paar auf u, so liegt sowohl der Punkt $X = (O'Y, O''Z)$, als auch der Punkt $X_1 = (O'Z, O''Y)$ auf dieser Kurve, jedes involutorische Paar führt also zu zwei Punkten der Kurve. Wir projizieren nun die erste Reihe aus O'', die zweite aus O', wodurch auf der neuen Kurve O' n_1-fach, O'' n-fach wird. Beide Kurven haben diese vielfachen Punkte und die Koinzidenzen gemeinsam, also noch

$$(n + n_1)^2 - 2nn_1 - (n + n_1) = n(n_1 - 1) + n_1(n_1 - 1)$$

Punkte. Ist X einer von diesen, so sind die Schnitte von $O'X$ und $O''X$ mit u entsprechend in der ersten und zweiten Reihe, aber auch in der zweiten und ersten; daher bilden sie ein involutorisches Paar; das liefert aber noch einen zweiten Punkt X_1, der auch den beiden Kurven gemeinsam sein muß.

Zwei ineinanderliegende Gebilde, die in einer Korrespondenz $[n, n_1]$ stehen, haben $\frac{1}{2}n(n-1)+\frac{1}{2}n_1(n_1-1)$ involutorische Paare[1].

Ist der Träger ein Kegelschnitt K, so werden die Verbindungslinien dieser Paare Doppeltangenten der Direktionskurve $\mathfrak{K}$.

Die Plückerschen Formeln (Nr. 162) lehren, daß die Klasse $n+n_1$, die Ordnung $2nn_1$ und so viele Doppeltangenten zur Zahl 0 der Wendetangenten führen; daß keine Wendetangenten auftreten, war vorauszusehen. Wenn $n_1=1$, ist die Zahl $\frac{1}{2}n(n-1)$; so viele Doppeltangenten geben der $\mathfrak{K}$ von der Klasse $n+1$ das Geschlecht 0.

Ist $n=n_1=1$, so ist die Anzahl 0; konjektive Gebilde besitzen kein involutorisches Paar. Ist aber doch eins vorhanden, so haben die Kurven $(n+n_1)^{\text{ter}}$ Ordnung, in diesem Falle Kegelschnitte, sechs Punkte gemeinsam: O', O'', die beiden Koinzidenzen und die beiden vom involutorischen Paare herrührenden, sind also identisch, und die ∞^1 gemeinsamen Punkte geben soviele involutorische Paare.

182 Wenn zwei Korrespondenzen $[n, n_1]$ und $[n', n_1']$ auf dem nämlichen Kegelschnitte K liegen, so haben sie erstens $nn_1'+n_1n'$ gemeinsame Paare entsprechender Punkte, weil das n-deutige Gebilde mit dem n'-deutigen denselben Träger hat und ebenso das n_1-deutige mit dem n_1'-deutigen (Nr. 164, 180), und zweitens $nn'+n_1n_1'$ gemeinsame Paare, weil auch das n-deutige mit dem n_1'-deutigen und das n_1-deutige mit dem n'-deutigen denselben Träger besitzt; die Verbindungslinien dieser Paare sind **die gemeinsamen Tangenten der beiden Direktionskurven.**

Für alle auf K gelegenen Korrespondenzen $[n, n_1]$ ist das (nn_1+n+n_1)-fach unendliche System der Direktionskurven so beschaffen, daß nn_1+n+n_1 gegebene Geraden von $2^{nn_1+n+n_1}$ dieser Kurven tangiert werden, weil von den beiden Schnittpunkten jeder dieser Geraden mit K jeder zur n-deutigen, der andere zur n_1-deutigen Punktreihe gerechnet werden kann. Wenn aber $n=n_1$, so ist mit 2 zu dividieren, weil da die beiden Fälle, daß die einen Schnittpunkte zur einen, die andern zur zweiten Punktreihe gerechnet werden und dann umgekehrt, sich nicht unterscheiden. Von den Direktionskurven $\mathfrak{K}$ der ∞^3 Projektivitäten auf K, oder von den ∞^3 Kegelschnitten, welche K doppelt berühren (Nr. 116), tangieren vier drei gegebene Geraden und gehen vier durch drei gegebene Punkte.

183 Bei einer Korrespondenz [2, 2] ineinander liegender Gebilde seien α, β die Parameter der Elemente eines involutorischen Paars; so ist sowohl:

$$1)\ a_{22}\alpha^2\beta^2+a_{21}\alpha^2\beta+a_{12}\alpha\beta^2+a_{11}\alpha\beta+a_{20}\alpha^2+a_{02}\beta^2 \\ +a_{10}\alpha+a_{01}\beta+a_{00}=0,$$

1) Emil Weyr, Journal f. Math., Bd. 74, S. 189.

als auch:

$$2)\ a_{22}\beta^2\alpha^2 + a_{21}\beta^2\alpha + a_{12}\beta\alpha^2 + a_{11}\beta\alpha + a_{20}\beta^2 + a_{02}\alpha^2 + a_{10}\beta + a_{01}\alpha + a_{00} = 0,$$

daher durch Subtraktion und Division mit $\alpha - \beta$, welches $\gtrless 0$ ist:

$$3)\ (a_{21} - a_{12})\alpha\beta + (a_{20} - a_{02})(\alpha + \beta) + a_{10} - a_{01} = 0;$$

folglich gehört das involutorische Paar zu der durch diese bilineare und symmetrische Gleichung definierten Involution, welche die der gegebenen Korrespondenz [2,2] ineinander liegender Gebilde verbundene Involution heißen möge.

Umgekehrt, aus 3) und einer der Gleichungen 1), 2) folgt die andere. Von jedem Paare dieser Involution 3), dessen Elemente in [2,2] in dem einen Sinne entsprechend sind, sind sie es auch im andern; es ist ein involutorisches Paar. Deren hat die [2,2] zwei Paare (Nr. 181), während andererseits der [2, 2] und der Involution vier Paare gemeinsam sind (Nr. 180); also zählen die involutorischen Paare der [2, 2] als gemeinsame Paare dieser Korrespondenz mit der ihr verbundenen Involution doppelt, wie das ja zu erwarten war.

Nehmen wir an, die Korrespondenz [2, 2] habe drei involutorische Paare $\alpha_1\beta_1$, $\alpha_2\beta_2$, $\alpha_3\beta_3$ und zwar in allgemeiner Lage, d. h. nicht zu derselben Involution gehörig; dann ist (Nr. 135):

$$\begin{vmatrix} \alpha_1\beta_1, & \alpha_1 + \beta_1, & 1 \\ \alpha_2\beta_2, & \alpha_2 + \beta_2, & 1 \\ \alpha_3\beta_3, & \alpha_3 + \beta_3, & 1 \end{vmatrix} \gtrless 0.$$

Für die drei Paare muß 3) gelten; diese drei in $a_{21} - a_{12}$, $a_{20} - a_{02}$, $a_{10} - a_{01}$ linearen Gleichungen mit nicht verschwindender Determinante fordern dann, daß die genannten drei Größen 0 sind:

$$a_{21} = a_{12},\ a_{20} = a_{02},\ a_{10} = a_{01}.$$

Dann wird die Korrespondenzgleichung für die [2,2] symmetrisch; wir werden uns bald überzeugen, daß es sich in diesem Falle um eine durchweg involutorische Korrespondenz handelt. Also drei beliebige involutorische Paare bewirken eine solche Korrespondenz [2, 2], und die verbundene Involution ist nicht vorhanden (oder unbestimmt).

Gehören aber die drei Paare zur nämlichen Involution, so hat die Korrespondenz [2, 2] mit dieser verbundenen Involution $2 \cdot 3$ Paare gemeinsam, oder die Gleichung 4. Grades (Nr. 180) sechs Wurzeln, ist also eine Identität, und jeder Parameterwert führt zu einem gemeinsamen Paare der [2, 2] und der verbundenen Involution. Diese ist in jener enthalten; die linke Seite der Gleichung der Korrespondenz zerfällt in die der Involution und einen zweiten bilinearen, aber im

allgemeinen unsymmetrischen Faktor, also die Korrespondenz in eine Involution und eine nichtinvolutorische Konjektivität; von den beiden einem Elemente zugeordneten Elementen ist ihm eins involutorisch, das andere nichtinvolutorisch zugeordnet; weshalb man diese zerfallende Korrespondenz halbinvolutorisch nennen kann.

Liegt sie auf einem Kegelschnitte, so zerspaltet sich die Direktionskurve 4. Klasse in einen doppelt zu rechnenden Strahlenbüschel und einen Kegelschnitt.

Hiervon mag ein Spezialfall erwähnt werden, in dem die Projektivität Identität wird. Er tritt ein, wenn

$$a_{22} = a_{11} = a_{00} = 0,\ a_{21} + a_{12} = 0,\ a_{20} + a_{02} = 0,\ a_{10} + a_{01} = 0.$$

Die Koinzidenzgleichung wird dann eine Identität: jedes Element entspricht sich selbst. Die Korrespondenzgleichung aber ist:

$$(x_1 - x)\{a_{12}xx_1 + a_{02}(x + x_1) + a_{01}\} = 0.$$

Die Korrespondenz zerfällt also in eine Identität und eine Involution: jedem Element entspricht es selbst und das gepaarte in dieser Involution.

Die Gleichung der Verzweigungselemente ist:

$$(a_{12}x^2 + 2a_{02}x + a_{01})^2 = 0;$$

das sind die Doppelelemente der Involution doppelt gerechnet.

184 Wenn in einer Ebene zwei Strahlenbüschel U, U_1 in Korrespondenz $[n, n_1]$ vorliegen, in denen x und x_1, y und y_1 entsprechende Strahlen sind, so kann man solche Schnittpunkte wie xy_1 und yx_1 involutorische Punkte nennen, weil sie in der Korrespondenz, die auf ihrer Verbindungslinie entsteht, ein involutorisches Paar bilden.

Zu jedem Punkte xy_1 gibt es nn_1 involutorische Punkte, in denen die dem x entsprechenden n_1 Strahlen sich mit den dem y_1 entsprechenden n Strahlen schneiden. Daraus folgt, daß die involutorischen Paare auf den Strahlen eines Büschels O eine Kurve von der Ordnung $nn_1 + n(n-1) + n_1(n_1-1)$ erzeugen, auf welcher der Scheitel O nn_1-fach ist; schneidet man diese Kurve mit einer Gerade, so ergibt sich: Die Verbindungslinien der Punkte einer Gerade l je mit den nn_1 zugehörigen involutorischen Punkten umhüllen eine Kurve von der Klasse $nn_1 + n(n-1) + n_1(n_1-1)$, für welche die Gerade eine $[n(n-1) + n_1(n_1-1)]$-fache Tangente ist.

Die zu den Punkten der l zugehörigen involutorischen Punkte erzeugen eine Kurve von der Ordnung $n^2 + n_1^2$; denn durch die Strahlen von U und U_1, welche den auf l sich schneidenden Strahlen von U_1 und U korrespondieren, entsteht zwischen den

beiden Büscheln eine Korrespondenz $[n^2, n_1^2]$. Einem Strahle x von U entsprechen n_1 Strahlen x_1 von U_1, nach deren Schnitten mit l n_1 Strahlen y von U gehen, welchen wiederum n_1^2 Strahlen y_1 von U_1 korrespondieren; und jedem y_1 entsprechen ebenso n^2 Strahlen x. Durch diese Korrespondenz $[n^2, n_1^2]$ entsteht die gesuchte Kurve; ihre Schnitte mit l sind die $n(n-1)+n_1(n_1-1)$ Punkte der involutorischen Paare auf l und die Schnitte der Kurve $(n+n_1)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche durch die gegebene Korrespondenz zwischen U und U_1 erzeugt wird.

§ 30. Involutorische mehrdeutig bezogene Gebilde.

Bei vollständig involutorischen Gebilden entsprechen jedem Elemente, mag es zu dem einen oder andern der (ineinander liegenden) Gebilde gehören, die nämlichen Elemente; also können die beiden Zahlen n, n_1 nicht verschieden sein. Für involutorische Gebilde genügt daher die Bezeichnung $[n]$. Aber die Gleichheit reicht noch nicht hin. Wir haben z. B. beim Beweise des Satzes über die Zahl nn' der Schnittpunkte zweier Kurven (Nr. 161) eine Korrespondenz $[nn', nn']$ zweier ineinander liegender Strahlenbüschel mit gleichen Zahlen benutzt, die jedoch nicht involutorisch ist; denn dazu müßten die einem x' entsprechenden Strahlen x genau ebenso konstruiert werden, wie die einem x entsprechenden x'; aber beim Übergang von einem x' zu den x werden die beiden gegebenen Kurven in umgekehrter Weise herangezogen, als bei dem Übergange von einem x zu den x'. Liegt jedoch bloß eine Kurve vor und werden in den beiden konzentrischen Büscheln Q solche Strahlen als entsprechend angenommen, welche nach zwei Punkten dieser Kurve gehen, die mit dem festen Punkte O in gerader Linie liegen, so ergibt sich eine involutorische Korrespondenz $[n(n-1)]$. 185

Involutorisch sind die Korrespondenzen, welche im Beweise der ersten Plückerschen Formel (Nr. 162) und in dem des Satzes von Clebsch (Nr. 163) herangezogen werden.

Involutorisch ist ferner, wie dort schon bemerkt wurde, die Hilfskorrespondenz, welche wir in Nr. 172 bei der Ermittelung der Anzahl der Doppel- und Verzweigungselemente einer $[n, n_1]$ benutzten: Jedes der beiden Gebilde trägt eine solche: das n-deutige u eine involutorische Korrespondenz $[n_1(n-1)]$, das n_1-deutige u_1 eine $[n(n_1-1)]$.

Heben wir diese „Begleiterinnen", wie sie Thomä genannt hat, insbesondere für den Fall $[2, 2]$ hervor, wo sie beide $[2]$ sind: Die beiden Elemente des einen von zwei in einer Korrespondenz $[2, 2]$ befindlichen Gebilden u, u_1, welche je demselben Elemente des andern Gebildes entsprechen, stehen in einer involutorischen Korrespondenz $[2]$.

In einer involutorischen Korrespondenz $[n]$ hat ein Element nicht $n + n_1 = 2n$, sondern nur n entsprechende Elemente; diejenigen, die ihm in einem Sinne korrespondieren, entsprechen ihm auch im andern. Daraus folgt, daß jedes Verzweigungselement ein solches in beiderlei Sinne ist. Es gibt also nur $2n(n-1)$ Verzweigungselemente und ebensoviele Doppelelemente, ihnen eindeutig zugeordnet.

Dagegen ist die Anzahl der Koinzidenzen $2n$.

186 Ein ebenes einfach unendliches Kegelschnitt-System liege vor, von welchem ν Kegelschnitte durch einen Punkt gehen, ϱ eine Gerade berühren; die Anzahl der Geradenpaare und der Punktepaare in ihm sei δ, η.

Es ruft auf einer Gerade eine involutorische Korrespondenz $[\nu]$ hervor, in der die Schnitte mit demselben Kegelschnitte entsprechend, und um einen Punkt eine $[\varrho]$, in welcher die Tangenten desselben Kegelschnitts einander zugeordnet sind. Die 2ν Koinzidenzen der ersteren kommen durch die ϱ Kegelschnitte des Systems, welche die Gerade berühren, und die η Punktepaare, die als Punktkurven Doppelgeraden sind, zustande; die 2ϱ der andern durch die ν Kegelschnitte, welche durch den Punkt gehen, und die δ Geradenpaare, deren „Tangenten" den doppelten Büschel um den Doppelpunkt bilden, so daß von jedem Punkte zwei vereinigte kommen.

Folglich haben wir die Formeln:

$$2\nu = \varrho + \eta, \quad 2\varrho = \nu + \delta,$$

welche lehren, wie aus zwei der vier Zahlen, den Charakteristiken ν, ϱ und den Ausartungszahlen δ, η des Systems, die beiden andern berechnet werden können.

Wir wollen die Kegelschnitt-Systeme betrachten, die durch i Punkte und $4 - i$ Tangenten bestimmt sind, und sie kurz mit (4, 0), (3, 1), (2, 2), (1, 3), (0, 4) bezeichnen. Wir wissen Bescheid über (4, 0), den Büschel, und (0, 4), die Schar. Bei jenem ist $\nu = 1$, $\varrho = 2$, $\delta = 3$, $\eta = 0$; bei dieser: $\nu = 2$, $\varrho = 1$, $\delta = 0$, $\eta = 3$. Das ν für (3, 1) ist ersichtlich ϱ für (4, 0), also 2; da die drei Punkte nicht in gerader Linie liegen, so ist ein Punktepaar nicht möglich; also $\eta = 0$ und daher $\varrho = 4$. Daraus folgt $\delta = 6$; wir haben jedoch im System nur drei Geradenpaare, deren Geraden durch zwei, bzw. einen von den drei Punkten gehen, während der Doppelpunkt auf der gegebenen Tangente liegt; jedes derselben zählt also zweifach. Diese Zweifachheit der Koinzidenz wäre jedoch nicht befriedigend begründet, wenn man sich darauf berufen wollte, daß ein Strahl durch den Doppelpunkt des Geradenpaars zwei vereinigte Tangenten repräsentiert. Wir umgehen die Schwierigkeit, indem wir nicht ν, ϱ aus η, δ bestimmen, sondern ν aus dem vorangehenden Fall entnehmen und darauf ϱ durch die

erste Formel bestimmen, während die zweite uns dann eben lehrt, wie vielfach die Geradenpaare zu rechnen sind. Für (1, 3) haben wir dual: $\nu = 4$, $\varrho = 2$, $\delta = 0$, $\eta = 2 \cdot 3$. Und in bezug auf (2, 2) ist $\nu = 4$, als ϱ von (3, 1), und $\varrho = 4$, als ν als (1, 3). Die Formeln geben dann: $\delta = \eta = 4$.

Das System enthält aber nur ein Geradenpaar, das vom Schnittpunkt der beiden Tangenten nach den beiden Punkten geht, und ebenso ein Punktepaar, auf der Verbindungslinie der beiden Punkte eingeschnitten durch die beiden Tangenten. Beide Ausartungen sind also vierfach zu rechnen. Man ersieht aus diesen verhältnismäßig einfachen Beispielen, welche Schwierigkeit die Vielfachheit der Koinzidenzen bereiten kann[1]).

Kehren wir zur allgemeinen Betrachtung zurück. Wird in die 187
Verwandtschaftsgleichung einer involutorischen Korrespondenz derselbe Wert einmal für x, das andere Mal für x_1 eingesetzt, so muß sich genau dieselbe Gleichung in x_1 im ersten Fall, wie in x im zweiten Falle ergeben: die Verwandtschaftsgleichung muß symmetrisch in bezug auf x und x_1 sein, d. h. durchweg $a_{ik} = a_{ki}$ sein. Wegen dieser Symmetrie wird die Verwandtschaft oft selbst symmetrisch genannt; Em. Weyr nannte eine involutorische Korrespondenz $[n]$ „ein symmetrisches Elementensystem n^{ten} Grades".

Die Anzahl der Koeffizienten, deren Zeiger i und k verschieden sind, ist $n(n+1)$; daher ist die Anzahl der wesentlichen Konstanten um die Hälfte dieser Zahl kleiner als bei einer nichtinvolutorischen Korrespondenz $[n, n]$, also gleich $n^2 + 2n - \frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{2}n(n+3)$.

In einem gegebenen Gebilde sind demzufolge $\infty^{\frac{1}{2}n(n+3)}$ involutorische Korrespondenzen $[n]$ möglich, z. B. ∞^5 Korrespondenzen $[2]$.

Durch $\frac{1}{2}n(n+3)$ Paare entsprechender Elemente ist eine involutorische Korrespondenz $[n]$ eindeutig bestimmt.

Die Bedingung, daß eine Korrespondenz $[n, n]$ zwischen ineinander liegenden Gebilden involutorisch sei, ist also eine $\frac{1}{2}n(n+1)$-fache, z. B. eine dreifache, wenn $n = 2$.

---

1) Ist das System nicht eben, so bedeuten ν, ϱ die Anzahlen der Kegelschnitte, welche eine Gerade treffen, eine Ebene berühren. Dazu tritt eine dritte Charakteristik μ, die Anzahl der Kegelschnitte, deren Ebenen durch einen Punkt gehen. Hier werden die Korrespondenzen in einem Strahlenbüschel und einem Ebenenbüschel hergestellt und solche Strahlen, Ebenen einander zugeordnet, welche denselben Kegelschnitt treffen, bzw. berühren. Man erhält:

$$2\nu = \varrho + 2\mu + \eta, \quad 2\varrho = \nu + \delta,$$

wo der Faktor 2 im Gliede 2μ davon herrührt, daß ein Kegelschnitt, dessen Ebene durch den Scheitel des Büschels geht, einen Strahl desselben zweimal trifft. Doch befriedigend ist die Zweifachheit damit noch nicht bewiesen. Diese Formeln veröffentlichte Chasles in den Comptes rendus, Bd. 58, S. 1173.

Den Grund für die Übereinstimmung der Mannigfaltigkeitszahl $\frac{1}{2}n(n+3)$ der involutorischen Korrespondenzen $[n]$ in gegebenem Gebilde und der Kurven n^{ter} Ordnung oder n^{ter} Klasse in gegebener Ebene werden wir bald erkennen.

Wenn von den n Elementen, welche dem Elemente $x = 0$ korrespondieren, zwei in dasselbe Element $x_1 = 0$ fallen, so müssen in der Gleichung n^{ten} Grades in x_1, die für $x = 0$ sich ergibt und zwei Wurzeln 0 hat, die beiden untersten Koeffizienten a_{10} und a_{00} wegfallen; dann fehlen sie auch in der Koinzidenzgleichung, deren niedrigste Glieder $2a_{10}x + a_{00}$ sind, und diese hat auch zwei Wurzeln 0; also ist das Element $x = x_1 = 0$ eine doppelte Koinzidenz. Der Parameterwert 0 kann aber (durch lineare Substitution) jedem Elemente verschafft werden; also:

Wenn in einer involutorischen Korrespondenz $[n]$ von den einem Elemente korrespondierenden Elementen zwei sich mit ihm vereinigen, so ist dies eine doppelte Koinzidenz[1]).

Bei einer nichtinvolutorischen Korrespondenz $[n, n_1]$ ineinander liegender Gebilde kann man diesen Schluß erst dann machen, wenn mit dem Elemente sowohl zwei von den in dem einen, als zwei von den im andern Sinne entsprechenden Elementen sich vereinigen. Denn in diesem Falle ist der Koeffizient von x in der Koinzidenzgleichung $a_{10} + a_{01}$. Es ist möglich, daß diese Summe verschwindet, ohne daß es a_{10} und a_{01} einzeln tun; aber das wird meistens schwer zu erkennen sein. Die gemachte Voraussetzung bedingt, neben $a_{00} = 0$, sowohl $a_{10} = 0$, als $a_{01} = 0$; wofern natürlich dem Element wieder der Parameter 0 gegeben ist.

188 In Nr. 183 fanden wir, daß, wenn eine Korrespondenz $[2, 2]$ ineinander liegender Gebilde drei involutorische Paare besitzt, die jedoch nicht der nämlichen Involution angehören, sein muß:

$$a_{21} = a_{12}, \quad a_{20} = a_{02}, \quad a_{10} = a_{01};$$

das bedeutet, daß sie ganz involutorisch ist.

Bei einer involutorischen Korrespondenz decken sich die einen Verzweigungselemente mit den andern, und die Doppelelemente, welche zu sich vereinigenden Verzweigungselementen gehören, tun es ebenfalls.

Umgekehrt, für eine Korrespondenz $[2, 2]$ ineinander liegender Gebilde hat, im allgemeinen, die Vereinigung der einen Verzweigungselemente mit den andern zur Folge, daß sie involutorisch ist.

---

1) Damit könnte der Koeffizient 2 in der Anmerkung von Nr. 186 begründet werden.

Es bestehen (Nr. 174) vier Projektivitäten zwischen den Reihen der einen und der andern Verzweigungs- und Doppelelemente, z. B.

$$ABCD\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D} \barwedge A_1B_1C_1D_1\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_1,$$

wo $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}$ die zu A, A_1 gehörigen Doppelelemente sind, usw.

Setzen wir voraus, daß die Verzweigungselemente sich decken und zwar A_1 mit A. Sich deckende Würfe sind projektiv: von den mit A_1 anfangenden Würfen ist nur $A_1B_1C_1D_1$ zu $ABCD$ projektiv, also kann nur dieser mit $ABCD$ sich decken. Jedoch die Fälle harmonischer oder äquianharmonischer Würfe von Verzweigungselementen, in denen mehr als vier Doppelverhältnisse gleich sind, müssen ausgeschlossen werden.

Werden aber die genannten Würfe $ABCD$ und $A_1B_1C_1D_1$ identisch, so fallen, wegen der obigen Projektivität, auch $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{D}_1$ auf $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$.

Zwischen diesen acht Elementen $A, \ldots, \mathfrak{D}$, mit denen wir es nunmehr allein zu tun haben, bestehen (Nr. 174, 175) drei Involutionen von je vier Paaren und zwar so, daß in zwei Paaren Verzweigungselemente stehen, in den andern entsprechend die zugehörigen Doppelelemente, wie: AB, CD, $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}\mathfrak{D}$.

Wir überzeugten uns ferner a. a. O., daß eine Involution von vier Paaren je aus einem Verzweigungselemente und dem zugehörigen Doppelelemente nicht bestehen kann. Gehörten etwa bloß $A\mathfrak{A}$, $B\mathfrak{B}$, $C\mathfrak{C}$ zu einer Involution, so würde doch $D\mathfrak{D}$ mit zweien dieser Paare nicht zu einer Involution gehören.

Weil aber dem A in beiderlei Sinne $\mathfrak{A}$ entspricht usw., so sind diese vier Paare $A\mathfrak{A}, \ldots, D\mathfrak{D}$ involutorische Paare, und da unter ihnen sicher drei Paare sich befinden, welche nicht die Involutionslage haben, so folgt, daß die Verwandtschaft involutorisch ist.

Nehmen wir nun an, daß $ABCD$ und $A_1B_1C_1D_1$ harmonisch sind; dann bestehen zwischen ihnen acht Projektivitäten, von denen jedoch nur vier auch auf die Doppelelemente sich erstrecken. Eine der weiteren ist: $ABCD \barwedge A_1B_1D_1C_1$. Wäre auch:

$$ABCD\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D} \barwedge A_1B_1D_1C_1\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{D}_1\mathfrak{C}_1,$$

so würde folgen:

$$A_1B_1C_1D_1\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_1 \barwedge A_1B_1D_1C_1\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{D}_1\mathfrak{C}_1;$$

daraus würde die Identität von C_1 und D_1, $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{D}_1$ folgen, welche nicht besteht.

Eine Vereinigung von A_1, B_1, D_1, C_1 und A, B, C, D wäre möglich, aber da die vollständige Projektivität fehlt, so würde ihr keine Vereinigung der zugeordneten Doppelelemente entsprechen, die Verwandtschaft wäre nichtinvolutorisch.

Und ähnliches gilt, wenn die Verzweigungswürfe äquianharmonisch sind. Es lassen sich also Ausnahmefälle herstellen, bei denen der Umkehrungssatz nicht gilt.

Wir gehen von einer Korrespondenz [2, 2] zwischen den Trägern u, u_1 aus, weshalb sie $[2, 2]_{u,u_1}$ heiße, und fügen noch eine Projektivität Π zwischen u und u_1 hinzu. Dann entsteht auf jedem der beiden Träger eine Korrespondenz [2, 2] und zwar $[2, 2]_u$ auf u zwischen der ursprünglichen Reihe u und der durch Π aus u_1 hervorgehenden u', $[2, 2]_{u_1}$ auf u_1 zwischen der aus u durch Π entstandenen u_1' und der ursprünglichen u_1. Sind X und X_1 durch $[2, 2]_{u,u_1}$ entsprechend und korrespondieren ihnen durch Π die X_1', X', so sind X und X' in $[2, 2]_u$, X_1' und X_1 in $[2, 2]_{u_1}$ zugeordnet. Für $[2, 2]_u$ sind die Verzweigungs- und Doppelelemente in u dieselben wie für $[2, 2]_{u,u_1}$, während diejenigen von u' durch Π aus denen von $[2, 2]_{u,u_1}$ auf u_1 sich ergeben; und ähnliches gilt für $[2, 2]_{u_1}$.

Wenn eine dieser neuen Korrespondenzen involutorisch wird, so wird es auch die andere. Dies folgt unmittelbar daraus, daß entsprechende Elemente X und X' von $[2, 2]_u$ durch Π in entsprechende Elemente X_1' und X_1 von $[2, 2]_{u_1}$ übergehen, also involutorisch entsprechende in ebensolche. Die Verzweigungselemente von $[2, 2]_u$ in u' gehen durch Π aus denen von $[2, 2]_{u,u_1}$ in u_1 hervor; wird $[2, 2]_u$ involutorisch, so werden diese Verzweigungselemente in u' mit denen in u identisch, d. i. den Verzweigungselementen von $[2, 2]_{u,u_1}$ in u. Π führt die einen Verzweigungselemente von $[2, 2]_{u,u_1}$ in die andern über oder ist eine der vier Projektivitäten, die zwischen ihnen bestehen.

Sind nun diese Elemente harmonisch, so bestehe auch die Projektivität $ABCD \barwedge A_1B_1D_1C_1$, die sich aber nicht auf die Doppelelemente erstreckt. Wir können durch sie u_1 in u' (auf u) überführen und erhalten eine Korrespondenz $[2, 2]_u$ mit vereinigten Würfen der Verzweigungselemente, während die der Doppelelemente sich nicht decken; sie ist also nicht involutorisch; und ähnlich bei äquianharmonischen Würfen. Folglich muß der Umkehrungssatz vorsichtiger gefaßt werden.

Wenn bei einer Korrespondenz [2,2] ineinander liegender Gebilde die einen Verzweigungselemente mit den andern sich decken, so ist sie involutorisch; wofern diese Elemente nicht harmonisch oder äquianharmonisch sind. In diesen ausgeschlossenen Fällen ist involutorische und nichtinvolutorische Korrespondenz möglich.

Bemerken wir, daß auch getrennte Verzweigungselemente vorauszusetzen sind.

In dem Spezialfall der nur halbinvolutorischen Korrespondenz von Nr. 183 ergab sich nur ein System von Verzweigungselementen, aber nicht vier getrennten.

Wir fanden eben: Wenn Π_i eine der vier ausgezeichneten Projektivitäten ist, welche die Verzweigungs- und Doppelelemente von $[2, 2]_{u, u_1}$ auf dem einen Träger in die auf dem andern überführen, so sind $[2, 2]_u$ und $[2, 2]_{u_1}$ involutorisch.

Dem X von u seien durch $[2, 2]_{u, u_1}$ auf u_1 entsprechend X_1 und $\overline{X}_1$, diesen durch Π_i wiederum Y und $\overline{Y}$ auf u, welche also dem X in $[2, 2]_u$ entsprechend sind. Wegen des involutorischen Charakters der $[2, 2]_u$ müssen dann Y und $\overline{Y}$ ein gemeinsames entsprechendes Element Y_1 in $[2, 2]_{u_1}$ haben, das durch Π_i in X übergeht; und $X_1, \overline{X}_1$ sind dem Y_1 in der involutorischen Korrespondenz $[2, 2]_{u_1}$ zugeordnet.

Seien etwa u, u_1 zwei Geraden derselben Ebene, so führt die Projektivität Π_i zu einem Kegelschnitt, welcher u, u_1 tangiert, ferner die Verbindungslinien der Verzweigungspunkte auf u mit denen ihnen in Π_i zugeordneten, sowie auch XY_1, YX_1, $\overline{Y}\overline{X}_1$.

Von den beiden Tangenten u, u_1 geht die Korrespondenz $[2, 2]_{u, u_1}$ in den Tangentenbüschel dieses Kegelschnitts über, und der Tangente XY_1 entsprechen in dem einen Sinne, d. h. insofern sie von X ausgeht, die von X_1 und $\overline{X}_1$ ausgehenden Tangenten, und im andern Sinne, d. h. insofern sie von Y_1 ausgeht, die von Y und $\overline{Y}$ kommenden Tangenten, also dieselben. Die Korrespondenz im Tangentenbüschel ist involutorisch, wie das ja auch aus der Vereinigung der Verzweigungselemente, jener Verbindungslinien der Verzweigungspunkte, hervorgeht.

Im Tangentenbüschel jedes die beiden Geraden u, u_1 berührenden Kegelschnitts entsteht durch die Korrespondenz [2, 2] zwischen deren Punktreihen eine solche Korrespondenz; sie wird involutorisch, wenn der Kegelschnitt durch eine der vier Projektivitäten Π_i entsteht, welche die einen Verzweigungspunkte in die andern überführen.

Eine Projektivität zwischen zwei ineinander liegenden 189
Involutionen gleichen Grades kann nur dadurch involutorisch werden, daß diese Involutionen identisch werden. Denn die Elemente, welche einem Elemente in dem einen und dem andern Sinne korrespondieren, sind identisch und bilden andererseits eine Gruppe der einen Involution, wie eine der andern. Es werden eben die Gruppen einer und derselben Involution involutorisch aufeinander bezogen.

Es seien zwei (gemeine) Involutionen I, I_1 projektiv aufeinander bezogen und R, S, M_1, N_1 die Doppelelemente. Den Paaren RR, SS, M_1M_1, N_1N_1 mögen die Paare $R_1'R_1'', S_1'S_1'', M'M'', N'N''$ entsprechen. Deren acht Elemente sind die Verzweigungselemente, und in jeder der vier Projektivitäten zwischen ihnen müssen zweien, die ein Paar bilden, zwei ebenso beschaffene homolog sein; denn ent-

sprächen etwa den M', M'' die R_1', S_1', so würden in der durch die Doppelelemente vervollständigten Projektivität den verschiedenen Punkten R, S die identischen M_1, M_1 korrespondieren. Die vier Projektivitäten sind:

$$\begin{aligned} M'M''N'N''; \; RS \;&\overline{\wedge}\; R_1'R_1''S_1'S_1''; \; M_1N_1 \quad \Pi_1 \\ &\overline{\wedge}\; R_1''R_1'S_1''S_1'; \; M_1N_1 \quad \Pi_2 \\ &\overline{\wedge}\; S_1'S_1''R_1'R_1''; \; N_1M_1 \quad \Pi_3 \\ &\overline{\wedge}\; S_1''S_1'R_1''R_1'; \; N_1M_1. \quad \Pi_4 \end{aligned}$$

Jede von ihnen führt die eine Involution in die andere über und macht sie in sich involutorisch. Dem Paare $M'M''$ von I entspricht durch $\overline{\Pi}_I$, die gegebene Projektivität der I, I_1, das Paar M_1M_1 von I_1, das durch Π_1 in RR übergeht; $M'M''$ geht durch Π_1 in $R_1'R_1''$ über, dem durch Π_I das Paar RR entspricht. Das ist involutorische Zuordnung der Paare von I; und da sie einmal eintretend erkannt ist, so geschieht sie durchweg. Wenn zwei Paare von I und I_1 durch Π_1 zugeordnet sind, so sind es die ihnen durch $\overline{\Pi}_I$ zugeordneten ebenfalls (im umgekehrten Sinne). Beide Produkte $\Pi_1\Pi_I$ und $\overline{\Pi}_I\Pi_1$ bewirken in I (oder I_1) dieselbe involutorische Zuordnung der Paare.

Seien es etwa zwei Strahleninvolutionen derselben Ebene; die $\Pi_1, \ldots, \Pi_4$ bewirken dann vier Kegelschnitte $\mathfrak{K}_1, \ldots, \mathfrak{K}_4$ durch die Scheitel. In jeden schneiden die beiden Involutionen die nämliche Involution, weil in der Π_i zwei gepaarten Strahlen der einen zwei der andern entsprechen. Die Punktepaare dieser eingeschnittenen Involution sind ferner involutorisch zugeordnet; denn den Paaren $x'x''$, $y_1'y_1''$ von I und I_1, die durch ein Punktepaar auf dem Kegelschnitt $\mathfrak{K}_i$ gehen und in Π_i einander korrespondieren, entsprechen durch $\overline{\Pi}_I$ die Strahlenpaare $x_1'x_1''$, $y'y''$, welche wiederum in Π_i zugeordnet sind und das nämliche Punktepaar von $\mathfrak{K}_i$ einschneiden, das so jenem involutorisch zugeordnet wird.

Oder, lassen wir eine ebene Kurve 3. Ordnung aus zwei konjugierten Punkten O, O_1 (Nr. 179) durch projektive Involutionen (in halbperspektiver Lage) entstehen, so wird jeder der beiden Tangentenwürfe aus O, O_1 in zwei Paare der betreffenden Involution zerlegt, derartig, daß die Verbindungslinien der Berührungspunkte zweier gepaarter Tangenten durch O_1, bzw. O laufen (Nr. 179) und die Doppelstrahlen der andern Involution bilden.

In den vier Projektivitäten der Tangentenwürfe (der Verzweigungsstrahlen) entsprechen zwei gepaarten Strahlen zwei ebenfalls gepaarte und die zugehörigen Verbindungslinien sind auch homolog.

Eine involutorische Korrespondenz [1] ist immer eine Involution 2. Grades. 190

Eine Involution $(n+1)^{\text{ten}}$ Grades ist eine involutorische Korrespondenz $[n]$, in welcher jedem Elemente die n übrigen Elemente seiner Gruppe zugeordnet sind; involutorisch ist sie, weil zwei entsprechende Elemente gleichartig auseinander hervorgehen.

Die Doppelelemente der Involution, in der Zahl $2n$ (Nr. 136), sind sowohl Koinzidenzelemente, als auch Doppelelemente der $[n]$, als letztere je $(n-1)$-fach zu rechnen; denn die $n-1$ übrigen Elemente der Gruppe sind je die zugehörigen Verzweigungselemente.

Das Charakteristische, was eine Involution $(n+1)^{\text{ten}}$ Grades als involutorische Korrespondenz $[n]$ von den allgemeinen derartigen Korrespondenzen unterscheidet, ist, daß irgend zwei einem Elemente entsprechende Elemente auch einander entsprechen, so daß ein Element und die n entsprechenden einen Zyklus von $n+1$ Elementen bilden, von der Art, daß aus jedem von ihnen die übrigen in gleicher Weise hervorgehen. Damit das eine besondere Eigenschaft sei, muß $n > 1$ sein.

In gegebenem Gebilde fanden wir $\infty^{\frac{1}{2}n(n+3)}$ involutorische Korrespondenzen $[n]$, dagegen enthält es nur ∞^{2n} Involutionen $(n+1)^{\text{ten}}$ Grades; wir erhalten sie, wenn wir zwei gegebene Elemente durch je n Elemente zu den konstituierenden Gruppen vervollständigen.

Wenn $n > 1$, so ist $\frac{1}{2}n(n+3) > 2n$.

Die von einem Kurvenbüschel n^{ter} Ordnung in eine Gerade, einen Kegelschnitt, eine unikursale Kurve m^{ter} Ordnung eingeschnittenen involutorischen Korrespondenzen sind Involutionen vom Grade n, $2n$, mn; i auf dieser Kurve gelegene Grundpunkte erniedrigen den Grad um i.

Untersuchen wir die Bedingung dafür, daß eine involutorische Korrespondenz [2] eine Involution 3. Grades ist. 191

Die Korrespondenzgleichung ist:

$$a_{22}x^2x_1^2 + a_{12}xx_1(x+x_1) + a_{02}(x^2+x_1^2) + a_{11}xx_1 + a_{01}(x+x_1) + a_{00} = 0;$$

dem Elemente x entsprechen die Elemente x', x''; dies gibt:

$$x' + x'' = -\frac{a_{12}x^2 + a_{11}x + a_{01}}{a_{22}x^2 + a_{12}x + a_{02}},\quad x'x'' = \frac{a_{02}x^2 + a_{01}x + a_{00}}{a_{22}x^2 + a_{12}x + a_{02}}.$$

Diese beiden Elemente sollen aber auch einander entsprechen, also müssen x', x'', für x und x_1 eingesetzt, der Korrespondenzgleichung

genügen; demnach:

$$\text{I}\quad \begin{aligned} & a_{22}(a_{02}x^2 + a_{01}x + a_{00})^2 - a_{12}(a_{02}x^2 + a_{01}x + a_{00})(a_{12}x^2 + a_{11}x + a_{01}) \\ & + a_{02}[(a_{12}x^2 + a_{11}x + a_{01})^2 - 2(a_{02}x^2 + a_{01}x + a_{00})(a_{22}x^2 + a_{12}x + a_{02})] \\ & + a_{11}(a_{02}x^2 + a_{01}x + a_{00})(a_{22}x^2 + a_{12}x + a_{02}) \\ & - a_{01}(a_{12}x^2 + a_{11}x + a_{01})(a_{22}x^2 + a_{12}x + a_{02}) \\ & + a_{00}(a_{22}x^2 + a_{12}x + a_{02})^2 = 0; \end{aligned}$$

wobei $x'^2 + x''^2 = (x' + x'')^2 - 2x'x''$ benutzt wird.

Dieser Gleichung genügt der Parameter jedes Elements, dessen beide entsprechenden Elemente auch einander entsprechen. Das gilt für jedes Koinzidenzelement; denn ist X_0 ein solches, so sind seine entsprechenden X_0 und ein zweites, und diese entsprechen einander. Die Parameter der vier Koinzidenzelemente sind also die Wurzeln unserer Gleichung, und Elemente, deren beide entsprechenden einander entsprechen und die nicht Koinzidenzelemente sind, — und solche wünschen wir — gibt es im allgemeinen nicht. Die Koinzidenzgleichung ist aber einfacher:

$$a_{22}x^4 + 2a_{12}x^3 + (2a_{02} + a_{11})x^2 + 2a_{01}x + a_{00} = 0;$$

diese linke Seite muß also in der von I enthalten sein. In der Tat läßt sich I in die Form bringen:

$$\text{I}'\quad \begin{aligned} & (a_{00}a_{22} + a_{02}a_{11} - a_{01}a_{12} - a_{02}^2) \\ & \times (a_{22}x^4 + 2a_{12}x^3 + (2a_{02} + a_{11})x^2 + 2a_{01}x + a_{00}) = 0. \end{aligned}$$

Ist der erste Faktor nicht null, dann haben wir das eben ausgesprochene negative Ergebnis.

Wenn aber ein Element vorhanden ist, das nicht Koinzidenzelement ist und dessen beide entsprechenden Elemente einander entsprechen, so genügt sein x den Gleichungen I und I′, aber nicht der Koinzidenzgleichung. Das ist nicht anders möglich, als daß:

$$\text{II}\qquad a_{00}a_{22} - a_{01}a_{12} + a_{02}(a_{11} - a_{02}) = 0$$

ist. Dann aber ist I′ eine Identität und jedes x genügt: jedes Element hat diese Eigenschaft.

Wenn also eine involutorische Korrespondenz [2] so beschaffen ist, daß einmal ein — von den Koinzidenzelementen verschiedenes — Element zwei entsprechende Elemente hat, die auch einander entsprechen, so geschieht dies bei jedem Elemente. Die Bedingung dafür ist II.

Es liegt eine kubische Involution vor.

Aus den obigen Gleichungen für Summe und Produkt der beiden x', x'', welche dem x entsprechen, ergibt sich nämlich:

$$x + x' + x'' = \frac{a_{22}x^3 + (a_{02} - a_{11})x - a_{01}}{a_{22}x^2 + a_{12}x + a_{02}},$$

$$xx' + xx'' + x'x'' = x(x' + x'') + x'x'' = \frac{-a_{12}x^3 + (a_{02} - a_{11})x^2 + a_{00}}{a_{22}x^2 + a_{12}x + a_{02}},$$

$$xx'x'' = \frac{a_{02}x^3 + a_{01}x^2 + a_{00}x}{a_{22}x^2 + a_{12}x + a_{02}}.$$

Daher sind x, x', x'' die Wurzeln der kubischen Gleichung:

$$(a_{22}x^2 + a_{12}x + a_{02})y^3 - (a_{22}x^3 + (a_{02} - a_{11})x - a_{01})y^2$$
$$+ (-a_{12}x^3 + (a_{02} - a_{11})x^2 + a_{00})y - (a_{02}x^3 + a_{01}x^2 + a_{00}x) = 0.$$

Diese Gleichung läßt sich, wenn der II genügt wird, in folgende Form bringen:

$$[b_0(c_1x^2 + c_2x + c_3) - c_0(b_1x^2 + b_2x + b_3)]y^3$$
$$+ [b_1(c_0x^3 + c_2x + c_3) - c_1(b_0x^3 + b_2x + b_3)]y^2$$
$$+ [b_2(c_0x^3 + c_1x^2 + c_3) - c_2(b_0x^3 + b_1x^2 + b_3)]y$$
$$+ [b_3(c_0x^3 + c_1x^2 + c_2x) - c_3(b_0x^3 + b_1x^2 + b_2x)] = 0.$$

Dazu ist die Erfüllung folgender sechs Gleichungen notwendig:

$$b_0c_1 - c_0b_1 = a_{22}, \qquad b_1c_2 - c_1b_2 = a_{11} - a_{02},$$
$$b_0c_2 - c_0b_2 = a_{12}, \qquad b_1c_3 - c_1b_3 = a_{01},$$
$$b_0c_3 - c_0b_3 = a_{02}, \qquad b_2c_3 - c_2b_3 = a_{00}.$$

Wir erhalten aus ihnen:

$$(b_0c_1 - c_0b_1)(b_2c_3 - c_2b_3) + (b_0c_3 - c_0b_3)(b_1c_2 - c_1b_2)$$
$$+ (b_0c_2 - c_0b_2)(b_1c_3 - c_1b_3) = a_{00}a_{22} + a_{02}(a_{11} - a_{02}) - a_{01}a_{12}.$$

Die linke Seite ist aber identisch null; wenn also II nicht erfüllt wird, können unsere Gleichungen nicht zusammen bestehen. Wird sie aber erfüllt, dann sind sie mit fünf Gleichungen äquivalent; und nehmen wir dann ein ihnen genügendes Lösungssystem $b_0, \dots c_3$ (wobei man etwa noch die Vereinfachungen: $b_0 = c_0$ und $b_1 = 0$ eintreten lassen kann, da ja acht Unbekannte fünf Gleichungen genügen sollen), so ist die Umformung der kubischen Gleichung bewerkstelligt. Setzt man dann, indem man noch sich aufhebende Glieder:

$$b_0c_0x^3 - c_0b_0x^3,$$
$$b_1c_1x^2 - c_1b_1x^2, \text{ usw.}$$

in die Klammern einschiebt,

$$\frac{b_0x^3 + b_1x^2 + b_2x + b_3}{c_0x^3 + c_1x^2 + c_2x + c_3} = \lambda,$$

so erhält man die Involutionsgleichung:

$$(b_0 - \lambda c_0)y^3 + (b_1 - \lambda c_1)y^2 + (b_2 - \lambda c_2)y + (b_3 - \lambda c_3) = 0.$$

Zu derselben Gleichung führt die Definitionsgleichung von λ, was auch notwendig ist, weil dieser Parameter von den drei Wurzeln gleichartig abhängig sein muß.

Die Invariantenrelation für die linke Seite von II ist:

$$a'_{00}a'_{22} - a'_{01}a'_{12} + a'_{02}(a'_{11} - a'_{02}) = \{a_{00}a_{22} - a_{01}a_{12} + a_{02}(a_{11} - a_{02})\}\cdot(\alpha\delta - \beta\gamma)^4.$$

192 Sind ein Kegelschnitt-Büschel $\mathfrak{B}$ und ein Strahlenbüschel $\mathfrak{B}'$ in derselben Ebene gegeben, so ruft jedes von den beiden Gebilden im andern eine involutorische Korrespondenz [2] hervor, in welcher zwei Elemente des letzteren einander entsprechen, welche das nämliche Element des ersteren berühren. Jeder Kegelschnitt von $\mathfrak{B}$ berührt zwei Strahlen von $\mathfrak{B}'$ und jeder von diesen noch einen weiteren Kegelschnitt von $\mathfrak{B}$, welche beiden Kegelschnitte jenem zugeordnet sind. Ebenso berührt jeder Strahl von $\mathfrak{B}'$ zwei Kegelschnitte von $\mathfrak{B}$ und an jeden derselben kommt noch ein zweiter Strahl von $\mathfrak{B}'$ als Tangente; diese beiden Strahlen sind ihm zugeordnet.

Die ausgezeichneten Elemente ergeben sich folgendermaßen Verzweigungselemente der Korrespondenz in $\mathfrak{B}$ sind die drei Geradenpaare a_1^2, a_2^2, a_3^2 des Büschels, bei welchen die Tangenten aus $\mathfrak{B}'$ je sich in den Strahl a_1', a_2', a_3' nach dem Doppelpunkte vereinigen, und der Kegelschnitt a_4^2 von $\mathfrak{B}$, der durch den Scheitel von $\mathfrak{B}'$ geht, bei dem die Tangenten aus $\mathfrak{B}'$ sich in die Tangente a_4', die im Scheitel berührt, vereinigen. Zugehörige Doppelelemente sind die zweiten Kegelschnitte von $\mathfrak{B}$, welche a_1', a_2', a_3', a_4' berühren. Koinzidenzelemente sind die vier Kegelschnitte b_1^2, b_2^2, b_3^2, b_4^2 des $\mathfrak{B}$, welche die nach den Grundpunkten dieses Büschels gehenden Strahlen b_1', b_2', b_3', b_4' des $\mathfrak{B}'$ in diesen Punkten berühren und je die einzigen Kegelschnitte von $\mathfrak{B}$ sind, die diese Geraden tangieren.

In der Korrespondenz in $\mathfrak{B}'$ sind diese vier Strahlen b_1', b_2', b_3', b_4' die Verzweigungsstrahlen und zugehörige Doppelstrahlen sind die zweiten Tangenten aus $\mathfrak{B}'$ an die b_1^2, b_2^2, b_3^2, b_4^2. Koinzidenzstrahlen hingegen sind die a_1', a_2', a_3', a_4'.

Ein Flächenbüschel 2. Ordnung und ein Strahlenbüschel führen zu nichts wesentlich Neuem. Dagegen erhalten wir andere Ergebnisse, wenn ein Flächenbüschel 2. Ordnung $\mathfrak{B}$ mit einem Ebenenbüschel $\mathfrak{B}'$ zusammengestellt wird. In jenem entsteht eine involutorische Korrespondenz [4]; denn an jede Fläche des $\mathfrak{B}$ kommen zwei Berührungsebenen aus $\mathfrak{B}'$, von denen jede noch zwei andere Flächen des $\mathfrak{B}$ tangiert. Und in $\mathfrak{B}'$ entsteht eine involutorische Korrespondenz [3]; denn jede Ebene von

𝔅′ wird von drei Flächen aus 𝔅 berührt, an deren jede aus 𝔅′ noch eine zweite Tangentialebene kommt.

Es seien a^2, b^2, c^2, d^2 die vier Kegel des Büschels 𝔅 und e^2, f^2 die beiden Flächen, welche die Axe von 𝔅′ berühren, ferner $\alpha, \ldots \delta$ die Ebenen von 𝔅′ nach den Spitzen der Kegel, ε, φ diejenigen, welche e^2, f^2 in ihren Berührungspunkten mit der Axe tangieren. Dies sind die sechs Koinzidenzen von [3].

An die Grundkurve 4. Ordnung von 𝔅 kommen aus dem Büschel 𝔅′ acht Berührungsebenen $\sigma_1, \ldots \sigma_8$[1]); sie schneiden aus 𝔅 Kegelschnitt-Büschel mit zwei vereinigten Grundpunkten; von den drei Geradenpaaren haben sich zwei vereinigt; seien nun $s_1^2, \ldots s_8^2$ die Flächen von 𝔅 durch diese „binären" Geradenpaare und $t_1^2, \ldots t_8^2$ diejenigen durch die „unären"; endlich $\sigma_1', \ldots \sigma_8'$ die zweiten Tangentialebenen aus 𝔅′ an die Flächen $s_1^2 \ldots$ Es sind dann die $\sigma_1, \ldots$ Verzweigungsebenen der Korrespondenz [3] und $\sigma_1', \ldots$ die zugehörigen Doppelebenen. Aber diese Korrespondenz hat im ganzen $2 \cdot 3(3-1) = 12$ Paare zusammengehöriger Verzweigungs- und Doppelebenen. Es gibt im Büschel 𝔅′ ein Ebenenpaar $\mu_1 \mu_2$, dessen beide Ebenen dieselben zwei Flächen m_1^2, m_2^2 von 𝔅 berühren (während die dritten berührten Flächen verschieden sind).

Schneidet man den Büschel 𝔅′ und die Korrespondenz [3] in ihm mit einem Kegelschnitte K, welcher die Axe trifft, so sind zugeordnete Punkte der auf ihm entstehenden [3] die Schnitte mit je den beiden Tangentialebenen aus 𝔅′ an eine Fläche von 𝔅. Die Direktionskurve 3. Klasse (Nr. 194) ist eindeutig auf den Büschel 𝔅 bezogen, daher vom Geschlecht 0 und hat eine Doppeltangente; diese Doppeltangente kommt von dem Ebenenpaare $\mu_1 \mu_2$ her. Die zwölf Verzweigungspunkte auf K sind die acht Schnitte mit der Direktionskurve, welche 4. Ordnung ist, und die beiden Schnitte mit der Doppeltangente: jeder ein doppelter Verzweigungspunkt und der andere zugehöriger Doppelpunkt. Die ersten rühren her von den Verzweigungsebenen $\sigma_1, \ldots$; die beiden Ebenen μ_1, μ_2 erweisen sich als doppelt zu rechnende Verzweigungsebenen und die andere ist jedesmal zugehörige Doppelebene.

Was die involutorische Korrespondenz [4] im Flächenbüschel 𝔅 anlangt, so sind die acht Flächen $s_1^2, \ldots$ die Koinzidenzelemente; denn in jeder von ihnen vereinigen sich zwei von den drei eine Ebene des 𝔅′ berührenden Flächen von 𝔅.

Jede von den sechs Flächen $a^2, \ldots f^2$ erhält aus dem Büschel 𝔅′ zwei vereinigte Tangentialebenen $\alpha, \ldots \varphi$, also vereinigen sich in jeder der beiden weiteren Flächen des 𝔅, welche diese sechs Ebenen berühren, zwei von den entsprechenden vier Flächen. Folglich sind jene sechs Flächen $a^2, \ldots$ doppelte Verzweigungselemente und diese

1) Indem wir den Rang 8 dieser Kurve als bekannt voraussetzen.

zwölf Flächen die zugehörigen Doppelelemente. Ferner vereinigen bei den acht Flächen $t_1^2, \ldots$ je zwei entsprechende sich in $s_1^2, \ldots$, so daß die $t_1^2 \ldots$ Verzweigungselemente sind und die $s_1^2, \ldots$ die zugehörigen Doppelelemente, mithin zugleich Doppel- und Koinzidenzelemente. Endlich sind die beiden Flächen m_1^2, m_2^2 doppelte Verzweigungselemente und je die andere zugehöriges Doppelelement. Damit sind $2 \cdot 6 + 8 + 2 \cdot 2 = 24$ Paare von Verzweigungs- und Doppelelementen, also alle $2 \cdot 4(4-1)$ nachgewiesen.

§ 31. Der Kegelschnitt als Träger. Zyklische Korrespondenzen. Ponceletsche Polygone.

193 Schneidet man einen Kegelschnitt K^2 mit den Tangenten einer Kurve C_n n^{ter} Klasse, so ergibt sich eine involutorische Korrespondenz $[n]$ auf ihm: es entsprechen jedem Punkte von K^2 die zweiten Schnitte der von ihm ausgehenden n Tangenten von C_n.

Wenn die zweite Kurve ebenfalls ein Kegelschnitt C_2 ist, so entsteht eine involutorische Korrespondenz [2]. Einen Spezialfall davon haben wir schon gehabt (Nr. 116): C_2 befindet sich mit K^2 in doppelter Berührung; wir erhielten, daß dann C_2 auf K^2 zwei projektive Punktreihen hervorruft. Mit zwei solchen Punktreihen ist in der Tat eine involutorische Korrespondenz [2] verbunden, in ihr sind jedem Punkte von K^2 die beiden Punkte zugeordnet, welche ihm in der Projektivität in dem einen und in dem andern Sinne korrespondieren, und die Korrespondenzgleichung der [2] ist:

$$(\lambda x x_1 + \mu x + \mu' x_1 + \nu)(\lambda x_1 x + \mu x_1 + \mu' x + \nu) = 0,$$

welche ersichtlich nach x und x_1 symmetrisch ist. Die Korrespondenz [2] zerspaltet sich in die Projektivität und ihre Umkehrung.

In jedem der beiden Berührungspunkte haben sich zwei Verzweigungspunkte, die zugehörigen Doppelpunkte und zwei Koinzidenzpunkte der [2] vereinigt.

Ist C_2 ein beliebig zu K^2 gelegener Kegelschnitt, so ist die Verbindungslinie der beiden einem Punkte von K^2 entsprechenden Punkte, welche durch die Tangenten aus ihm an C_2 eingeschnitten werden, im allgemeinen nicht wiederum Tangente von C_2, weil diese Punkte nicht einander entsprechen. Tangiert diese Gerade aber bei irgend einem Punkte von K^2 den C_2, so daß die verbundenen Punkte entsprechend werden, so tritt nach dem Satze von Nr. 191 dies durchweg ein.

Haben also zwei Kegelschnitte K^2 und C_2 eine solche Lage zueinander, daß es ein Dreieck gibt, welches dem ersten ein- und dem zweiten umgeschrieben ist, so gibt es solcher

Dreiecke ∞^1. Jeder Punkt von K^2 ist Ecke eines derselben und jede Tangente von C_2 Seite; die Tripel der Ecken bilden auf K^2 eine kubische Involution, die Tripel der Seiten eine solche um C_2. Dazu führt die duale Betrachtung, welche davon ausgeht, daß in dem Tangentenbüschel eines C_2 durch die Punkte einer Kurve K^n n^{ter} Ordnung eine involutorische Korrespondenz $[n]$ entsteht, in der zwei auf K^n sich schneidende Tangenten von C_2 zugeordnet sind.

Auf Kegelschnitte K^2 und C_2 in der speziellen Lage, daß sie ein und dann ∞^1 dem K^2 ein-, dem C_2 umgeschriebene Dreiecke besitzen, hat Poncelet zuerst aufmerksam gemacht[1]), daher Kegelschnitte in Ponceletscher Lage, Ponceletsche Dreiecke.

Hieraus folgt von neuem der Satz am Ende von Nr. 118. Die beiden Dreiecke ABC, DEF seien demselben Kegelschnitte K^2 eingeschrieben; C_2 tangiere die drei Seiten von ABC und DE, DF. Also haben K^2 und C_2 die Ponceletsche Lage, und DEF ist das bei D sich ergebende dem K^2 ein-, dem C_2 umgeschriebene Dreieck.

Mit unserer jetzigen Betrachtung hängt Hesses Übertragungsprinzip[2]) eng zusammen. Hesse bildet die Punkte einer Ebene ab in die Punktepaare auf einem Kegelschnitte (von dem sie dann auf eine Gerade übertragen werden können), nämlich jeden Punkt in das Paar der Schnittpunkte seiner Polare. Die Paare, welche den Punkten einer Kurve n^{ter} Ordnung entsprechen, bestehen aus korrespondierenden Punkten einer involutorischen Korrespondenz $[n]$ auf dem Kegelschnitt.

Wir können an die Ponceletsche Figur gleich die Beantwortung der Frage anschließen, wie viele Kegelschnitte in einer Schar enthalten sind, denen Dreiecke umgeschrieben sind, welche zugleich einem gegebenen Kegelschnitte K^2 eingeschrieben sind.

Die Tangenten aus einem Punkte O von K^2 an die Kegelschnitte einer Schar bilden eine Involution und schneiden eine Involution in K^2 ein; der Büschel um das Zentrum S derselben wird zur Schar projektiv und daher auch zur Tangenteninvolution aus S an sie. So entsteht im Büschel S eine Korrespondenz $[1, 2]$. Zu den Koinzidenzen gehört SO; denn für den Kegelschnitt der Schar, welcher SO berührt, ist SO die eine Tangente des Paars aus O — die andere ist die Tangente in O an K^2 — und die von diesem Paare überspannte Sehne von K^2. Jede der beiden andern Koinzidenzen ist Sehne von K^2, welche, mit keiner der Tangenten des überspannenden

1) Poncelet, Traité des propriétés projectives des figures, 2. Aufl. 1863, Bd. 1, S. 311, 347 (erste Auflage 1822); Applications d'Analyse et de Géométrie (1862) Bd. 1, S. 348, 480.

2) Journal für Mathematik, Bd. 66, S. 15.

Paares identisch, denselben Kegelschnitt der Schar berührt, wie diese; so daß sie mit ihnen ein Ponceletsches Dreieck bildet; und eins genügt ja.

In einer Schar gibt es daher zwei Kegelschnitte, welchen Dreiecke umgeschrieben sind, die zugleich einem gegebenen Kegelschnitte eingeschrieben sind.

194 Wie eine C_n auf einem K^2 eine involutorische Korrespondenz $[n]$ hervorruft, so gehört auch umgekehrt zu jeder von einem Kegelschnitte K^2 getragenen involutorischen Korrespondenz $[n]$ eine Direktionskurve C_n n^{ter} Klasse, welche die Verbindungslinien zugeordneter Punkte tangiert. Da jede dieser Linien zweimal Verbindungslinie ist: XX' und YY', wenn $X \equiv Y$ und $X' \equiv Y$ die verbundenen involutorisch entsprechenden Punkte sind, so repräsentiert sie, doppelt gerechnet, die Kurve $2n^{ter}$ Klasse der nicht involutorischen Korrespondenz $[n, n]$ (Nr. 180), wie wir das für $n = 1$ schon in Nr. 108 kennen gelernt haben.

Daß durch jeden Punkt von K^2 nur n Tangenten gehen, ist ja unmittelbar ersichtlich.

Ist der Träger eine unikursale ebene Kurve m^{ter} Ordnung, so ist (Nr. 180) die Klasse der Direktionskurve $\frac{1}{2} \cdot 2n(m-1) = n(m-1)$.

Wir können die Klasse n der Direktionskurve auch durch folgende Überlegung gewinnen: $\frac{1}{2}n(n+3)$ von den Verbindungslinien bestimmen eine Kurve n^{ter} Klasse; deren Tangenten rufen auf K^2 eine $[n]$ hervor, welche mit der gegebenen $[n]$ die durch jene Tangenten verbundenen $\frac{1}{2}n(n+3)$ Paare entsprechender Punkte gemein hat und deshalb identisch ist, da eine $[n]$ durch soviele Paare eindeutig bestimmt wird (Nr. 187).

Hieraus erhellt, warum die Mannigfaltigkeit der involutorischen Korrespondenzen $[n]$ in einem gegebenen Gebilde gleich ist der der Kurven n^{ter} Klasse (oder Ordnung) in gegebener Ebene[1])

In einem Strahlenbüschel O entsteht durch die auf K^2 gelegene $[n]$ eine $[2n]$; von ihren $4n$ Koinzidenzen gehen $2n$ nach den Koinzidenzen der $[n]$, die $2n$ übrigen werden durch die n Tangenten der Direktionskurve, doppelt gerechnet, repräsentiert.

Im allgemeinen Falle berührte die Direktionskurve $(n+n_1)^{ter}$ Klasse den Träger-Kegelschnitt der $[n, n_1]$ in den $n + n_1$ Koinzidenzen (Nr. 180); hier findet eine solche Berührung nicht statt; es kann ja die Direktionskurve eine beliebige Kurve n^{ter} Klasse sein. Es tritt

---

1) Wir benutzen hier den Fundamentalsatz der Kurventheorie, daß eine ebene Kurve n^{ter} Ordnung bzw. Klasse durch $\frac{1}{2}n(n+3)$ Punkte, Tangenten eindeutig bestimmt und diese Zahl ihr Mannigfaltigkeitsgrad in der Ebene ist, und werden auch den weiteren Satz heranziehen, daß alle ∞^1 Kurven n^{ter} Ordnung durch $\frac{1}{2}n(n+3)-1$ gegebene Punkte noch $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ weitere Punkte gemein haben und einen Büschel bilden, bzw. den dualen Satz.

hier auch nicht ein, was uns dort zur Berührung führte, daß nämlich ein Punkt $C \equiv D_1$, der einem Koinzidenzpunkte nahe ist, zwei ihm nahe entsprechende Punkte hat: C_1 und D. Jeder Punkt hat ja jetzt nur n entsprechende und, wenn er einem Koinzidenzpunkt nahe liegt, nur einen darunter, der ihm nahe ist.

Die ausgezeichneten Punkte ergeben sich in sehr anschaulicher Weise. Die $2n$ Koinzidenzpunkte sind die Berührungspunkte des K^2 mit den ihm und der C_n gemeinsamen Tangenten.

Die C_n ist eine beliebige Kurve n^{ter} Klasse, also allgemein und von der Ordnung $n(n-1)$ (Nr. 162); ihre $2n(n-1)$ Schnitte mit K^2 sind die Verzweigungspunkte der Korrespondenz und der zweite Schnitt, mit K^2, der Tangente an C_n ist je der zugehörige Doppelpunkt.

Wenn etwa C_n den K^2 berührt, so zählt der Berührungspunkt, weil die Tangente in ihm unter den $2n$ gemeinsamen Tangenten doppelt zählt, für zwei Koinzidenzen. Er zählt ferner für zwei Schnittpunkte und repräsentiert also zwei Verzweigungspunkte, und da die Tangente in ihm an C_n eben auch K^2 berührt, so stellt er auch den zugehörigen — ebenfalls zweifach zählenden — Doppelpunkt vor. Eine zweimal berührende Direktionskurve haben wir in Nr. 193 kennen gelernt.

Wir können nunmehr auch in einem Büschel die Anzahl der Kegelschnitte bestimmen, die zu einem gegebenen K^2 in Ponceletscher Lage sind. Die Tangentenpaare aus einem Punkte O an die Kegelschnitte des Büschels befinden sich in einer involutorischen Korrespondenz [2]; denn jeder Strahl durch O berührt zwei Kegelschnitte des Büschels und die zweiten Tangenten aus O an sie sind die ihm entsprechenden Strahlen; liegt O auf K^2, so entsteht dadurch auf diesem eine solche Korrespondenz [2], die verbindenden Sehnen umhüllen die Direktionskurve $\mathfrak{K}_2$ 2. Klasse; ihr Tangentenbüschel wird dadurch zum Kegelschnitt-Büschel projektiv. Jede Tangente von $\mathfrak{K}_2$ schneidet in K^2 eine Sehne ein, über der das Tangentenpaar aus O an den entsprechenden Kegelschnitt steht; ihr ordnen wir die vier Tangenten zu, welche dieser mit $\mathfrak{K}_2$ gemein hat. Andererseits berührt jede Tangente von $\mathfrak{K}_2$ zwei Kegelschnitte des Büschels, denen dann wieder zwei Tangenten von $\mathfrak{K}_2$ entsprechen, auf denen die Sehnen von K^2 liegen, die von den Tangentenpaaren aus O an jene Kegelschnitte überspannt werden. Zu den sechs Koinzidenzen der so im Tangentenbüschel von $\mathfrak{K}_2$ entstehenden Korrespondenz [2, 4] gehören die Tangenten aus O an $\mathfrak{K}_2$; die vier übrigen führen zu Ponceletschen Dreiecken.

In einem Büschel gibt es demnach vier Kegelschnitte, welche umgeschriebene Dreiecke besitzen, die einem gegebenen Kegelschnitte eingeschrieben sind.

195 Das eine von zwei Gebilden, die in einer Korrespondenz [2, 2] stehen, sei ein Kegelschnitt K^2, so haben wir (Nr. 172, 185) auf K^2 eine involutorische Korrespondenz [2], in der zwei Punkte einander zugeordnet sind, die demselben Elemente des andern Gebildes u_1 korrespondieren; der Tangentenbüschel der Direktionskurve C_2 dieser Korrespondenz ist demnach zu dem Gebilde u_1 projektiv. Es liegt also, da eine Übertragung von einem beliebigen Gebilde u, das zu u_1 in [2, 2] sich befindet, auf K^2 immer zulässig ist, der allgemeine Fall einer [2, 2] vor, wenn wir die einem Elemente von u_1 auf K^2 korrespondierenden Punkte durch die Tangente von C_2 einschneiden, welche projektiv jenem Elemente entspricht, oder noch einfacher, indem wir u_1 durch den projektiven Tangentenbüschel von C_2 ersetzen, wenn wir jeder Tangente von C_2 ihre Schnittpunkte mit K^2 zuordnen. Wir haben diese einfache Gestalt der Korrespondenz [2, 2] schon in Nr. 175 kennen gelernt und werden an ihr den Satz von der Projektivität der Verzweigungswürfe von neuem beweisen (Nr. 331).

Diese Korrespondenz lehrt aber, daß die beiden ebenfalls projektiven Würfe der Doppelelemente ein anderes Doppelverhältnis haben, als die der Verzweigungselemente; denn jenes ist das der Tangenten von C_2 in den Schnittpunkten, also das der Schnittpunkte selbst, insofern sie Punkte von C_2 sind, und als solche haben sie ein anderes Doppelverhältnis wie als Punkte von K^2.

196 Zwei involutorische Korrespondenzen $[n]$, $[n']$ seien ineinander liegend; wir übertragen sie auf denselben Kegelschnitt K^2; die gemeinsamen Tangenten der Direktionskurven n^{ter} und n'^{ter} Klasse lehren, daß die beiden Korrespondenzen nn' gemeinsame Paare entsprechender Elemente haben.

Also besitzen z. B. zwei ineinander liegende Involutionen n^{ten} und n'^{ten} Grades $(n-1)(n'-1)$ Paare von Elementen, die sowohl zu einer Gruppe der einen wie zu einer der anderen Involution gehören.

Und, in einer involutorischen Korrespondenz $[n]$ gibt es n Paare entsprechender Elemente, die zugleich in einer demselben Gebilde angehörigen Involution gepaart (oder in bezug auf zwei gegebene Elemente des Gebildes harmonisch) sind.

Wir bestätigen die Klasse $(m-1)n$ der Direktionskurve einer von einer unikursalen Kurve m^{ter} Ordnung getragenen Korrespondenz $[n]$. Durch einen Punkt der C^m gehen zunächst die n Strahlen, die ihn mit den entsprechenden Punkten verbinden; ferner schneidet der Strahlenbüschel um ihn in die Kurve eine Involution $(m-1)^{ten}$ Grades ein; die $(m-2)n$ Paare, die sie, als $[m-2]$, mit $[n]$ gemeinsam hat, lehren, daß durch den Punkt noch so viele weitere Tangenten der Direktionskurve gehen.

Zwei involutorische Korrespondenzen $[n]$ auf demselben Kegelschnitt führen zu einem Büschel von solchen Korrespondenzen; die

Direktionskurven erzeugen die Schar, welche durch diejenigen der gegebenen Kurven bestimmt wird. Diese Schar wird durch $\frac{1}{2}n(n+3)-1$ Grundtangenten festgelegt, welche dann die $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ übrigen bestimmen:

Alle involutorischen Korrespondenzen [n] auf demselben Träger, welche $\frac{1}{2}n(n+3)-1$ Paare entsprechender Elemente gemeinsam haben, haben noch $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ weitere Paare gemeinsam, im ganzen n^2 Paare.

Die $\frac{1}{2}n(n+3)-1$ gegebenen Paare liefern für die $\frac{1}{2}n(n+3)$ wesentlichen Konstanten der Verwandtschaftsgleichung nur $\frac{1}{2}n(n+3)-1$ Gleichungen; es bleibt eine, λ, unbestimmt, und die Gleichung bekommt, wie in Nr. 156, die Form:

$$f(x, x_1) + \lambda f_1'(x, x_1) = 0.$$

Setzen wir, im Falle $n=2$, die Koeffizienten $a_{22} + \lambda b_{22}, \ldots$ in die Bedingungsgleichung II für die kubische Involution (Nr. 191) ein, so lehrt die entstehende quadratische Gleichung in λ, daß ein Büschel von involutorischen Korrespondenzen [2] zwei kubische Involutionen enthält. Ist sein Träger wiederum ein Kegelschnitt K^2, so haben wir von neuem erkannt, daß sich in einer Schar zwei Kegelschnitte befinden, die in Ponceletscher Lage zu K^2 sind.

Durch jeden Punkt P von K^2 gehen zwei Kegelschnitte der Schar; also ist P für zwei Korrespondenzen [2] des Büschels Verzweigungspunkt. Seine Tangente an K^2 wird von einem Kegelschnitt der Schar berührt; folglich ist P für eine Korrespondenz des Büschels Koinzidenzpunkt.

Die gemeinsamen Tangenten der Kegelschnitte der Schar mit K^2 rufen in dessen Tangentenbüschel eine Involution 4. Grades hervor (Nr. 190); also erzeugen auch ihre Berührungspunkte, die Koinzidenzpunkte, eine solche.

Die Berührungspunkte der Tangenten aus P an die Kegelschnitte der Schar bilden eine Kurve 3. Ordnung, welche durch P doppelt geht, denn er ist für die beiden durchgehenden Kegelschnitte Berührungspunkt und jeder Strahl durch P enthält noch einen Berührungspunkt. In den vier übrigen Schnitten dieser Kurve mit K^2 ergeben sich Verzweigungspunkte, deren zugehöriger Doppelpunkt P ist. Jeder Punkt von P von K^2 ist also für vier Korrespondenzen des Büschels Doppelpunkt.

Ersetzt man aber die Schar durch einen Büschel von Kegelschnitten, so bilden die Korrespondenzen [2] auf K^2, deren Direktionskurven sie sind, ein quadratisches System, d. h. ein solches, in welchem zwei gegebene Punkte zu zweien als entsprechende gehören. Nun ist jeder Punkt P auf K^2 für eine Korrespondenz dieses Systems Verzweigungspunkt,

und die Gruppen der Verzweigungspunkte bilden eine Involution 4. Grades (Nr. 190). Für zwei Korrespondenzen ist P Koinzidenzpunkt, und für fünf Korrespondenzen ist er Doppelpunkt. Denn die Kurve der Berührungspunkte aus P an die Kegelschnitte des Büschels, auch 3. Ordnung, hat P nur zum einfachen Punkt; jeder Strahl durch ihn enthält noch zwei Berührungspunkte.

197 Ein wichtiger Fall ist, daß die Grundpunkte des Kegelschnitt-Büschels sämtlich auf K^2 liegen; dann haben alle Korrespondenzen dieselben zu gemeinsamen Verzweigungspunkten; nennen wir dies System ein System konsingulärer Korrespondenzen [2]. Wir wollen diese gemeinsamen Verzweigungspunkte wieder mit A, B, C, D bezeichnen.

Die eben besprochene Kurve 3. Ordnung geht durch die vier Grundpunkte, und diese sind also vier von den fünf Schnitten mit K^2; für jeden der vier gemeinsamen Verzweigungspunkte gibt es also eine Korrespondenz im System, für welche ein gegebener Punkt P der zugehörige Doppelpunkt ist. Zum Büschel gehört in diesem Falle auch der Träger-Kegelschnitt K^2; und seine Tangente in P wird auch Tangente an die Kurve 3. Ordnung der Berührungspunkte; der fünfte Schnitt hat sich daher mit P vereinigt.

Diejenige Korrespondenz des Systems, für welche K^2 selbst Direktionskurve ist, ist Identität: die beiden Tangenten aus einem P von K^2 an ihn, als Direktionskurve, haben sich vereinigt in der Tangente von K^2 in P, und die beiden weiteren Schnitte mit K^2, die dem P entsprechenden Punkte, haben sich mit ihm vereinigt. In dieser Korrespondenz ist jeder Punkt von K^2 Verzweigungspunkt und zugleich zugehöriger Doppelpunkt.

Die Tangente in P an K^2 wird von einem weiteren Kegelschnitte des Büschels berührt; also ist jeder Punkt von K^2 für eine von den Korrespondenzen des Systems Koinzidenzpunkt (abgesehen von der Identität), und die Gruppen der Koinzidenzpunkte bilden eine biquadratische Involution, die wir gleich noch genauer untersuchen werden.

Wir fanden eben, daß ein Punkt auf K^2, einem der gemeinsamen Verzweigungspunkte als Doppelpunkt zugeordnet, eine Korrespondenz im Systeme bestimmt; die Verbindungslinie beider Punkte, als Tangente in einem Grundpunkte, bestimmt ja auch eine Kurve im Büschel.

Zwei beliebige entsprechende Punkte bestimmen zwei Korrespondenzen im Systeme; denn ihre Verbindungslinie berührt zwei Kegelschnitte des Büschels.

Die Koinzidenzpunkte bilden eine Involution 4. Grades, die einem der Verzweigungspunkte, etwa A, zugehörigen Doppelpunkte eine einfache Punktreihe, projektiv zu der Involution; also gehört der Doppel-

punkt fünfmal zu der entsprechenden Gruppe der Koinzidenzpunkte. Einmal geschieht das in A; in den vier andern Fällen sind die beiden im Doppelpunkte vereinigten dem A entsprechenden Punkte auch einander entsprechend; es liegt kubische Involution vor (Nr. 191).

Die zu A, B, C, D in derselben Korrespondenz des Systems gehörigen Doppelpunkte seien $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$; sie durchlaufen vier projektive Punktreihen auf K^2. Im Büschel (A, B, C, D) der Direktionskurven befinden sich drei Geradenpaare, welche, als Kurven 2. Klasse, Doppel-Strahlenbüschel um die Doppelpunkte (AB, CD), (AC, BD), (AD, BC) sind. Die zugehörigen Korrespondenzen sind Doppelinvolutionen. In einer solchen Doppelinvolution ist jeder Punkt Verzweigungspunkt und der in der Involution gepaarte der zugehörige Doppelpunkt (im allgemeinen von ihm verschieden, mit ihm vereinigt nur in einem der Doppelpunkte der Involution). In diesen drei Doppelinvolutionen sind also zu A zugehörige Doppelpunkte B, C, D, zu B zugehörige $A, D, C, \ldots$; in der Identität gehört A zu sich selbst. Daher gilt für die vier projektiven Reihen der Doppelpunkte:

$$ABCD\mathfrak{A} \;\overline{\wedge}\; BADC\mathfrak{B} \;\overline{\wedge}\; CDAB\mathfrak{C} \;\overline{\wedge}\; DCBA\mathfrak{D}.$$

In die Involution 4. Grades der Koinzidenzpunkte bringen die drei Doppelinvolutionen drei Gruppen, welche je aus den doppelt gerechneten Doppelpunkten der betreffenden Involution bestehen. Diese Paare der Doppelpunkte sind je harmonisch zu AB, CD; AC, BD; AD, BC. Folglich haben wir es mit der uns schon bekannten biquadratischen Involution zu tun (Nr. 136), die aus der Gruppe $ABCD$ abgeleitet wird und zu der diese Gruppe selbst gehört; denn sie ist durch zwei der drei ausgezeichneten Gruppen bestimmt. An sich hat die im Systeme befindliche Identität ∞^1 Koinzidenzpunkte, zu den vier Punkten A, B, C, D kommen wir, wenn diese Korrespondenz im Kontinuum des Systems passiert wird.

In Nr. 136 ergab sich, daß die Gruppe der Involution, zu der ein beliebiger Punkt P gehört, vervollständigt wird durch die Punkte, die ihm in den Involutionen AB, CD; AC, BD; AD, BC gepaart sind. Das können wir an unserer Figur ersehen. Koinzidenzpunkte einer Korrespondenz des Systems sind die Berührungspunkte, mit K^2, der gemeinsamen Tangenten dieses Kegelschnitts mit der Kurve aus $(ABCD)$, welche Direktionskurve ist. Das Vierseit dieser Tangenten hat dasselbe Diagonaldreieck wie das Viereck $ABCD$[1]); betrachten wir zwei von den Tangenten, die sich auf der dem Diagonalpunkte (AB, CD) gegenüberliegenden Diagonale schneiden; so geht die Verbindungslinie der Berührungspunkte mit K^2 durch (AB, CD) als den

1) Es sei gestattet, diesen Satz vom gemeinsamen Polardreiecke zweier Kegelschnitte, den wir noch beweisen werden, hier als bekannt vorauszusetzen.

Pol dieser Diagonale; folglich sind die beiden Berührungspunkte in der Involution AB, CD gepaart.

Wir nehmen an, daß zu den vier Verzweigungselementen A, B, C, D noch ein fünftes tritt, dann ist die Gleichung 4. Grades für die Parameter der Verzweigungselemente eine Identität; jedes Element des Trägers ist Verzweigungselement.

Das tritt ein bei einer Doppelinvolution, und jedes Element, als Verzweigungselement, hat das ihm in der Involution gepaarte zum zugehörigen Doppelelemente.

Ist aber für eine involutorische Korrespondenz [2], auf einem K^2 gelegen, die Direktionskurve $\mathfrak{K}_2$ nicht ein Doppelbüschel, so bewirkt der fünfte Verzweigungspunkt, weil er auf $\mathfrak{K}_2$ liegen muß, Identität von $\mathfrak{K}_2$ und K^2, und die Korrespondenz ist Identität.

Wenn also bei einer involutorischen Korrespondenz [2] zu den vier Verzweigungselementen noch ein fünftes Verzweigungselement tritt, so sind alle Elemente Verzweigungselemente. Die Korrespondenz ist dann entweder Identität, und durchweg ist das Doppelelement mit seinem Verzweigungselemente vereinigt; oder sie ist Doppelinvolution; zu jedem Elemente ist das ihm in der Involution gepaarte das zugehörige Doppelelement, und Vereinigung tritt nur in den Doppelelementen der Involution ein.

198 Es liege eine involutorische Korrespondenz [2] vor; zu einem Elemente X_1 sei X_2 das *eine* entsprechende, das *zweite*, welches diesem X_2 entspricht, sei X_3, und so weiter fort, bis wir zu X_{n+1} gelangen, welches wir dem X_1 zuordnen. Offenbar ist X_n das eine entsprechende Element von X_{n+1}, X_{n-1} das zweite Element, welches X_n entspricht; usw. Die Beziehung zwischen X_1 und X_{n+1} ist involutorisch. Ferner beim Ausgange von X_1 kann der erste Schritt zweifach gemacht werden, da es freisteht, zu welchem der beiden entsprechenden Elemente übergegangen werden soll; jeder weitere Schritt ist eindeutig. Es entsprechen daher jedem X_1 zwei Elemente X_{n+1} und die Korrespondenz zwischen ihnen ist ebenfalls eine [2], welche zur Unterscheidung von der gegebenen $[2] = [2]^1$ mit $[2]^n$ bezeichnet werde, weil n Schritte zu machen sind. Die vier Koinzidenzen, bei denen $X_{n+1} \equiv X_1$, scheinen zu in sich zurückkehrenden Gruppen zu führen, wo also X_1 das zweite dem X_n entsprechende Element ist. Aber die Sache ist doch anders.

Es sei n gerade und A ein Verzweigungselement von [2], das wir jedoch $A_{\frac{n}{2}+1}$ nennen wollen; seine beiden entsprechenden haben sich vereinigt: in $A_{\frac{n}{2}}$, das zweite entsprechende dazu sei $A_{\frac{n}{2}-1}$, und so fort bis A_1. Nehmen wir nun dieses Element A_1 als Ausgangs-

element, so erhalten wir, zu A_2 übergehend, die Reihe

$$A_1 A_2 \ldots A_{\frac{n}{2}} A_{\frac{n}{2}+1};$$

aber für $A_{\frac{n}{2}+1}$ ist das zweite entsprechende $A_{\frac{n}{2}}$; dann ergibt sich $A_{\frac{n}{2}-1}$, und die Reihe

$$X_1 X_2 \ldots X_{\frac{n}{2}} X_{\frac{n}{2}+1} X_{\frac{n}{2}+2} X_{\frac{n}{2}+3} \ldots X_{n+1}$$

von vorhin ist in diesem Falle:

$$A_1 A_2 \ldots A_{\frac{n}{2}} A_{\frac{n}{2}+1} A_{\frac{n}{2}} A_{\frac{n}{2}-1} \ldots A_1;$$

wir erhalten so eine Koinzidenz von $[2]^n$ und, weil vier Verzweigungselemente vorhanden sind, auf diese Weise alle vier Koinzidenzen. Im allgemeinen sind nur so viele, und die Koinzidenzen haben uns nicht, wie wir wünschen, zu einem n-elementigen in sich zurückkehrenden Zyklus geführt, sondern zu einem aus $\frac{n}{2}+1$ Elementen bestehenden, der hin und zurück durchlaufen wird.

Wenn n ungerade ist, sei $B_{\frac{n+1}{2}}$ eines der vier Koinzidenzelemente der gegebenen [2]; das eine entsprechende ist es selbst, das andere sei $B_{\frac{n-1}{2}}$, das zweite diesem entsprechende $B_{\frac{n-3}{2}}$, und so fort bis B_1. Von diesem ausgehend haben wir die Reihe:

$$B_1 \ldots B_{\frac{n-1}{2}} B_{\frac{n+1}{2}} B_{\frac{n+1}{2}} B_{\frac{n-1}{2}} \ldots B_1;$$

also liefern die vier Koinzidenzen von [2] diejenigen von $[2]^n$, mithin ebenfalls nicht solche Figuren, wie wir sie haben wollen, und wir stellen zunächst das negative Ergebnis fest:

Eine beliebige involutorische Korrespondenz [2] besitzt im allgemeinen keinen n-elementigen Zyklus, in welchem jedem Element das folgende, dem letzten das erste entspricht.

Man beachte, daß bei den erhaltenen ausgearteten Figuren nicht alle Elemente gleichartig sind. Das Element A_1 bzw. B_1 hat zu seinen Nachbarn beidemal dasselbe Element A_2 bzw. B_2, nicht die beiden ihm in [2] entsprechenden Elemente, während dies bei jedem andern Elemente der Figur gilt. Also nur, wenn wir mit ihm anfangen, findet Rückkehr statt, bei jedem der andern Elemente $A_2, \ldots$ bzw. $B_2, \ldots$ nicht.

Wenn aber ein ordentlicher Zyklus vorhanden ist, dann hat die zu $[2]^n$ gehörige Koinzidenzgleichung 4. Grades mehr als vier Wurzeln:

sie ist eine Identität, jedes Element X_1 fällt mit X_{n+1} zusammen und liefert einen Zyklus.

Wenn also eine involutorische Korrespondenz [2] einen n-elementigen Zyklus besitzt, in welchem jedem Elemente das folgende, dem letzten das erste entspricht, so hat sie deren ∞^1; mit jedem Elemente kann man einen solchen Zyklus beginnen und jeden Zyklus mit jedem seiner Elemente. Jedes Element eines ordentlichen Zyklus hat zu Nachbarn seine beiden entsprechenden in [2].

Die Zyklen bilden die Gruppen einer Involution n^{ten} Grades, die bei $n = 3$ und nur bei $n = 3$ mit der gegebenen [2] identisch ist.

Die Korrespondenz [2] befinde sich wiederum in der Punktreihe eines Kegelschnitts K^2, eingeschnitten durch die Tangenten eines andern C_2 (oder dual im Tangentenbüschel von C_2, hervorgerufen durch die Punktreihe von K^2), so haben wir:

Es gibt im allgemeinen kein ordentliches n-Eck, welches dem Kegelschnitte K^2 ein- und dem C_2 umgeschrieben ist.

Die ausartenden Figuren, welche zu den Koinzidenzen der $[2]^n$ in der Punktreihe von K^2 führen, decken sich nicht mit denen, welche die Koinzidenzen der $[2]^n$ im Tangentenbüschel von C_2 liefern. Ist z. B. $n = 3$, so liegen B_1, B_2, B_3 so auf K^2, daß B_2 und B_3 im Berührungspunkte von K^2 mit einer gemeinsamen Tangente von K^2 und C_2 sich vereinigt haben, während B_1 der zweite Schnitt, mit K^2, der zweiten Tangente aus jenem Punkte an C_2 ist. Hingegen liegen b_1, b_2, b_3 so im Tangentenbüschel von C_2, daß b_2, b_3 sich in der Tangente von C_2 in einem der Schnitte von K_2 und C_2 sich vereinigen, während b_1 die zweite Tangente von C_2 aus dem zweiten Schnittpunkte jener Tangente mit K^2 ist.

Haben aber die beiden Kegelschnitte K^2 und C^2 eine solche Lage zueinander, daß ein ordentliches n-Eck vorhanden ist, das dem K^2 ein-, dem C_2 umgeschrieben ist, so gibt es ∞^1 solche Polygone. Jeder Punkt von K^2 kann Ecke, jede Tangente von C_2 Seite eines derartigen Polygons sein, und die Gruppen der zusammengehörigen Ecken, bzw. Seiten erzeugen Involutionen n^{ten} Grades auf K^2, um C_2 (Ponceletsche Polygone).

Die Nachbarecken einer Ecke eines solchen Polygons entsprechen ihr in der [2], welche C_2 auf K^2 induziert, die Nachbarseiten einer Seite in der [2], die durch K^2 um C_2 entsteht.

Ist n gerade, so ist einer Ecke die Gegenecke eindeutig zugeordnet, da sie bei beiden Ausgangsweisen in $\frac{n}{2}$ Schritten erreicht wird.

Bei einem Systeme Ponceletscher Polygone von gerader Seitenzahl sind die Gegenecken involutorisch gepaart, und

ebenso die Gegenseiten. Diese von K^2 und C_2 getragenen Involutionen haben dasselbe Zentrum und dieselbe Axe: Ecke und Gegenseite des gemeinsamen Polardreiecks.

Denn schneiden sich die beiden Seiten b, c in der Ecke A, die Gegenseiten b', c' in der Gegenecke A', so geht AA' durch das Zentrum der ersten Involution, als Verbindungslinie $(bc, b'c')$ durch das der andern.

Da wir jede [2] auf einen K^2 übertragen können und dann eine Direktionskurve C_2 haben, so wollen wir bei dieser anschaulicheren Figur bleiben.

Wir fanden, daß in jedem Falle X_1 und X_{n+1} sich in einer Korrespondenz [2] befinden, die wir $[2]^n$ genannt haben, weil $X_1 X_{n+1} n$ sich aneinander schließende Verbindungssehnen überspannt; die zugehörige Direktionskurve heiße C_2^n. Wir erhalten zu X_1 zwei X_{n+1}, weil wir von X_1 zu dem einen oder andern entsprechenden Punkte übergehen können, die weiteren Schritte aber eindeutig sind. Ist also X_1 ein Verzweigungspunkt von [2], so vereinigen sich die beiden entsprechenden, also auch die beiden X_{n+1}; er ist daher auch Verzweigungspunkt von $[2]^n$; alle Direktionskurven C_2^n gehen daher durch die vier Verzweigungspunkte von [2], die gegemeinsamen Punkte von K^2 und C_2, welche auch Verzweigungspunkte aller $[2]^n$ sind. Die C_2^n gehören also dem Büschel $K^2 C_2$ an.

Es sei $n = 2$ ins Auge gefaßt, $X_1 X_2$, $X_2 X_3$ sind die Tangenten aus X_2 an C_2 und $X_1 X_3$ umhüllt den C_2^2; konstruieren wir den Berührungspunkt. Wenn $X_1 X_2 X_3$, $Y_1 Y_2 Y_3$ zwei solche Dreiecke sind, so ist $X_1 X_2 X_3 Y_1 Y_2 Y_3$ dem K^2 eingeschrieben, und nach Pascals Satz liegen $(X_1 X_2, Y_1 Y_2)$, $(X_2 X_3, Y_2 Y_3)$ und $(X_3 Y_1, Y_3 X_1)$ in einer Gerade l; der letzte von diesen Punkten und der Punkt $(X_1 X_3, Y_1 Y_3)$ sind, als Diagonalpunkte eines dem K^2 eingeschriebenen Vierecks, konjugiert in bezug auf K^2. Nähern sich die beiden Dreiecke, so gehen $(X_1 X_2, Y_1 Y_2)$, $(X_2 X_3, Y_2 Y_3)$ in die Berührungspunkte von $X_1 X_2$, $X_2 X_3$ mit C_2 über, also wird l die Polare von X_2 in bezug auf C_2; $(X_3 Y_1, Y_3 X_1)$ wird der Schnitt von $X_1 X_3$ mit l und $(X_1 X_3, Y_1 Y_3)$ der Berührungspunkt von $X_1 X_3$ mit C_2^2. Er ist, weil zu dem vorangehenden Punkte in bezug auf K^2 konjugiert, der vierte harmonische, in bezug auf X_1 und X_3, zu dem Schnitte mit der Polare von X_2 in bezug auf C_2.

Jede Diagonale des Zugs $X_1 X_2 \ldots X_{n+1}$ umhüllt einen Kegelschnitt jenes Büschels, so auch $X_1 X_n$; er ist mit C_2^{n-1} zu bezeichnen und die Korrespondenz mit $[2]^{n-1}$. Wir fanden oben: geht man mit X_1 von einem A_1 oder B_1 aus, je nachdem n gerade oder ungerade ist, so fällt X_{n+1} in denselben Punkt, X_n also in A_2, bzw. B_2; daher ist $A_1 A_2$, $B_1 B_2$, welche Tangente von C_2 ist, auch Tangente

von C_2^{n-1}, und wir haben so die vier gemeinsamen Tangenten dieser Kurven.

Ist nun ein Ponceletsches Polygon vorhanden, so ist $X_n X_1$ (oder vielmehr jede Seite) gemeinsame Tangente von C_2 und C_2^{n-1}; denn X_1 und X_n sind, als X_{n+1} und X_n, in [2] entsprechend. Die beiden Kurven C_2 und C_2^{n-1} sind identisch; die letzte Sehne $X_n X_1$ berührt, von welchem X_1 auch ausgegangen werde, den C_2.

199 Wenn bei K^2 und C_2 ein System Ponceletscher n-Ecke möglich ist, so muß auch von jedem Verzweigungspunkte oder Schnittpunkt von K^2 und C_2 ein solches ausgehen. Legt man aber X_1 in denselben, so müssen die Nachbarn X_2 und X_n sich vereinigen, ebenso X_3 und X_{n-1} usw.

Ist nun n gerade, so fallen auch $X_{\frac{n}{2}}$ und $X_{\frac{n}{2}+2}$, die beiderseitigen Nachbarn von $X_{\frac{n}{2}+1}$, zusammen; dieser Punkt ist auch ein Verzweigungspunkt, und das Polygon artet so aus, daß es von X_1 nach $X_{\frac{n}{2}+1}$ und nun durch dieselben Punkte zurückläuft. Umgekehrt, es sei ein solcher Zug vorhanden; X_n fällt in X_2, also ist $X_1 X_2$ mit $X_1 X_n$ identisch; als $X_1 X_2$ ist diese Gerade Tangente von C_2 in X_1, als $X_n X_1$ berührt sie C_2^{n-1} und, da C_2^{n-1} durch den Verzweigungspunkt X_1 geht, in diesem Punkte. Folglich haben die beiden Kurven C_2 und C_2^{n-1} die vier Punkte $K^2 C_2$ und die Tangente in einem von ihnen gemeinsam (fünf Punkte, von denen zwei unendlich nahe auf der Tangente), sind daher identisch[1]); woraus die Existenz Ponceletscher n-Ecke folgt.

Ein Kennzeichen für Ponceletsche n-Ecke gerader Seitenzahl bei zwei Kegelschnitten K^2 und C_2 ist, daß zwischen zwei von den vier Schnitten ein dem K^2 eingeschriebener Zug von $\frac{n}{2}$ Tangenten des C_2 möglich ist, dessen erste und letzte in ihnen berühren.

Zwischen den beiden andern Schnitten muß dann ein eben solcher Zug laufen.

Man lege nun den Anfangspunkt X_1 eines Ponceletschen Polygons in den Punkt von K^2, in welchem eine gemeinsame Tangente von K^2 und C_2 ersteren berührt, also in eine der Koinzidenzen von [2]; X_n sei der koinzidierende entsprechende Punkt, X_2 der andere, es wird dann X_{n-1} mit X_3 identisch, usw., also $X_{\frac{n}{2}}$ mit $X_{\frac{n}{2}+1}$; d. h. $X_{\frac{n}{2}}$

1) Die Tangente ist eine der vier uns schon bekannten gemeinsamen Tangenten von C_2 und C_2^{n-1}; sie hat aber auch denselben Berührungspunkt.

ist ein eben solcher Punkt wie X_1. Und wiederum umgekehrt, es sei ein solcher Zug vorhanden. $X_n X_1$ ist Tangente von C_2^{n-1}; sie ist aber auch Tangente von C_2, nämlich die in X_1 den K^2 berührende gemeinsame Tangente von K^2 und C_2. Also haben C_2 und C_2^{n-1} fünf gemeinsame Tangenten und sind identisch.

Ein zweites Kennzeichen für Ponceletsche n-Ecke gerader Seitenzahl ist, daß zwischen zwei Berührungspunkten von K^2 mit gemeinsamen Tangenten ein dem K^2 eingeschriebener Zug von $\frac{n}{2} - 1$ Tangenten von C_2 geht, zu denen nicht diese gemeinsamen Tangenten gehören. Dieser Zug, hin und zurück durchlaufen, mit Einschaltung der gemeinsamen Tangenten, als Seiten von der Länge 0, bildet ein ausgeartetes Polygon.

Zwischen den Berührungspunkten des K^2 mit den beiden andern gemeinsamen Tangenten muß ein ebensolcher Zug laufen.

Und ist von den vorhin und jetzt beschriebenen Zügen einer vorhanden, so sind vier vorhanden, zwei der einen und zwei der andern Art.

Jeder Zug der ersten Art liefert $\frac{n}{2} - 1$ und jeder der zweiten Art $\frac{n}{2}$ Doppelpunkte der Involution n^{ten} Grades auf K^2, so daß sich die notwendigen $2(n-1)$ Doppelpunkte ergeben.

Wenn n ungerade ist und X_1 wieder ein Punkt K^2C_2, so fallen $X_{\frac{n+1}{2}}$ und $X_{\frac{n+3}{2}}$ zusammen, also zwei entsprechende; wir haben in $X_{\frac{n+1}{2}}$ eine Koinzidenz. Bei einem solchen Zuge kommt als fünfte gemeinsame Tangente von C_2 und C_2^{n-1} hinzu die Tangente von C_2 in X_1 oder die gemeinsame von K^2 und C_2, welche K^2 in $X_{\frac{n+1}{2}}$ berührt, wie die beiden vorangehenden Fälle gezeigt haben.

Folglich haben wir als Kennzeichen für Ponceletsche n-Ecke ungerader Seitenzahl, daß von einem der Schnitte K^2C_2 nach einem der Berührungspunkte des K^2 mit einer gemeinsamen Tangente ein dem K^2 eingeschriebener Zug von $\frac{n-1}{2}$ Tangenten von C_2 läuft, zu dem die Tangente des C_2 in dem Schnitte, aber nicht die gemeinsame Tangente gehört. Hin und zurück durchlaufen mit Einschaltung dieser Tangente, gibt er das ausgeartete Ponceletsche Polygon.

Ein solcher Zug zieht drei andere nach sich.

Jeder der vier Züge liefert $\frac{n-1}{2}$ Doppelpunkte der Involution n^{ten} Grades.

Handelt es sich um Dreiecke, so muß die Tangente von C_2 in einem gemeinsamen Punkte von K^2 und C_2 durch den Berührungspunkt des K^2 mit einer der gemeinsamen Tangenten gehen. Und geschieht das einmal, so geschieht es viermal[1]).

Man kann diese Kennzeichen auch selbständig für eine involutorische Korrespondenz [2] aussprechen. Sie ist zyklisch vom Grade n, d. h. es existiert ein Zyklus von n Punkten (und dann ∞^1), von denen jeder den folgenden zum entsprechenden hat und der letzte den ersten, wenn man, bei n gerade, mit X_1 von einem Verzweigungselemente ausgehend, mit $X_{\frac{n}{2}+1}$ in ein ebensolches gelangt, oder, mit X_1 von einem Koinzidenzelemente ausgehend, mit $X_{\frac{n}{2}}$ zu einem solchen Elemente, oder, bei n ungerade, wenn man, mit X_1 von einem Verzweigungselemente ausgehend, mit $X_{\frac{n+1}{2}}$ zu einem Koinzidenzelemente gelangt (oder umgekehrt).

Bei zwei Kreisen bilden sowohl die Schnittpunkte zwei wesentlich verschiedene Gruppen, die unendlich fernen und die endlichen, als auch die gemeinsamen Tangenten, äußere und innere. Wir erhalten daher, bei geradem n, zwei Fälle, je nachdem die Züge zwischen gleichartigen oder ungleichartigen Punkten laufen. Steiner[2]) hat z. B. den ersten zudem einfacheren Fall unberücksichtigt gelassen. Wir bieten dem Leser die Steinerschen Bedingungsformeln, vervollständigt und rational gemacht, dar; der Beweis würde uns zu sehr von unserm Thema abführen.

R, r sind die Radien der Kreise K^2 und C_2, a die Entfernung der Mittelpunkte.

Dreiecke: $(R^2-a^2)^2-4R^2r^2=0$ oder $R^2-a^2=\pm 2Rr$[3]);

Vierecke erster Art: $R=a$, also überaus einfach,

Vierecke zweiter Art: $(R^2-a^2)^2-2r^2(R^2+a^2)=0$[4]);

---

1) Die Zuordnung ist dabei folgende: Wenn den Schnittpunkten A, B die gemeinsamen Tangenten a, b zugeordnet werden, so geht AB durch eine Ecke des gemeinsamen Polardreiecks und ab liegt auf der Gegenseite. — Diese Kennzeichen rühren von Cayley her: Philos. Transactions Bd. 151, Teil 1 (1861), S. 225; Math. Papers, Bd. 4, S. 292.

2) Gesammelte Werke, Bd. I, S. 159. — Vgl. auch Durège, Elliptische Funktionen, Abschnitt XI; Loria, I poligoni di Poncelet (Turin 1889).

3) Schon Euler bekannt, aber nur in der Form: $R^2-a^2=2Rr$, die dem Falle entspricht, wenn C_2 sich im Innern des Dreiecks befindet: Novae Commentationes Petropol. Bd. 11, S. 114. Daher: Eulersche Formel, und damals als Beziehung der Kreise ermittelt, die einem gegebenen Dreieck um- und eingeschrieben sind.

4) Steiners beide Formeln, sowie die von Jacobi-Durège sind nur verschiedene Gestalten derselben Formel für die Vierecke zweiter Art.

Fünfecke: $(R^2-a^2)^6-12(R^2-a^2)^4 R^2 r^2$

$$+16(R^2-a^2)^2 R^2 r^4(R^2+2a^2)-64R^2r^6a^4=0;$$

Sechsecke erster Art: $(R^2-a^2)^2-4r^2a^2=0,$

Sechsecke zweiter Art: $3(R^2-a^2)^4-4(R^2-a^2)^2r^2(R^2+a^2)$

$$-16R^2r^4a^2=0;$$

Achtecke erster Art: $(R^2-a^2)^4-16R^2r^4a^2=0,$

Achtecke zweiter Art: $8r^2[(R^2-a^2)^2-r^2(R^2+a^2)]\cdot$

$$\{(R^2+a^2)[(R^2-a^2)^4+4R^2r^4a^2]-8r^2a^2R^2(R^2-a^2)^2\}$$

$$-[(R^2-a^2)^4-4R^2r^4a^2]^2=0.$$

In eigentümlicher Weise muß die zyklische involutorische Korrespondenz [2] ausarten, wenn sie 2. Grades ist. Wenn durchweg $X_3=X_1$, so entsprechen jedem Elemente zwei vereinigte Elemente, also im Grunde nur eins; wir haben es mit einer doppelt zu rechnenden gemeinen Involution zu tun. C_2 ist ein doppelter Strahlenbüschel.

Auch das Steinersche Schließungsproblem bei einer ebenen Kurve 3. Ordnung C^3[1]) läßt sich in ganz ähnlicher Weise auf eine involutorische Korrespondenz [2] zurückführen. Auf C^3 seien zwei feste Punkte P, Q gegeben; X_1 sei ein beliebiger Punkt der Kurve, Y_1 der dritte Schnitt von PX_1, X_2 der dritte Schnitt von QY_1, Y_2 der von PX_2, usw. bis zu X_{n+1}.

Die beiden von PY_1 und PX_{n+1} beschriebenen Strahlenbüschel stehen in einer involutorischen Korrespondenz [2]. Im Falle n gerade ist, sei $A_{\frac{n}{2}+1}\equiv B_{\frac{n}{2}+1}$ der Berührungspunkt einer der vier von P kommenden Tangenten der C^3, und, wenn n ungerade ist, $B_{\frac{n+1}{2}}\equiv A_{\frac{n+3}{2}}$ derjenige einer der vier von Q kommenden Tangenten. Es fallen dann, wenn wir rückwärts und vorwärts weiter gehen, B_1 und A_{n+1} und die Strahlen PA_1B_1 und PA_{n+1} zusammen; eine Koinzidenz der Strahlen entsteht, aber eben durch Koinzidenz von B_1 und A_{n+1}, aber nicht, wie es gewünscht wird, damit ein geschlossenes eingeschriebenes Polygon entstehe, dessen Seiten abwechselnd durch P und Q gehen, durch Zusammenfallen von A_1 und A_{n+1}. Und da die Koinzidenzen erschöpft sind, so kommt im allgemeinen ein solches Polygon nicht zustande.

Ist aber doch — bei geeigneter Lage von P und Q auf C^3 — ein solches Polygon, bei dem sich X_1 und X_{n+1} decken, vorhanden, so haben wir eine Koinzidenz mehr und demnach ist die Koinzidenzgleichung Identität. Also:

1) Gesammelte Werke, Bd. II, S. 371.

Im allgemeinen gibt es bei einer C^3 kein geschlossenes Polygon von $2n$ Seiten, daß der Kurve so eingeschrieben ist, daß seine Seiten abwechselnd durch die auf die Kurve beliebig gelegten Punkte P, Q gehen. Liegen diese Punkte aber so, daß ein solches Polygon vorhanden ist, dann gibt es ∞^1, indem mit jedem Punkte von C^3 eins angefangen werden kann.

Kennzeichen dafür ist, daß, wenn A_1 der Berührungspunkt einer von P kommenden Tangente ist, $A_{\frac{n}{2}+1}$ in den Berührungspunkt einer zweiten von P kommenden Tangente oder $B_{\frac{n+1}{2}}$ in den einer von Q kommenden Tangente fallen muß, je nachdem n gerade oder ungerade ist; denn A_1 ist dann mit B_1 identisch, das sich ja mit A_{n+1} vereinigt hat. Wir haben es dann mit einer der vier oben erörterten Koinzidenzen der [2] zu tun, und es scheint uns die fünfte zu fehlen. Aber die fragliche Koinzidenz ist (Nr. 187) eine doppelte, weil die Tangente aus P sich mit beiden entsprechenden Strahlen vereinigt hat.

Bei $n = 2$, wo es sich um einzuschreibende Vierecke handelt, ist $A_{\frac{n}{2}+1} = A_2$, der mit $B_1 \equiv A_1$ auf einer Gerade durch Q liegt. Also lautet das Kennzeichen: die Verbindungslinie der Berührungspunkte zweier Tangenten aus P muß durch Q gehen; die Verbindungslinie der beiden andern Berührungspunkte muß es dann auch tun; und wir sehen, P und Q sind solche Punkte, aus denen die Kurve durch projektive Strahleninvolutionen erzeugt werden kann (Nr. 179, 190). Natürlich können P und Q vertauscht werden. Läßt man X_1 in den dritten Schnitt von PQ fallen, so ist Y_1 der Q, also QY_1 die Tangente in Q und X_2 der dritte Schnitt derselben. Da nun X_3 in X_1 fallen soll, so muß Y_2 der P sein; daher ist X_2Y_2P die Tangente in P. Die beiden Tangenten von P und Q schneiden sich in X_2, also auf der Kurve; P und Q sind konjugiert, nach der üblichen Terminologie, welche Punkte einer Kurve 3. Ordnung mit gemeinsamem Tangentialpunkte so nennt.

§ 32. Projektive Beziehung dreier einstufigen Gebilde. Kubische Raumkurve.

200 Drei projektive Strahlenbüschel U, U', U'' derselben Ebene führen, zweimal zu zweien zusammengestellt: U und U', U und U'', zu zwei Kegelschnitten, welche beide durch U gehen. Daß sie noch drei Punkte gemeinsam haben, folgt aus dem Schnittpunkte-Satz (Nr. 161), kann aber auch durch eine einfache Korrespondenz erkannt werden. Wir ordnen auf einem der beiden Kegelschnitte, etwa dem

ersten, jedem Punkte, aus der ersten Reihe, die beiden Schnittpunkte mit dem Strahle von U'' zu, welcher den beiden nach ihm gehenden Strahlen von U und U' entspricht. Durch jeden Punkt des Kegelschnitts, aus der zweiten Reihe, geht ein Strahl von U'', dem ein Strahlenpaar aus U, U' und ein Punkt der ersten Reihe entspricht. Es entsteht also eine Korrespondenz [1, 2]: eine Projektivität der einfachen Punktreihe auf der Kurve zu der vom Büschel U'' eingeschnittenen Involution. In den drei Koinzidenzpunkten treffen sich die beiden entsprechenden Strahlen aus U und U' auch mit dem homologen Strahle aus U''.

Das sind die drei weiteren Schnitte. Aber wir erhalten auch die Sätze:

In drei projektiven Strahlenbüscheln derselben Ebene laufen dreimal entsprechende Strahlen in einen Punkt zusammen.

Und felddual: In drei projektiven Punktreihen derselben Ebene liegen dreimal homologe Punkte in gerader Linie.

Ihnen entsprechen zwei Sätze im Bündel.

Der durch zwei der Büschel erzeugte Kegelschnitt ist zum dritten projektiv. Wenn also ein Strahlenbüschel zu einer Punktreihe 2. Ordnung derselben Ebene projektiv ist, sind dreimal entsprechende Elemente inzident. Daher inzidieren auch, wenn eine Punktreihe 2. Ordnung und ein Ebenenbüschel oder eine Regelschar und ein Strahlenbüschel projektiv sind, dreimal entsprechende Elemente (vgl. Nr. 167).

Und wenn drei projektive Strahlenbüschel im Raume gegeben sind, so gibt es in jeder Ebene und durch jeden Punkt drei Strahlen, welche drei homologe Strahlen treffen.

Sind in einer Ebene drei Punkte A_1, A_2, A_3 und drei Geraden b_1, b_2, b_3 gegeben, so liegen, wenn X sich auf einer Gerade bewegt, dreimal die Punkte:

$$(XA_1, b_1),\ (XA_2, b_2),\ (XA_3, b_3)$$

in einer Gerade; denn sie beschreiben auf b_1, b_2, b_3 projektive Punktreihen; und wenn x einen Strahlenbüschel beschreibt, so gehen dreimal die Geraden:

$$(xb_1, A_1),\ (xb_2, A_2),\ (xb_3, A_3)$$

durch einen Punkt. Daher erzeugen die Punkte X, für welche jene drei Punkte in einer Gerade x liegen, eine Kurve 3. Ordnung, und diese Geraden x umhüllen eine Kurve 3. Klasse. Jene geht durch die neun Punkte:

$$A_1,\ A_2,\ A_3,\ b_2b_3,\ b_3b_1,\ b_1b_2,\ (A_2A_3, b_1),\ (A_3A_1, b_2),\ (A_1A_2, b_3),$$

und diese berührt die neun Geraden:

$$b_1, b_2, b_3, A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2, (b_2b_3, A_1), (b_3b_1, A_2), (b_1b_2, A_3)$$[1].

201 Im Raume haben wir folgende zwei dual gegenüberstehende Figuren: drei projektive Ebenenbüschel, deren Axen beliebige Lage haben, und drei projektive Punktreihen, für deren Träger das nämliche gilt. Jene führen zu einer Raumkurve, dem Orte der Schnittpunkte entsprechender Ebenen, diese zu einem Kontinuum (Torsus) von Ebenen, den Verbindungsebenen entsprechender Punkte.

In eine Ebene schneiden die Büschel drei projektive Strahlenbüschel mit dreimal drei konkurrenten homologen Strahlen; d. h. drei Punkte der erzeugten Kurve fallen in die Ebene.

Das Erzeugnis von drei projektiven Ebenenbüscheln ist eine Raumkurve 3. Ordnung[2]) oder kubische Raumkurve (cubique gauche); sie heiße R^3.

Desgleichen gehen von dem Torsus drei Ebenen durch einen beliebigen Punkt, weshalb er 3. Klasse ist; denn von den projektiven Strahlenbüscheln, welche die Punktreihen aus dem Punkte projizieren, liegen dreimal drei entsprechende Strahlen in einer Ebene, welche dadurch eine durch den Punkt gehende Verbindungsebene homologer Punkte der Punktreihen wird. Wir werden bald sehen, daß beide Erzeugnisse in enger Beziehung stehen.

Je zwei der projektiven Ebenenbüschel $\mathfrak{u}, \mathfrak{u}', \mathfrak{u}''$ erzeugen eine Regelschar, zu deren Leitschar dann die beiden Axen gehören. Der Punkt $\mathfrak{x}\mathfrak{x}'\mathfrak{x}''$ liegt auf den drei Geraden $\mathfrak{x}\mathfrak{x}'$, $\mathfrak{x}\mathfrak{x}''$, $\mathfrak{x}'\mathfrak{x}''$ der Regelscharen; also gehen alle drei Trägerflächen durch die Kurve R^3, und sie ist die fernere Schnittkurve zweier, außer der gemeinsamen Axe, z. B. $\mathfrak{u}$, wenn die Regelscharen durch $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{u}'$, $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{u}''$ erzeugt werden. Dieselbe muß ja 3. Ordnung sein, da die von einer Ebene ausgeschnittenen Kegelschnitte, außer dem Spurpunkt von $\mathfrak{u}$, noch drei Punkte gemeinsam haben.

Die Geraden der Regelscharen treffen, wie eben gefunden, die Kurve R^3 einmal, z. B. $\mathfrak{x}\mathfrak{x}'$ im Schnittpunkte mit $\mathfrak{x}''$. Daraus folgt, daß die Geraden der Leitscharen ihr zweimal begegnen; denn jede Tangentialebene einer Trägerfläche enthält aus jeder der Scharen eine Gerade, die den vollen Schnitt bilden; auf sie müssen sich die drei Schnitte der auf der Fläche gelegenen Kurve mit der Ebene verteilen.

---

1) Graßmann, Journal für Math. Bd. 31, S. 111, Bd. 36, S. 177; Gesammelte Werke, Bd. 2, Teil 1, S. 49, 73. — Die neun Punkte oder Tangenten sind nicht assoziiert und bestimmen daher die betreffende Kurve.

2) Diese Erzeugung der kubischen Raumkurve machte Chasles bekannt: Comptes rendus Bd. 45 (1857), S. 189 und Journal de Mathématiques, 2. Serie, Bd. 1 (1857), S. 397.

Jene Geraden sind also einfache, diese Doppelsekanten oder Sehnen der Kurve.[1])

Daß die Axen der erzeugenden Büschel letzteres sind, erkennt man direkt. Z. B. auf *u* erzeugen *u'*, *u''* konjektive Punktreihen; in den Koinzidenzen schneiden sich je entsprechende Ebenen aus *u'*, *u''*; und die entsprechende aus *u* geht ja auch durch den Punkt. Dies lehrt, da die Koinzidenzen imaginär sein können, die Existenz sogenannter ideeller Doppelsekanten, deren Schnitte mit der Kurve imaginär sind. Den Übergang zu den eigentlichen (mit reellen Schnitten) bilden die Tangenten der Kurve.

Außerhalb der Kurve können sich zwei Doppelsekanten nicht schneiden, da ihre Ebene die Kurve viermal träfe.

Jede der drei Regelscharen der $\mathfrak{x}\mathfrak{x}'$, $\mathfrak{x}\mathfrak{x}''$, $\mathfrak{x}'\mathfrak{x}''$, z. B. die erste, wird vermittelst der sie erzeugenden Büschel *u*, *u'*, zu denen sie in eindeutiger Beziehung steht, projektiv zum dritten. Und so ergibt sich R^3 auch als Erzeugnis der Schnitte entsprechender Geraden und Ebenen aus einer Regelschar und einem Ebenenbüschel, welche projektiv sind.

Erwähnen wir einige Fälle spezieller Lagen der projektiven Ebenenbüschel.

Wenn die drei Axen einen Punkt gemeinsam haben, so gehen die Regelscharen in Kegel aus diesem Punkte über; die kubische Raumkurve besteht aus drei Kanten, welche allen gemeinsam ist, während je zwei noch eine der Axen gemeinsam haben; es sind dies die drei Geraden, in welche je drei homologe Ebenen der demselben Bündel angehörigen projektiven Büschel zusammenlaufen (Nr. 200).

Sind die drei Büschel so projektiv, daß sie zu derselben Punktreihe perspektiv sind, so zerfällt das Erzeugnis in den Träger derselben und die beiden Geraden, welche ihn und die drei Axen treffen; denn in ihnen schneiden sich entsprechende Ebenen.

Wenn die Axen der Büschel in derselben Ebene Π liegen und diese sich selbst entspricht, so daß je zwei der Büschel perspektiv sind und einen Strahlenbüschel — den Perspektivitätsbüschel — erzeugen (Nr. 36), so kommt kein Erzeugnis 3. Ordnung zustande; Erzeugnis ist (außer Π) die Gerade, in der die Ebenen von zweien dieser Strahlenbüschel sich schneiden und durch die dann auch die Ebene des dritten geht.

Wir kehren zum allgemeinen Falle zurück. Es sei P ein Punkt 202
von R^3, l', l'' die durch ihn gehenden Geraden aus den Leitscharen der durch *u*, *u'*; *u*, *u''* erzeugten Regelscharen, welche, wie wir wissen, die Kurve noch einmal treffen.

---

1) Salmon, Cambridge and Dublin Mathematical Journal Bd. 5 (1850), S. 23.

Nach der bekannten Eigenschaft verbundener Regelscharen sind ihre Büschel zum Büschel um u, die ja zu beiden Leitscharen gehört, projektiv. Wir können jene Regelscharen auch durch die Büschel u und l', u und l'' erzeugen; eine Ebene durch u enthält von ihnen je eine Gerade und den Punkt von R^3, in dem sie sich schneiden; die entsprechenden Ebenen aus l', l'' gehen nach diesen Geraden und dem Punkte, den sie also mit der von u gemein haben, d. h. R^3 entsteht durch die drei projektiven Büschel u, l', l''. Die von den beiden letzten erzeugte Regelschar ist also ein Kegel mit der Spitze P, dem Schnittpunkte $l'l''$, welcher auf R^3 liegt.

Aus jedem ihrer Punkte wird die kubische Raumkurve durch einen Kegel 2. Grades projiziert; wie das ja auch unmittelbar daraus hervorgeht, daß jede Ebene durch den Punkt noch zwei Punkte der R^3, also zwei projizierende Kanten des Kegels enthält.

Die Kurve zeigt sich als fernerer Schnitt zweier solchen Kegel, neben der Verbindungslinie der Spitzen, welche beiden angehört.

Außer in der Spitze trifft jede Kante eines solchen Kegels die Kurve noch einmal; wegen dieser Punkte zeigt sich die Kantenreihe als Regelschar von einfachen Sekanten; da aber die Geraden doch tatsächlich Doppelsekanten sind, so erweist sie sich als Leitschar, die ja beim Kegel mit der Regelschar sich vereinigt hat.

Zwei Kanten des Kegels projizieren die sämtlichen Kanten desselben oder, was dasselbe ist, die veränderlichen Punkte der R^3 auf ihnen durch projektive Ebenenbüschel. Also wird aus zwei sich auf der Kurve schneidenden Doppelsekanten die Punktreihe der Kurve durch projektive Ebenenbüschel projiziert.

Sind AB, CD zwei beliebige Doppelsekanten, so sind die Büschel die aus ihnen projizieren, beide dem aus AC projizierenden projektiv, daher auch zueinander.

So ist, zunächst für eigentliche Doppelsekanten, erkannt, daß aus allen die Punktreihe auf der Kurve durch projektive Ebenenbüschel projiziert wird.

Zwei eigentliche Doppelsekanten l_1, l_2 bestimmen eine Regelschar von Doppelsekanten, zu welcher sie gehören. Denn die projektiven Büschel um sie, deren entsprechende Ebenen je nach demselben Punkte von R^3 gehen, erzeugen eine Regelschar von einfachen Sekanten g; die verbundene, zu der ja die Axen l_1, l_2 gehören, ist diejenige, von welcher der Satz spricht. Alle diese Doppelsekanten können wir bezeichnen als solche, die sich auf irgend eine de[illegible] stützen.

t, alle Doppelsekanten der Kurve R^3, welche
e Sekante g treffen, (abgesehen von denen, welche

den Kegel aus dem Treffpunkte von g bilden) erzeugen eine Regelschar. Durch g und zwei Punkte der Kurve legen wir Ebenen, die dann noch einen dritten reellen Schnitt haben. Die beiden Verbindungslinien dieser zweiten und dritten Schnitte sind eigentliche Doppelsekanten l_1, l_2, welche g treffen; sie bestimmen also eine Regelschar von Doppelsekanten, zu der sie gehören; jene Ebenen gehen von l_1, l_2 nach g und ihrem Stützpunkt, also gehört g zur verbundenen Regelschar einfacher Sekanten, und wird von allen jenen Doppelsekanten getroffen, und durch jeden Punkt von g geht, wegen der Eigenschaft verbundener Regelscharen, eine. Und weitere die g treffenden Doppelsekanten durch ihre der R^3 nicht angehörigen Punkte kann es nicht geben, weil sonst in einem solchen Punkte zwei sich schneiden würden.

Da nun einfache Sekanten durch jeden Punkt des Raums gelegt werden können, so folgt:

Durch jeden Punkt des Raums, außerhalb R^3, geht nur eine, aber stets eine Doppelsekante der Kurve.[1]

In einer Ebene durch den Punkt liegen drei Punkte der Kurve, folglich drei Kanten des projizierenden Kegels, welcher daher 3. Ordnung ist. Er hat jene Doppelsekante zur Doppelkante und ein ebener Schnitt von ihm, also die Projektion der R^3 aus dem Punkte auf eine Ebene, einen Doppelpunkt.

Die Projektion der kubischen Raumkurve aus einem beliebigen Punkte des Raums auf eine Ebene hat stets einen Doppelpunkt (der isoliert ist, wenn die Doppelsekante ideell ist). Dieser wirkliche Doppelpunkt der Projektion wird als scheinbarer Doppelpunkt der Raumkurve bezeichnet (point double apparent).

Wir wollen nun eine ideelle Doppelsekante l in eine Regelschar mit eigentlichen bringen; wir benutzen eine einfache Sekante g, welche l schneidet; zu der Regelschar der diese g treffenden Doppelsekanten gehört l, aber, wie wir oben fanden, auch eigentliche. Sei l' eine von diesen, so sind die Ebenenbüschel um l, l' projektiv, mit homologen Ebenen, welche je denselben Punkt von R^3 projizieren; denn sie gehen nach der ihn enthaltenden Gerade aus der g-Schar der einfachen Sekanten. Damit ist erkannt, daß die ideellen Doppelsekanten aus dem obigen Satze nicht auszuschließen sind. Also:

Aus allen Doppelsekanten der R^3 wird ihre Punktreihe durch projektive Büschel projiziert.

Die aus Doppelsekanten projizierenden Ebenenwürfe von vier Punkten der Kurve haben alle das nämliche Doppelverhältnis, so daß man von einem Wurf auf der Kurve und seinem Doppelverhältnisse reden kann.

---

1) Chasles, a. a. O.

Aber nicht umgekehrt dürfen wir sagen (wie es leider geschehen ist), der Ort der Geraden, aus denen vier Punkte durch Ebenenwürfe von gegebenem Doppelverhältnis projiziert werden, sei der Inbegriff der Doppelsekanten einer kubischen Raumkurve; denn das sind nur ∞^2 Geraden, während es ∞^3 Geraden gibt, die diese Bedingung erfüllen. Wir werden diesen Strahlenort 3. Stufe bald kennen lernen.

Nunmehr ist auch der obige Satz, daß zwei Doppelsekanten eine Regelschar von Doppelsekanten bestimmen, zu der sie gehören, und eine verbundene von einfachen, allgemein richtig.

Ferner ist erkannt, da aus den ∞^2 Doppelsekanten drei auf ∞^6 Weisen gewählt werden können, daß die Raumkurve auf ∞^6 Weisen durch projektive Büschel erzeugt werden kann. Nun kann man drei Büschel auf $\infty^{3 \cdot 4}$ Weisen, weil es ∞^4 Geraden gibt, auswählen, einen von ihnen auf $\infty^{2 \cdot 3}$ Weisen auf die beiden andern projektiv beziehen. Von diesem Mannigfaltigkeitsgrade $12 + 6 = 18$ ist wieder 6 abzuziehen. Es gibt daher ∞^{12} kubische Raumkurven.

Aber mit jenem allgemeinen Satze ist ein anderes wesentliches Resultat gewonnen.

Zu jedem der aus einer Doppelsekante projizierenden Büschel steht die Punktreihe der Kurve in eindeutiger Beziehung: jeder Punkt der Kurve bestimmt eine Ebene des Büschels, und jede Ebene des Büschels einen Punkt der Kurve, den dritten Schnitt außer den auf der Doppelsekante gelegenen Punkten.

Damit ist die Punktreihe auf der kubischen Raumkurve als ein projektiv beziehbares oder unikursales Gebilde erkannt; als Hilfsgebilde, durch welche man ihre projektive Beziehung auf ein anderes unikursales Gebilde herstellen kann, dient in erster Linie irgend einer der perspektiven Ebenenbüschel um eine Doppelsekante, dann auch eine perspektive Regelschar von einfachen Sekanten oder die Kantenreihe eines perspektiven Kegels 2. Grades.

Eine parametrische Bestimmung, die man in einem jener Ebenenbüschel getroffen, überträgt sich auf die Punktreihe der Kurve; jeder Punkt von ihr bekommt denselben Parameter wie die inzidente Ebene des Büschels.

203 Ein beliebiger Ebenenbüschel steht zur Punktreihe der R^3 in einer Korrespondenz [1, 3], wenn die inzidenten Elemente einander zugeordnet werden; sie ist (Nr. 168) eine Projektivität zwischen dem Ebenenbüschel und einer kubischen Involution auf der Kurve. Daher wird eine kubische Raumkurve von einem Ebenenbüschel in einer kubischen Involution geschnitten; jeder Punkt auf ihr gehört zu einer der durch die Ebenen eingeschnittenen Gruppen.

Eine Involution 3. Grades hat vier Gruppen mit einem Doppel-

punkte (Nr. 136); vier Ebenen des Büschels tangieren die Kurve; die zugehörigen Tangenten treffen die Axe des Büschels.

Vier Tangenten der kubischen Raumkurve begegnen einer Gerade.

Ist diese Gerade eine einfache Sekante, so sind es die beiden unendlich nahen, die sich im Stützpunkte schneiden, und zwei andere, zur Regelschar der die Gerade treffenden Doppelsekanten gehörig.

Diese Zahl der eine Gerade treffenden Tangenten heißt der Rang der Kurve[1]).

Die kubische Raumkurve hat den Rang 4.

Das ist die Ordnung der Fläche, die durch die Tangenten der Kurve erzeugt wird: eine abwickelbare Regelfläche, weil die aufeinanderfolgenden Tangenten sich schneiden[2]).

Der Kegel 3. Ordnung, welcher die Kurve aus einem beliebigen Punkte projiziert, ist 4. Klasse; denn da seine Berührungsebenen die Tangenten der Kurve projizieren, so kommen von einer Gerade durch die Spitze so viele an ihn, als diese Tangenten trifft.

Auch die Doppelkante des Kegels bedingt nach Plückers Formeln (Nr. 162) die Klasse 4.

Wenn die Axe des Ebenenbüschels eine einfache Sekante ist, so haben alle Punktgruppen der kubischen Involution den Stützpunkt gemeinsam; die veränderlichen Punkte der Gruppe, also die Punkte, in denen die sich auf die Sekante stützenden Doppelsekanten die Kurve treffen, erzeugen daher eine (quadratische) Involution (Nr. 136).

Sie bilden eine Regelschar, und jede Regelschar von Doppelsekanten hat sogar ∞^1 einfache Sekanten, welche Leitgeraden sind.

Folglich induziert jede Regelschar von Doppelsekanten eine Involution auf der Kurve, in der die Schnitte mit derselben Doppelsekante gepaart sind. Sie enthält, wie wir schon wissen, zwei Tangenten; diese berühren in den Doppelpunkten der Involution; und sind diese reell, die Involution hyperbolisch, so daß auch Paare konjugiert imaginärer Punkte in ihr vorkommen, so enthält die Regelschar eigentliche und ideelle Doppelsekanten, im andern Falle nur eigentliche.

Jede auf der kubischen Raumkurve befindliche (gemeine) Involution führt durch die Verbindungslinien gepaarter Punkte zu einer Regelschar. Denn zwei von ihnen bestimmen eine Regelschar von Doppelsekanten, zu der sie gehören; die Involution, welche diese induziert, hat mit der gegebenen zwei Paare gemein und ist identisch mit ihr.

---

1) Bis in die sechziger Jahre auch „Klasse“ genannt.

2) Auf die Abwickelbarkeit genauer einzugehen, ist noch keine Veranlassung.

Zwei Ebenenbüschel führen zu zwei kubischen Involutionen mit $2 \cdot 2$ gemeinsamen Paaren entsprechender Punkte (Nr. 196) oder vier Paaren von Punkten, die zu einer Gruppe der einen und einer der andern Involution gehören, deren verbindende Doppelsekanten also beide Axen treffen.

Es gibt vier Doppelsekanten einer kubischen Raumkurve, welche zwei Geraden treffen. Oder:

Die Doppelsekanten einer kubischen Raumkurve, welche eine Gerade treffen, erzeugen eine Regelfläche 4. Grades.

Auf ihr ist die Gerade einfache Leitgerade, weil jeder ihrer Punkte nur eine Doppelsekante aussendet.

In jeder Ebene durch die Gerade liegen drei Erzeugenden, und von jedem Punkte auf der Kurve gehen zwei aus, so daß die kubische Raumkurve doppelt auf der Regelfläche ist.

Sie zerfällt in einen Kegel 2. Grades und eine Regelschar, wenn die Gerade einfache Sekante ist.

Jede auf R^3 befindliche kubische Involution rührt von einem Ebenenbüschel her; denn die Ebenen, die zu zwei Gruppen gehören, bestimmen einen Büschel und die von diesem induzierte Involution ist mit der gegebenen identisch, wegen der beiden gemeinsamen Gruppen.

Mit einer auf R^3 befindlichen involutorischen Korrespondenz $[n]$ hat eine kubische Involution $2n$ Paare entsprechender Punkte gemein (Nr. 196), d. h. von den Verbindungslinien entsprechender Punkte jener treffen $2n$ die Axe des zu dieser gehörigen Ebenenbüschels.

Die Verbindungslinien der entsprechenden Punkte einer auf R^3 befindlichen involutorischen Korrespondenz $[n]$ erzeugen eine Regelfläche vom Grade $2n$, auf welcher R^3 n-fach ist.

Eine $[2]$ führt wieder zu einer Regelfläche 4. Grades mit R^3 als Doppelkurve, aber ohne Leitgerade.

Trägt R^3 aber eine Korrespondenz $[n, n_1]$, so ist die Regelfläche der Verbindungslinien entsprechender Punkte vom Grade $2(n + n_1)$ (Nr. 180), auf welcher R^3 $(n + n_1)$-fach ist, da jeder Punkt auf ihr so viele Verbindungslinien nach den einen und den andern korrespondierenden Punkten aussendet.

Liegen zwei konjektive Punktreihen auf R^3 vor, so entsteht wiederum eine Regelfläche 4. Grades, auf welcher R^3 Doppelkurve ist; wir wissen, daß wir diesen Fall der involutorischen Korrespondenz $[2]$ subsumieren können (Nr. 193).

204 Wenn wir die Kurve R^3 aus einem ihrer Punkte A durch einen Kegel 2. Grades projizieren, so ist die Tangente in ihm auch eine Kegelkante, durch die wir hindurch gehen, wenn der projizierte Punkt durch A hindurch geht; oder sagen wir lieber, die beiden unendlich

nahen Tangenten, welche sich in A schneiden, sind zwei unendlich nahe Kanten des Kegels; die Berührungsebene des Kegels, welche sie verbindet und längs der einen tangiert, verbindet also zwei unendlich nahe Tangenten oder drei unendlich nahe Punkte der Kurve und heißt die Schmiegungs- oder Oskulationsebene von A[1]).

Jetzt seien A, B, C drei Punkte der kubischen Raumkurve, ω die verbindende Ebene, a, b, c die zugehörigen Tangenten und α, β, γ die Schmiegungsebenen. Wir projizieren die Kurve aus den drei Punkten durch die Kegel A^2, B^2, C^2. Der erste wird von α längs der Kante a berührt; die Berührungsebenen längs AB und AC seien α_B, α_C; ebenso werde B^2, der längs b von β berührt wird, längs BA, BC von β_A, β_C und C^2, der längs c von γ tangiert wird, längs CA, CB von γ_A, γ_B berührt.

Wenden wir nun auf A^2 den auf einen Kegel übertragenen Satz in Nr. 119 an, so liegen, weil a, AB, AC ein eingeschriebenes Dreikant mit den Berührungsebenen α, α_B, α_C bilden,

$$[\alpha, (AB, AC)], \quad [\alpha_B, (a, AC)], \quad [\alpha_C, (a, AB)]$$

in einer Ebene ω_1; aber (AB, AC) ist ω; ferner (a, AC) ist γ_A, denn diese Berührungsebene von C^2 längs CA enthält die Tangente a der auf dem Kegel gelegenen kubischen Raumkurve in A, und (a, AB) ist β_A; also liegen die drei Schnittlinien

$$(\alpha, \omega), \quad (\alpha_B, \gamma_A), \quad (\alpha_C, \beta_A)$$

in einer Ebene ω_1. Ebenso ergeben B^2, C^2, daß

$$(\beta, \omega), \quad (\beta_C, \alpha_B), \quad (\beta_A, \gamma_B)$$

in einer Ebene ω_2 und

$$(\gamma, \omega), \quad (\gamma_A, \beta_C), \quad (\gamma_B, \alpha_C)$$

in einer Ebene ω_3 liegen. Die drei mittleren Geraden laufen in den Punkt $O' = (\alpha_B, \beta_C, \gamma_A)$ und die drei letzten in den Punkt $O'' = (\alpha_C, \beta_A, \gamma_B)$ zusammen. Folglich gehen die drei Ebenen ω_1, ω_2, ω_3 durch die Gerade $O'O''$, und die drei vorderen Geraden, die Schnittlinien von α, β, γ mit ω, müssen daher durch den Punkt O gehen, in dem $O'O''$ die Ebene ω schneidet. Also liegt der Schnittpunkt $\alpha\beta\gamma$ in ω und wir haben folgenden wichtigen Satz, der uns nicht bloß zu der gewünschten Identität der Erzeugnisse dreier projektiven Ebenenbüschel und dreier projektiven Punktreihen führen, sondern auch für eine spätere Verwandtschaft von Wert sein wird.

---

1) Die Schmiegungsebenen einer Raumkurve sind Berührungsebenen der abwickelbaren Fläche der Tangenten und jede berührt längs der zugehörigen Tangente, in der sie sich mit der Nachbar-Schmiegungsebene schneidet. Der Abwickelungsprozeß besteht in unendlich kleinen Drehungen um diese Schnittlinien.

Der Schnittpunkt der Schmiegungsebenen dreier Punkte der kubischen Raumkurve liegt in der Verbindungsebene derselben[1]).

Jetzt sei der dritte Punkt C ein auf der Kurve beweglicher Punkt X und ξ seine Schmiegungsebene; es liegt also der Punkt $\alpha\beta\xi$ in der Ebene ABX; folglich ist die Punktreihe, die jener auf der festen Schnittlinie zweier Schmiegungsebenen α, β — welche künftighin Schmiegungsaxe genannt werden soll — beschreibt, perspektiv zu dem Ebenenbüschel um die Doppelsekante, welche die Oskulationspunkte der beiden festen Schmiegungsebenen verbindet, und zwar so, daß die Ebene durch AB nach einem Punkte der R^3 und der Punkt auf $\alpha\beta$, welcher in der zugehörigen Schmiegungsebene liegt, einander entsprechen. Sind C, D weitere Punkte von R^3 mit den Schmiegungsebenen γ, δ, so sind der Ebenenbüschel CDX und die Punktreihe $\gamma\delta\xi$ perspektiv. Nun sind die Büschel ABX und CDX projektiv, daher gilt dies auch für die Punktreihen $\alpha\beta\xi$ und $\gamma\delta\xi$.

Folglich sind alle die Punktreihen, die auf den ∞^2 Schmiegungsaxen der kubischen Raumkurve durch die Schmiegungsebenen eingeschnitten werden, untereinander projektiv, derartig, daß die durch dieselbe Schmiegungsebene eingeschnittenen Punkte entsprechend sind; und diese Punktreihen sind auch projektiv zu allen den untereinander projektiven Ebenenbüscheln um die Doppelsekanten; wobei immer ein Punkt von einer jener Punktreihen und eine Ebene aus einem dieser Büschel entsprechend sind, welche mit zusammengehörigen Elementen X und ξ der Kurve inzidieren.

Vier feste Schmiegungsebenen schneiden in alle Schmiegungsaxen Würfe von demselben Doppelverhältnisse ein, welches so das Doppelverhältnis der vier Schmiegungsebenen wird; es ist gleich dem der zugehörigen Kurvenpunkte.

Nehmen wir drei Schmiegungsaxen, so ergeben sich die Schmiegungsebenen als die Verbindungsebenen dreier entsprechender Punkte der drei projektiven Punktreihen auf jenen Axen. Wir sehen, die duale Erzeugung zu derjenigen, die uns die Punkte der kubischen Raumkurve geliefert hat, liefert uns ihre Schmiegungsebenen, und wir könnten jetzt, von dieser Erzeugung ausgehend, die duale Betrachtung vornehmen. Es mögen aber einige Bemerkungen genügen.

205 Bei einem Torsus von Ebenen $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \ldots$ haben wir die Schnittlinien zweier aufeinander folgender $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\delta$, ... und die

---

1) Chasles, Comptes rendus, Aug. 1857, und Schröter, Journal für Math., Bd. 56 (1859), S. 27.

Schnittpunkte dreier aufeinander folgender Ebenen oder zweier aufeinander folgender Schnittlinien $\alpha\beta\gamma = (\alpha\beta, \beta\gamma)$, $\beta\gamma\delta, \ldots$ Jede Ebene γ enthält zwei aufeinander folgende Schnittlinien $\beta\gamma$, $\gamma\delta$ und drei aufeinander folgende Schnittpunkte $\alpha\beta\gamma$, $\beta\gamma\delta$, $\gamma\delta\varepsilon$ und jede Schnittlinie $\beta\gamma$ zwei aufeinander folgende Schnittpunkte $\alpha\beta\gamma$, $\beta\gamma\delta$. Unsere Ebenen sind daher die Schmiegungsebenen und die Schnittlinien die Tangenten der durch die Schnittpunkte entstehenden Kurve.

Also ergibt sich auch, wenn drei projektive Punktreihen gegeben sind, in den Verbindungsebenen entsprechender Punkte ein Kontinuum von Ebenen, welche als Schmiegungsebenen zu einer Kurve gehören, und die duale Betrachtung lehrt, daß diese Kurve durch drei projektive Ebenenbüschel erzeugt werden kann, also eine kubische Raumkurve ist.

Das Erzeugnis dreier projektiven Punktreihen ist der Inbegriff der Schmiegungsebenen einer kubischen Raumkurve. Diese Kurve ist in sich räumlich dual[1]).

Die Klasse der Kurve, d. h. die Klasse des Torsus der Schmiegungsebenen ist 3, ebenso wie die Ordnung (Nr. 201). Die Oskulationspunkte der drei von einem Punkt kommenden Schmiegungsebenen bestimmen eine Ebene, die durch den Punkt geht.

Nehmen wir zwei Schmiegungsaxen $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$ in derselben Schmiegungsebene α, so umhüllen die Verbindungslinien entsprechender Punkte ihrer projektiven Punktreihen einen Kegelschnitt; das sind die Spurlinien der übrigen Schmiegungsebenen.

Also schneiden die Schmiegungsebenen (und Tangenten) einer kubischen Raumkurve in eine von ihnen einen Kegelschnitt ein, welcher dual dem Kegel 2. Grades entspricht, durch den die Kurve aus einem ihrer Punkte projiziert wird. Das Doppelverhältnis von vier Schmiegungsebenen ist das der vier Tangenten, welche sie in irgend eine Schmiegungsebene einschneiden.

Tangente des Kegelschnitts ist auch die zu α gehörige Tangente, die Schnittlinie mit der benachbarten Schmiegungsebene, und der Berührungspunkt, der Schnittpunkt mit der Nachbartangente des Kegelschnitts, ist Schnittpunkt dreier benachbarter Schmiegungsebenen, also der Oskulationspunkt von α.

Wie sich die Punktkurve ergab als teilweiser Schnitt der Trägerflächen zweier durch projektive Ebenenbüschel erzeugten Regelscharen, neben einer gemeinsamen Gerade der beiden Leitscharen, so ergibt sich das Kontinuum der Schmiegungsebenen als Inbegriff

---

1) Diese Dualität hat zum ersten Male Schröter dargelegt. Journal f. Mathematik, Bd. 56, S. 27. Vgl. auch wegen der vorangehenden Betrachtungen Schröters Buch über die Oberflächen 2. Ordnung und Raumkurven 3. Ordnung.

der gemeinsamen Tangentialebenen der Trägerflächen zweier durch projektive Punktreihen erzeugten Regelscharen, außer den durch die gemeinsame Leitgerade gehenden Tangentialebenen.

Und wie zwei Kegel 2. Grades mit gemeinsamer Kante als Restschnitt eine kubische Raumkurve haben, so führen zwei Kegelschnitte mit einer gemeinsamen Tangente zu den Schmiegungsebenen einer kubischen Raumkurve in ihren gemeinsamen Tangentialebenen. Jeder Punkt jener Tangente sendet noch eine zweite Tangente an den einen und den andern Kegelschnitt: die Verbindungsebene ist eine Schmiegungsebene[1]).

Die gemeinsame Tangente und von jedem Kegelschnitte noch eine zweite sind die Träger der erzeugenden Punktreihen.

Der Torsus der Schmiegungsebenen einer kubischen Raumkurve ist ebenfalls projektiv beziehbar oder unikursal.

206 Wenn sechs Punkte $A, B, \ldots, F$ gegeben sind, so schneiden sich die beiden Kegel 2. Grades $A(B, C, D, E, F)$ und $B(A, C, D, E, F)$ in einer durch $A, \ldots, F$ gehenden kubischen Raumkurve, außer in AB. Und für eine kubische Raumkurve, die durch $A, \ldots, F$ geht, sind die genannten Kegel diejenigen, welche sie aus A, bzw. B projizieren; weil sie durch die je fünf Kanten eindeutig bestimmt sind. Folglich ist die vorhin konstruierte kubische Raumkurve die einzige, welche durch die sechs Punkte geht.

Wenn drei Punkte A, B, C und drei Doppelsekanten d, e, f gegeben sind, so ist die Projektivität der Ebenenbüschel um letztere, welche von einer zu jenen Elementen gehörigen kubischen Raumkurve herrührt, durch die nach A, B, C gehenden Ebenen eindeutig festgelegt; also gibt es nur eine solche Kurve.

Drittens seien fünf Punkte A, B, C, D, E und eine Doppelsekante f gegeben; die beiden Büschel von Kegeln 2. Grades $A(B, C, D, E)$, $B(A, C, D, E)$ schneiden in f Involutionen ein. Die beiden Kegel dieser Büschel, welche durch das gemeinsame Paar dieser Involutionen gehen, liefern die einzige kubische Raumkurve, welche zu jenen gegebenen Elementen gehört[2]).

Sind dagegen vier Punkte A, B, C, D und zwei Doppelsekanten e, f

---

1) Wohl der älteste Satz über die kubische Raumkurve: Möbius, Der Barycentrische Calcül (1827) § 98 (Gesammelte Werke, Bd. I, S. 121).

2) Auch die Kenntnis, daß durch $9 - 1 = 8$ Punkte die Grundkurve eines Flächenbüschels 2. Ordnung bestimmt ist, führt zu diesem Ergebnisse; wenn $A, \ldots E$ und drei Punkte auf f diese 8 Punkte sind, so zerfällt die Raumkurve 4. Ordnung in die Gerade f und die kubische Raumkurve, mit der wir es zu tun haben.

gegeben, so würde eine zugehörige kubische Raumkurve die Projektivität:

$$e(A, B, C, D) \barwedge f(A, B, C, D)$$

bedingen, welche im allgemeinen nicht erfüllt wird. Wird sie in speziellen Fällen erfüllt, was bedeutet, daß die sechs gegebenen Elemente auf der Trägerfläche zweier verbundenen Regelscharen liegen, so gibt es (Nr. 165) ∞^1 auf dieser Fläche verlaufende kubische Raumkurven, welche durch die vier Punkte gehen und die Geraden der Schar e, f zweimal treffen; und auf der Fläche muß jede kubische Raumkurve, welche durch A, B, C, D geht und e, f zweimal trifft, wegen der sieben gemeinsamen Punkte liegen.

Wenn also 6, 5, 4, 3 Punkte und 0, 1, 2, 3 Doppelsekanten gegeben sind, so gibt es 1, 1, 0, 1 zugehörige kubische Raumkurven; und ebenso, wenn 6, 5, 4, 3 Schmiegungsebenen und 0, 1, 2, 3 Schmiegungsaxen gegeben sind.

Auf einer kubischen Raumkurve R^3 liege eine Involution n^{ten} Grades $I^n (n > 2)$. Jede Gruppe führt zu $\frac{1}{6} n (n-1)(n-2)$ Verbindungsebenen von je drei ihrer Punkte; wir wollen die Klasse des Torsus dieser Verbindungsebenen ermitteln. Dazu stellen wir auf R^3 vermittelst eines Punktes O folgende Korrespondenz her. Ein Punkt X von R^3 gehört zu einer Gruppe von I^n; die $n-1$ übrigen Punkte derselben geben $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ Paare, welche, durch Ebenen mit O verbunden, ebensoviele dritte Schnitte X_1 mit der Kurve liefern, die wir dem X zuordnen. Die Ebenen durch OX_1 führen in ihren veränderlichen Schnitten mit R^3 zu einer Involution, welche (Nr. 196) $n-1$ Paare besitzt, deren beide Punkte je in dieselbe Gruppe von I^n fallen; die $(n-1)(n-2)$ übrigen Punkte dieser Gruppen sind diejenigen Punkte X, welche dem X_1 korrespondieren. Wenn X und X_1 sich vereinigen, so ergibt sich eine Ebene durch O, in der drei Punkte einer Gruppe von I^n liegen; und jeder von ihnen kann der dritte, in dem sich X und X_1 vereinigen, sein. Die $\frac{3}{2}(n-1)(n-2)$ Koinzidenzen der Korrespondenz $[(n-1)(n-2), \frac{1}{2}(n-1)(n-2)]$ zeigen, daß es $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ derartige Ebenen gibt. 207

Wenn also auf einer kubischen Raumkurve eine Involution n^{ten} Grades $I^n (n > 2)$ liegt, so umhüllen die Verbindungsebenen von drei Punkten einer Gruppe einen Torsus von der Klasse $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$.

Der Ebenenbüschel bei $n = 3$ ist uns schon bekannt. Bei $n = 4$ ist es ein Torsus 3. Klasse, also der Schmiegungsebenen-Torsus einer zweiten kubischen Raumkurve. Wir erhalten ∞^1 Tetraeder, welche der ersten kubischen Raumkurve ein- und dieser zweiten umgeschrieben sind, d. h. sie mit ihren Ebenen oskulieren.

Wenn zwei kubische Raumkurven in der Lage sich befinden, daß zwei Tetraeder existieren, welche der einen ein-, der andern umgeschrieben sind, so führen die beiden Gruppen der Ecken auf der ersten zu einer Involution 4. Grades und zu ∞^1 Tetraedern, welche der ersten kubischen Raumkurve ein- und einer andern umgeschrieben sind, welche also die acht Ebenen der gegebenen Tetraeder oskuliert, daher mit der zweiten kubischen Raumkurve identisch ist[1]).

Nun kann man (Nr. 136) die Tripel der Schnittpunkte der R^3 mit drei Ebenen α, β, γ durch vierte Punkte der Kurve zu Quadrupeln vervollständigen, welche derselben Involution 4. Grades angehören. Demnach sind die drei Ebenen α, β, γ Schmiegungsebenen einer zweiten kubischen Raumkurve, ihre Schnittlinien und die neun in α, β, γ gelegenen Doppelsekanten a_1, a_2, a_3; b_1, b_2, b_3; c_1, c_2, c_3 der R^3 Schmiegungsaxen dieser zweiten Kurve. Da diese letzteren Spuren anderer Schmiegungsebenen in α, β, γ sind, so ist von den drei Projektivitäten, welche a_1, a_2, a_3 auf $\alpha\beta$ und $\alpha\gamma$, b_1, b_2, b_3 auf $\beta\alpha, \beta\gamma$ und c_1, c_2, c_3 auf $\gamma\alpha, \gamma\beta$ hervorrufen, jede die Folge der beiden andern. Denn die beiden Schmiegungsaxen in α, β, welche von einem Punkte der $\alpha\beta$ ausgehen und die entsprechenden Punkte in $\alpha\gamma, \beta\gamma$ einschneiden, liegen in der nämlichen Schmiegungsebene der zweiten Kurve, der dritten aus jenem Punkte, und die Schmiegungsaxe, in welcher sie γ schneidet, macht diese Punkte auf $\alpha\gamma, \beta\gamma$ zu entsprechenden in der dritten Projektivität.

208 Es seien vier projektive Ebenenbüschel u, u', u'', u''' gegeben. Auf der kubischen Raumkurve R^3, welche durch die drei ersten entsteht, ergibt sich eine Korrespondenz [1, 3] — Projektivität der Punktreihe auf ihr zu der vom vierten Büschel eingeschnittenen kubischen Involution —, in der jedem Punkte $\mathfrak{x}\mathfrak{x}'\mathfrak{x}''$ der Kurve die Schnitte mit der den Ebenen $\mathfrak{x}, \mathfrak{x}', \mathfrak{x}''$ entsprechenden Ebene $\mathfrak{x}'''$ zugeordnet sind. Die vier Koinzidenzen lehren:

In vier projektiven Ebenenbüscheln gibt es vier Quadrupel entsprechender Ebenen, die in einen Punkt zusammenlaufen (Nr. 177).

Diese vier Punkte sind allen vier durch je drei der Büschel erzeugten kubischen Raumkurven gemeinsam.

Je zwei von ihnen liegen auf der Trägerfläche der Regelschar, welche durch die gemeinsamen Ebenenbüschel erzeugt wird, und treffen deren Geraden einmal.

---

1) von Staudt, Beiträge zur Geometrie der Lage, Nr. 586; Cremona, Rendiconti dell'Istituto Lombardo Ser. III, Bd. 12, S. 347; Hurwitz, Mathem. Annalen, Bd. 20, S. 325; Sturm, Liniengeom., Bd. 1, Nr. 250.

Zwei kubische Raumkurven, welche beide die Geraden derselben Regelschar einmal und die der verbundenen zweimal treffen, haben vier Punkte gemeinsam (Nr. 165).

Und für zwei projektive Regelscharen auf verschiedenen Trägerflächen ergibt sich, wenn aus jeder Leitschar zwei Geraden herangezogen werden:

Zwei projektive Regelscharen haben vier Paare sich schneidender entsprechender Geraden (Nr. 180).

§ 33. Trilinearität zwischen drei einstufigen Gebilden.

Betrachten wir zunächst zwei projektive Beziehungen zwi- 209
schen denselben zwei Gebilden u, u'. Sie haben zwei Paare entsprechender Elemente gemein. Denn die Elemente von u, welche einem Elemente von u' in beiden Projektivitäten entsprechen, bewegen sich konjektiv und vereinigen sich zweimal.

Damit haben wir (Nr. 127) die Konstruktion der beiden Paare gemeinsamer Elemente; denn ihre zu u' gehörigen Elemente liefert dann eine beliebige von den beiden Projektivitäten.

Wenn man von den beiden Koinzidenzen konjektiver Gebilde eine kennt, dann ist die Konstruktion der andern linear (Nr. 128). Ist also eins von den gemeinsamen Paaren bekannt, so ist das andere linear zu konstruieren.

Erwähnen wir hiervon noch den Spezialfall, daß eine der beiden Projektivitäten eine Involution ist.

Sind die Gebilde etwa zwei Strahlenbüschel derselben Ebene, so bedeutet unser Satz, daß die beiden erzeugten Kegelschnitte, außer den Scheiteln, noch zwei Punkte gemein haben, oder, wenn sie Ebenenbüschel sind, daß zwei Regelscharen, denen zwei Leitgeraden gemeinschaftlich sind, selbst zwei Geraden gemeinsam haben (Nr. 96).

Die den beiden Projektivitäten zugehörigen bilinearen Relationen seien:

$$\lambda x x' + \mu x + \mu' x' + \nu = 0, \quad \lambda_1 x x' + \mu_1 x + \mu_1' x' + \nu_1 = 0;$$

sie besitzen zwei ihnen gleichzeitig genügende Wertepaare x, x'. Die x derselben erhält man durch die quadratische Gleichung, welche sich durch Elimination von x' ergibt:

$$(\lambda\mu_1 - \mu\lambda_1) x^2 + (\lambda\nu_1 - \nu\lambda_1 + \mu'\mu_1 - \mu\mu_1') x + (\mu'\nu_1 - \nu\mu_1') = 0;$$

zu jeder der beiden Wurzeln liefert eine beliebige von den beiden bilinearen Relationen das zugehörige x'.

Liegen die Gebilde ineinander und sind überdies beide Relationen symmetrisch, so lassen sie sich nach $x + x'$ und xx', in denen sie linear sind, eindeutig auflösen, und die Wurzeln der zugehörigen quadratischen Gleichung geben die zu einem Paare zusammengehörigen

Werte x, x'. Zwei ineinander liegende involutorische projektive Gebilde (Involutionen) haben, wie wir wissen, nur ein Paar xx' gemein; man kann es aber als zwei Paare xx' und $x'x$ auffassen.

In wesentlich anderer Weise als im vorangehenden Paragraphen bezieht man drei einstufige (unikursale) Gebilde u, u', u'', indem man die bilineare Relation der Projektivität zu einer trilinearen Relation zwischen drei Parametern erweitert, welche linear in bezug auf jeden von ihnen ist[1]).

Diese Relation ist:

1) $T = \lambda x x' x'' + \mu x' x'' + \mu' x'' x + \mu'' x x' + \nu x + \nu' x' + \nu'' x'' + \varkappa = 0,$

also mit sieben wesentlichen Konstanten.

Zwei Parameter können willkürlich gegeben werden; die Relation bestimmt dann eindeutig den dritten. Also bestimmen zwei Elemente aus zweien der Gebilde eindeutig das zugeordnete im dritten. Wir erhalten ∞^2 Tripel von zugeordneten Elementen, während drei projektive Gebilde ∞^1 Tripel entsprechender Elemente haben: ein Element bestimmt die beiden entsprechenden.

Nehmen wir ein festes Element, etwa aus u'', mit dem Parameter x'' und ordnen die trilineare Relation nach x und x', so ergibt sich die bilineare Relation:

2) $(\lambda x'' + \mu'') x x' + (\mu' x'' + \nu) x + (\mu x'' + \nu') x' + (\nu'' x'' + \varkappa) = 0.$

Sie sagt aus, daß die diesem festen Elemente x'' in u und u' entsprechenden Elemente eine Projektivität bilden. Ändert sich jenes Element, so ergeben sich ∞^1 derartige Projektivitäten, welche einen Büschel bilden, und x'', der Parameter des Elementes in u'', dem jede dieser Projektivitäten zugehört, wird zugleich ihr eigener Parameter; denn 2) können wir, nach x'' geordnet, schreiben in der Form:

3) $$x'' P + P_1 = 0,$$

wo:

4) $P = \lambda x x' + \mu' x + \mu x' + \nu'', \quad P_1 = \mu'' x x' + \nu x + \nu' x' + \varkappa$

ist und die Projektivitäten $P = 0$, $P_1 = 0$ als die Konstituenten des Büschels bezeichnet werden können. Sie haben zwei Paare entsprechender Elemente gemein; die diesen zugehörigen x, x' befriedigen $P = 0$, $P_1 = 0$, also auch, für jeden Wert von x'', $x'' P + P_1 = 0$; folglich sind jene beiden Paare allen Projektivitäten des Büschels gemeinsam; wir wollen sie die Grundpaare desselben nennen.

Die Trilinearität hat sich herausgestellt als Projektivität zwischen

---

1) Schubert, Math. Annalen Bd. 17, S. 457 (1880).

dem Gebilde u'' und unserm Büschel von Projektivitäten, wobei dem Elemente x'' die Projektivität $x''P + P_1 = 0$ entspricht. Eine Projektivität des Büschels ist bestimmt, wenn das einem festen Elemente, etwa von u, entsprechende in u' gegeben wird; denn die Parameter dieser Elemente, in $x''P + P_1 = 0$ eingesetzt, liefern dann den Parameter x'' der Projektivität. Damit entsteht eine Projektivität zwischen u' und u'', in der ein Element X'' von u'' und dasjenige Element X' von u' korrespondieren, welches dem festen Elemente von u in der dem X'' zugeordneten Projektivität entspricht.

Weil ein Grundpaar zu allen Projektivitäten des Büschels gehört, verhält es sich anders als ein beliebiges Paar von Elementen aus u und u', dem nur ein Element aus u'' als drittes in einem Tripel der Trilinearität zugehört. Dem Grundpaar gehört jedes beliebige Element von u'' zu; wir können es deshalb auch ein neutrales Paar aus u, u' nennen. Die beiden Gleichungen $P = 0$, $P_1 = 0$ liefern uns die beiden Grundpaare oder neutralen Paare in u und u'; eliminieren wir aus ihnen x', so ergibt sich die quadratische Gleichung:

$$5)\quad (\mu'\mu'' - \lambda\nu)x^2 + (\mu'\nu' + \mu''\nu'' - \mu\nu - \lambda\varkappa)x + (\nu'\nu'' - \mu\varkappa) = 0.$$

Sie liefert die Parameter der zu u gehörigen Elemente dieser beiden Paare und die Einsetzung in $P = 0$ (oder $P_1 = 0$) gibt dann je den Parameter des in u' befindlichen Elementes des betreffenden Paars.

Der Übergang von u, u' zu u, u'' fordert Vertauschung von u' und u''; ersichtlich ist diese Vertauschung äquivalent mit der gleichzeitigen Vertauschung von μ' und μ'' und ν' und ν''. Durch sie ergeben sich die zu $P = 0$, $P_1 = 0$ analogen Gleichungen. Aber diese Vertauschung ändert die Gleichung 5) nicht. Daraus folgt, daß die Grundpaare des Projektivitäten-Büschels zwischen u und u', der zum Gebilde u'', und diejenigen des Büschels zwischen u und u'', der zum Gebilde u' projektiv ist, in u dieselben beiden Elemente S, T haben, deren Parameter der Gleichung 5) genügen; und ebenso erhalten wir zwei Elemente S', T' in u' und zwei Elemente S'', T'' in u''; die zugehörigen Gleichungen 5'), 5'') ergeben sich aus 5), wenn man x; μ, μ', μ''; ν, ν', ν'' zyklisch in x'; μ', μ'', μ; ν', ν'', ν und dann nochmals in x''; μ'', μ, μ'; ν'', ν, ν' übergehen läßt:

$$5')\quad (\mu''\mu - \lambda\nu')x'^2 + (\mu''\nu'' + \mu\nu - \mu'\nu' - \lambda\varkappa)x' + (\nu''\nu - \mu'\varkappa) = 0,$$

$$5'')\quad (\mu\mu' - \lambda\nu'')x''^2 + (\mu\nu + \mu'\nu' - \mu''\nu'' - \lambda\varkappa)x'' + (\nu\nu' - \mu''\varkappa) = 0.$$

Nehmen wir an, was nur Sache der Bezeichnung ist, daß S mit T' das eine Grundpaar oder neutrale Paar von u und u', also T mit S' das andere bildet und daß S mit T'' das eine neutrale Paar in u und u'' bildet und T mit S'' das andere; so haben wir nun darzutun, daß $S'T''$, $T'S''$ die beiden neutralen Paare in u', u'' sind. Es seien

x_1, x_2 die Wurzeln von 5), die Parameter von S, T; so ergibt sich der Parameter x' von T' durch Einsetzen von x_1 für x in $P=0$, also aus:

6) $$\lambda x_1 x' + \mu' x_1 + \mu x' + \nu'' = 0;$$

ebenso der Parameter x'' von S'' durch Einsetzen von x_2 für x in die Gleichung der einen Konstituente des Projektivitäten-Büschels zwischen u und u'', die aus $P=0$ hervorgeht durch Vertauschung von x' und x'', μ' und μ'', ν' und ν'', also aus:

7) $$\lambda x_2 x'' + \mu'' x_2 + \mu x'' + \nu' = 0.$$

Die Gleichungen der Konstituenten des dritten Projektivitäten-Büschels zwischen u' und u'' erhält man aus $P=0$, $P_1=0$, die zu u, u' gehören, durch Vertauschung von u, u'', also von x und x'', μ und μ'', ν und ν''; sie sind:

8) $$\lambda x' x'' + \mu'' x' + \mu' x'' + \nu = 0, \quad \mu x' x'' + \nu' x' + \nu'' x'' + \varkappa = 0.$$

Diesen Gleichungen genügen aber die aus den vorangehenden Gleichungen sich ergebenden Werte von x' und x''. Hat man diese Werte von x' und x'' in 8) eingesetzt, so zeigt sich, daß x_1 und x_2 nur in den Verbindungen $x_1 + x_2$ und $x_1 x_2$ auftreten, die ja ohne Auflösung der Gleichung 5) sich durch deren Koeffizienten ausdrücken lassen. Es ergeben sich Identitäten. Mithin ist, wie behauptet, $S'T''$ das eine Grundpaar von u', u'' und daher $T'S''$ das andere.

Die sechs singulären Elemente S, T; S', T'; S'', T'' auf u, u', u'' bilden daher in folgender Weise die Grundpaare oder neutralen Paare:

in u und u': ST', TS',
in u und u'': ST'', TS'',
in u' und u'': $S'T''$, $T'S''$.

Jedes dieser Paare hat ein unbestimmtes Element im dritten Gebilde zugeordnet oder gehört zu ∞^1 Tripeln der Trilinearität.

Jedem singulären Elemente ist eine ausgeartete Projektivität zwischen den beiden andern Gebilden zugeordnet. Die dem S zugeordnete hat T' und T'' zu singulären Elementen, d. h. die Tripel zu denen S gehört, werden durch T' und ein unbestimmtes Element von u'' oder durch T'' und ein unbestimmtes Element von u' vervollständigt.

Die drei Gleichungen 5), 5'), 5'') haben dieselbe Diskriminante:

$$\mu^2\nu^2 + \mu'^2\nu'^2 + \mu''^2\nu''^2 - 2\mu'\mu''\nu'\nu'' - 2\mu''\mu\nu''\nu - 2\mu\mu'\nu\nu'$$
$$- 2\lambda\varkappa(\mu\nu + \mu'\nu' + \mu''\nu'') + 4\lambda\nu\nu'\nu'' + 4\mu\mu'\mu''\varkappa.$$

Daraus folgt, daß, wenn in einem der drei Gebilde die singulären Elemente reell, konjugiert imaginär oder vereinigt

sind, dasselbe auch in den andern beiden gilt. Im letzten Falle heißt die Trilinearität singulär.

Fällt S mit T zusammen, dann vereinigen sich auch die zugehörigen ausgearteten Projektivitäten zwischen u' und u'', d. h. die singulären Elemente T' und T'' der einen mit den singulären Elementen S' und S'' der andern.

Das „singuläre Tripel" $SS'S''$ umfaßt die drei neutralen Paare, dieses Falles: SS', SS'', $S'S''$.

Wir haben gewisse einfache Fälle der Trilinearität, in denen die gefundenen Resultate leicht zu bestätigen sind. Drei Ebenenbüschel u, u', u'' sind trilinear, wenn solche Ebenen in ihnen einander zugeordnet werden, welche sich in einem Punkte einer festen Ebene ω schneiden; denn der Punkt, in welchem ω von der Schnittlinie zweier Ebenen aus zwei Büscheln getroffen wird, bestimmt eindeutig die Ebene aus dem dritten Büschel. Wenn ω von den drei Axen in U, U', U'' geschnitten wird, so bilden die Ebenen σ, τ', welche in UU', die Ebenen τ, σ'', welche in UU'', und die Ebenen σ', τ'', welche in $U'U''$ sich schneiden, drei neutrale Paare, weil die Schnittpunkte dieser in ω gelegenen Schnittlinien mit ω unbestimmt sind, und ebenso τ, σ'; σ, τ''; τ', σ'' drei neutrale Paare, weil sie bzw. durch die Punkte U'', U', U gehen und daher die zugeordnete Ebene in u'', u', u unbestimmt wird. Wir bezeichnen diesen Spezialfall als perspektive Lage trilinearer Ebenenbüschel. 210

Liegen U, U', U'' in gerader Linie, so fallen σ und τ, σ' und τ', σ'' und τ'' zusammen; wir haben singuläre Trilinearität.

Gehen, bei perspektiver Lage, die Axen u, u', u'' durch den nämlichen Punkt O, so laufen die drei Ebenen eines Tripels je durch denselben Strahl des Bündels O — geradlinige Trilinearität von Ebenenbüscheln; σ und τ' vereinigen sich in der Ebene uu', τ und σ'' in uu'', σ' und τ'' in $u'u''$.

Drei Punktreihen u, u', u'' sind trilinear und in perspektiver Lage, wenn drei zugeordnete Punkte je in derselben Ebene eines festen Bündels O liegen. Drei neutrale Paare S, T'; T, S''; S', T'' erhält man durch die Strahlen von O, welche u, u'; u, u''; u', u'' treffen und in denen je zwei der Ebenen $v = Ou$, $v' = Ou'$, $v'' = Ou''$ sich schneiden. Es liegen dann T, S'; S, T''; T', S'' in den Ebenen v'', v', v und sind daher auch neutrale Paare.

Wenn u, u', u'' in derselben Ebene liegen, so befinden sich zugeordnete Punkte je in einer Gerade (der Spur einer Bündelebene); wir haben geradlinige Trilinearität von Punktreihen; S und T' sind in dem Punkte uu', T, S'' in uu'' und S', T'' in $u'u''$ zusammengefallen.

Betrachten wir dazu noch die feldduale Figur: drei trilineare Strahlenbüschel U, U', U'' derselben Ebene, in denen je in denselben

Punkt zusammenlaufende Strahlen ein Tripel bilden: s, t' sind in UU', t, s'' in UU'', s', t'' in $U'U''$ vereinigt.

Liegen drei trilineare Gebilde ineinander, so ergibt die Relation 1) der Trilinearität, wenn $x' = x'' = x$ gesetzt wird, die kubische Gleichung:

$$9) \qquad \lambda x^3 + (\mu + \mu' + \mu'')x^2 + (\nu + \nu' + \nu'')x + \pi = 0,$$

welche den Satz liefert:

Bei drei ineinander liegenden trilinearen Gebilden vereinigen sich dreimal alle drei Elemente eines Tripels.

Wenn drei trilineare Punktreihen in derselben Ebene liegen, so besitzen die Büschel, welche sie aus einem Punkte derselben projizieren, drei solche Elemente. Also umhüllen die Geraden, welche drei trilinearen Punktreihen derselben Ebene in drei entsprechenden Punkten begegnen, eine Kurve 3. Klasse, welche die drei Träger berührt. Und analog entsteht bei drei trilinearen Strahlenbüscheln in derselben Ebene eine Kurve 3. Ordnung.

Sind etwa bloß u' und u'' ineinanderliegend, so ergibt sich eine Korrespondenz [1, 2], in der ein Element von u und zwei vereinigte ihm entsprechende von u', u'' zugeordnet sind.

211 Drei trilineare Ebenenbüschel u, u', u'' in allgemeiner Lage erzeugen durch die Schnittpunkte zugeordneter Ebenen eine kubische Fläche. Denn in eine Gerade schneiden sie drei trilineare Punktreihen ein, und die drei Punkte, in denen je drei zugeordnete Punkte sich vereinigen, sind die Schnitte mit der erzeugten Fläche.

Dies gilt auch in dem speziellen Falle, wo die Büschel trilinear in perspektiver Lage sind; die kubische Fläche besteht dann aus der Ebene ω und der Trägerfläche der Regelschar $[uu'u'']$. Denn die drei Ebenen von u, u', u'', welche nach der Spur einer Gerade dieser Schar in ω gehen, haben die Gerade ganz gemeinsam, so daß sie dem Erzeugnisse angehört.

Bezieht man drei Ebenenbüschel u, u', u'' projektiv bzw. auf drei andere v, v', v'', welche trilinear in perspektiver Lage sind, so werden sie selbst trilinear, und die kubische Fläche entsteht durch die Schnittpunkte solcher dreier Ebenen von u, u', u'', deren entsprechende Ebenen aus v, v', v'' in einen Punkt von ω zusammenlaufen; das ist F. Augusts Erzeugung einer Fläche 3. Ordnung durch „duploprojektive" Ebenenbüschel[1]). Sie führt unmittelbar zu einer eindeutigen Abbildung der Fläche in eine Ebene.

Die drei Axen u, u', u'' liegen ganz auf der Fläche; denn z. B. die beiden Ebenen von u', u'' nach irgend einem Punkte von u

1) F. August, De superficiebus tertii ordinis. Diss. Berlin 1862. Vgl. auch Cremona, Journ. f. Math., Bd. 68, S. 79 (1868), wo die singulären Elemente schon vorkommen.

treffen sich in ihm mit der zugeordneten Ebene von u. Der Kegelschnitt, in dem eine beliebige Ebene durch u die Fläche schneidet, ist der Schnitt mit der Regelschar, die durch die Schnittlinien der Ebenen von u', u'' entsteht, welche in der jener Ebene zugehörigen Projektivität entsprechend sind. Alle diese Regelscharen haben zwei Geraden gemein, welche von den Grundpaaren des Projektivitäten-Büschels herrühren, und ihre Leitscharen die beiden Geraden u', u''; also ist den Trägerflächen, welche eindeutig den Ebenen von u zugeordnet sind, ein windschiefes Vierseit gemeinsam, und wir haben einen Spezialfall der Steinerschen Erzeugungsweise der kubischen Fläche (Nr. 169).

Ein ebener Schnitt 3. Ordnung wird durch drei trilineare Strahlenbüschel erzeugt. Jeder Strahl eines der drei Büschel gehört nur zu zwei Tripeln mit Schnittpunkt. Die Kurve 3. Ordnung entsteht also nur durch die ∞^1 Tripel, deren drei Strahlen einen gemeinsamen Punkt haben.

Die Schnittlinien $\sigma\tau'$, $\tau\sigma'$; $\sigma\tau''$, $\tau\sigma''$; $\sigma'\tau''$, $\tau'\sigma''$ der Ebenen der neutralen Paare gehören, wegen der Unbestimmtheit der dritten Ebene, ganz der Fläche an; jede von ihnen trifft zwei von den Büschelaxen.

Auch die Regelschar $[uu'u'']$ enthält drei Geraden, die vollständig auf der Fläche liegen, drei zugeordneten Ebenen gemeinsam sind; wenn drei zugeordnete Ebenen einen Punkt einer Gerade aus der Schar gemeinsam haben, so haben sie die ganze Gerade gemeinsam. Eine Ebene ξ von u enthält eine Gerade der Regelschar; den beiden in ihr sich schneidenden Ebenen von u', u'' ist durch die Trilinearität eine Ebene ξ_1 von u zugeordnet. Umgekehrt, einer Ebene ξ_1 von u ist eine Projektivität zwischen u', u'' zugeordnet, welche mit derjenigen, die durch die Regelschar zwischen diesen Büscheln entsteht, zwei Paare entsprechender Ebenen gemeinsam hat; die Geraden der Regelschar, zu denen diese führen, geben in u die beiden der ξ_1 entsprechenden Ebenen ξ. Somit ist im Büschel u eine Korrespondenz [2, 1] entstanden, deren drei Koinzidenzen die gesuchten Geraden liefern.

Jeder dieser drei Ebenen von u ist eine Regelschar ϱ zugeordnet, erzeugt durch die entsprechende Projektivität zwischen u', u'', zu welcher die in der Ebene befindliche von den drei Geraden gehört. Folglich liegt in der Ebene auch eine Gerade l der Leitschar der ϱ; in jedem Punkte derselben wird unsere Ebene von zwei ihr zugeordneten, immer in einer Gerade der Regelschar ϱ sich schneidenden Ebenen getroffen, wodurch er und die ganze Gerade l auf die Fläche kommt. Dies gibt neun Geraden der Fläche, von denen je drei die u, u', u'' treffen, so daß schon $3 + 6 + 3 + 9 = 21$ auf der Fläche gelegene Geraden erhalten sind. Es sind noch sechs

Geraden auf der Fläche vorhanden, welche gegen alle drei Büschelaxen windschief sind; sie sollen etwas später ermittelt werden.

Dual zu dieser Entstehungsweise der Fläche 3. Ordnung ist die der Fläche 3. Klasse — die nicht etwa der Inbegriff der Tangentialebenen einer Fläche 3. Ordnung, sondern wesentlich von ihr verschieden ist — durch die Verbindungsebenen zugeordneter Punkte von drei Punktreihen in Trilinearität.

Wenn drei Gebilde, etwa drei Ebenenbüschel, sowohl trilinear, als auch projektiv sind, so entsteht auf der kubischen Raumkurve, welche infolge der Projektivität sich ergibt, ebenfalls eine trilineare Beziehung, weil jede Ebene eines der drei Büschel sie nur noch einmal schneidet. Die drei Punkte, in denen je drei zugeordnete Punkte der Trilinearität sich vereinigen, lehren, daß der Trilinearität und der Projektivität drei Tripel von entsprechenden Ebenen gemeinsam sind. Jene drei Punkte sind die Schnitte der kubischen Raumkurve mit der durch die Trilinearität erzeugten kubischen Fläche, außerhalb der Axen.

Drei trilineare Punktreihen derselben Ebene seien durch einen Strahlenbüschel perspektiv gemacht; er enthält drei Strahlen, die durch entsprechende Punkte der Trilinearität gehen.

Wenn drei trilineare Punktreihen in einer Ebene liegen, so ist der Ort der Geraden, welche sie in homologen Punkten treffen, eine Kurve 3. Klasse (vgl. Nr. 210).

212 Eine kubische Fläche bewirkt um jede drei windschiefe Geraden, die auf ihr liegen, eine Trilinearität, in welcher die in einem Punkte der Fläche sich schneidenden Ebenen der drei Büschel zugeordnet sind; zwei Ebenen aus zweien der Büschel ist diejenige im dritten zugeordnet, welche nach dem dritten Schnitte ihrer Schnittlinie, welche ja die Axen jener Büschel trifft, mit der Fläche geht.

Dagegen entsteht, wenn von den drei Geraden zwei sich schneiden (in einem Punkte, der nicht Doppelpunkt der Fläche ist), keine Trilinearität, weil die Schnittlinie zweier Ebenen aus den zugehörigen Büscheln noch zweimal schneidet.

Wenn umgekehrt von den Axen u, u', u'' dreier in Trilinearität befindlicher Ebenenbüschel zwei sich schneiden, etwa u und u', so begegnet jede durch den Punkt uu' gehende Gerade l der erzeugten Fläche nur noch in ihrem Schnittpunkte mit der Ebene von u'', welche die Ebenen ul, $u'l$ zu einem Tripel der Trilinearität ergänzt; daher ist der Punkt uu' ein Doppelpunkt der Fläche.

Ein Doppelpunkt entsteht aber auch, wenn die Trilinearität singulär ist; denn sind σ, σ', σ'' die singulären Ebenen, so haben wir die drei binären neutralen Paare $\sigma\sigma'$, $\sigma\sigma''$, $\sigma'\sigma''$, jedes zwei des allgemeinen Falles vertretend, daher die drei binären Geraden

$\sigma\sigma'$, $\sigma\sigma''$, $\sigma'\sigma''$ der Fläche, welche durch den Punkt $\sigma\sigma'\sigma''$ gehen, aber nicht in dieselbe Ebene fallen; also ist dieser Punkt ein Doppelpunkt der Fläche.

Schneiden sich insbesondere die drei singulären Ebenen in einer Gerade, so wird dieselbe eine Doppelgerade der Fläche, diese also eine Regelfläche 3. Grades.

Gehen die drei Axen u, u', u'' alle durch denselben Punkt, so entsteht ein Kegel 3. Ordnung.

Die trilineare Relation hat sieben wesentliche Konstanten; daraus 213
folgt, daß sieben Tripel zugeordneter Elemente die Trilinearität eindeutig festlegen. Es entsteht die Aufgabe, weitere Tripel zu konstruieren.

Da ein neutrales Paar, etwa ST', durch zwei beliebige Elemente des dritten Gebildes zu Tripeln vervollständigt werden kann und zwei solche Tripel $ST'A''$, $ST'B''$ umgekehrt ST' als neutrales Paar charakterisieren, so ist die Trilinearität auch eindeutig festgelegt durch 3, 2, 1 neutrale Paare und 1, 3, 5 Tripel.

Sind z. B. die drei neutralen Paare ST', TS'', $S'T''$ gegeben, welche dann TS', ST'', $T'S''$ als ebenfalls neutrale Paare zur Folge haben, so kann man die sechs Tripel:

$$ST'S'', \quad SS'T'', \quad ST'T'' \quad TS'T'', \quad TT'S'', \quad TS'S''$$

bilden; ST' wird ein neutrales Paar, weil ihm S'' und T'' zugeordnet sind. Fügen wir noch das Tripel $AA'A''$ hinzu. Die beiden gemeinsamen Paare ST', TS' bestimmen den Büschel der Projektivitäten zwischen u und u'; ordnen wir den beiden ausgearteten Projektivitäten desselben: mit den singulären Elementen T, T', bzw. S, S' und derjenigen, in welcher A und A' entsprechend sind, die Elemente S'', T'', A'' von u'' zu, so können wir für jedes Element X'' von u'' die zugeordnete Projektivität konstruieren.

Nehmen wir in u als festes Element A, dem in den drei genannten Projektivitäten T', S', A' entsprechen, so haben wir (Nr. 209) die Projektivität $T'S'A' \barwedge S''T''A''$ zwischen u', u''; ist in ihr X' dem X'' entsprechend, so ist die dem X'' zugeordnete Projektivität: $STA \barwedge T'S'X'$; sie liefert die ∞^1 Dupel aus u, u', welche X'' vervollständigen.

Es liegen zwei Trilinearitäten vor, die eine zwischen den Gebilden u, u', u'', die andere zwischen v, v', v''. Wir wollen uns letztere als Ebenenbüschel vorstellen, was keine Beeinträchtigung der Allgemeinheit ist. Jene habe die neutralen Paare ST', TS'', $S'T''$; TS', ST'', $T'S''$, diese die neutralen Paare $\sigma\tau', \ldots$; ferner sei noch $AA'A''$, bzw. $\alpha\alpha'\alpha''$ je ein Tripel. Wir machen nunmehr die Gebilde u und v, u' und v', u'' und v'' so projektiv, daß:

$$STA \barwedge \sigma\tau\alpha, \qquad S'T'A' \barwedge \sigma'\tau'\alpha', \qquad S''T''A'' \barwedge \sigma''\tau''\alpha''.$$

Dann geht aus der Trilinearität $(uu'u'')$ vermittelst dieser Projektivitäten eine Trilinearität zwischen v, v', v'' hervor, in welcher ebenfalls $\alpha\alpha'\alpha''$ ein Tripel ist und $\sigma\tau'$, ... neutrale Paare sind; denn ST' und ein beliebiges Element von u'' bilden ein Tripel von $(uu'u'')$, also bilden σ, τ' und das dem beliebigen Elemente durch die Projektivität (u'', v'') entsprechende Element, also ein ebenfalls beliebiges Element von v'' ein Tripel dieser neuen Trilinearität. Dieselbe ist deshalb mit der gegebenen identisch.

So ist es gelungen, die eine der gegebenen Trilinearitäten $(uu'u'')$ und $(vv'v'')$ in die andere durch Projektivitäten überzuführen.

Nun sei $(vv'v'')$ die spezielle Trilinearität, wo die drei Ebenenbüschel in perspektiver Lage sind, und ω sei die Perspektivitätsebene. Statt der Ebenenbüschel v, v', v'' können wir auch, was noch einfacher ist, die zu ihnen perspektiven Strahlenbüschel in ω nehmen. In $(vv'v'')$ lassen sich auf zwei verschiedene Weisen ∞^2 Reihen von je ∞^1 Tripeln nachweisen, deren Elemente sich projektiv in den Büscheln v, v', v'' entsprechen. Wir lassen den Punkt in ω eine Gerade durchlaufen oder einen der Kegelschnitte durch die Spuren V, V', V'' von v, v', v''. Jede der Geraden oder jeder dieser Kegelschnitte ist durch zwei Punkte festgelegt.

Folglich gibt es auch in der allgemeinen Trilinearität $(uu'u'')$ zwei Systeme von ∞^2 solchen Tripelreihen, oder in ihr sind zwei Systeme von ∞^2 Projektivitäten zwischen u, u', u'' enthalten, deren entsprechende Elemente auch in ihr zugeordnet sind. Zwei Tripel von $(uu'u'')$ bestimmen je eine Reihe des einen und des andern Systems.

Die Ebenen σ, τ'; τ, σ''; σ', τ'' der einen neutralen Paare von v, v', v'' gehen nach VV', VV'', $V'V''$, die Ebenen τ, σ'; σ, τ''; τ', σ'' der andern gehen durch V'', V', V (Nr. 210). Jede Gerade von ω trifft jene drei Geraden, jeder der genannten Kegelschnitte geht durch diese drei Punkte. Daraus folgt, daß in allen Tripelreihen des ersten Systems von $(uu'u'')$ S, T'; T, S''; S', T'' zu Tripeln gehören, in allen des zweiten Systems T, S'; S, T''; T', S''.

Sind auch u, u', u'' Ebenenbüschel, so führen diese beiden doppelt unendlichen Systeme zu zwei Systemen von ∞^2 kubischen Raumkurven, welche auf der erzeugten Fläche 3. Ordnung liegen. Zwei Punkte der Fläche bestimmen aus jedem System eine Raumkurve; alle diese Raumkurven haben die drei Büschelaxen u, u', u'' zu Doppelsekanten; die des einen Systems treffen die Geraden $\sigma\tau'$, $\tau\sigma''$, $\sigma'\tau''$ der Fläche einmal, die des andern Systems die Geraden $\tau\sigma'$, $\sigma\tau''$, $\tau'\sigma''$; wobei hier mit σ, τ, ... die singulären Ebenen der Trilinearität $(uu'u'')$ bezeichnet sind.

Bestimmen wir in jedem der beiden Systeme eine Tripelreihe durch die zwei Tripel von Ebenen, welche in zwei von den drei Geraden der kubischen Fläche zusammenlaufen, die zur Regelschar $[uu'u'']$ gehören, so lösen sich diese beiden Geraden von der zugehörigen kubischen Raumkurve ab, und es bleibt als eigentliches Erzeugnis der in der Trilinearität enthaltenen projektiven Ebenenbüschel u, u', u'' eine Gerade, welche jene beiden Geraden trifft. So ergeben sich die $3 \cdot 2 = 6$ Geraden der kubischen Fläche, welche gegen u, u', u'' windschief sind und deren Ableitung wir in Nr. 211 noch verschoben haben.

Wenn für die Trilinearität $(uu'u'')$ die neutralen Paare ST', TS'', 214
$S'T''$ und ein Tripel $AA'A''$ gegeben sind, so machen wir, nun Strahlenbüschel als die einfacheren Gebilde vorziehend, u, u', u'' bzw. projektiv zu drei gegebenen Strahlenbüscheln V, V', V'' einer Ebene, welche trilinear sind in perspektiver Lage, d. h. in denen jede drei konkurrente Strahlen ein Tripel bilden (Nr. 210); in diesen vereinigen sich in VV' die singulären Strahlen s, t', in VV'' die t, s'', in $V'V''$ die s', t''. Seien a, a', a'' drei konkurrente Strahlen von V, V', V'', so sind die drei vermittelnden Projektivitäten:

$$STA \barwedge sta, \qquad S'T'A' \barwedge s't'a', \qquad S''T''A'' \barwedge s''t''a''.$$

Jedes Tripel konkurrenter Strahlen von V, V', V'' liefert dann in den ihnen durch diese Projektivitäten entsprechenden Elementen von u, u', u'' ein Tripel der in der obigen Weise bestimmten Trilinearität $(uu'u'')$.

Es seien zweitens die neutralen Paare ST', TS' und die drei Tripel $AA'A''$, $BB'B''$, $CC'C''$ gegeben und in den Büscheln V, V', V'', wie oben, in VV' die s, t' vereinigt usw. und a, a', a'' konkurrent; dann werden b, c in V, b', c' in V' so konstruiert, daß:

$$stabc \barwedge STABC, \qquad s't'a'b'c' \barwedge S'T'A'B'C';$$

gehen nun b'', c'' aus V'' nach den Schnitten bb', cc', so ist die dritte Projektivität zwischen V'' und u'' festgelegt durch:

$$a''b''c'' \barwedge A''B''C'';$$

und wiederum liefern je drei konkurrente Strahlen von V, V', V'' vermittelst der drei Projektivitäten ein Tripel von $(uu'u'')$.

Die Elemente S'', T'', welche in der letzten Projektivität den $s'' = V''V$, $t'' = V''V'$ korrespondieren, sind die noch fehlenden singulären Elemente von $(uu'u'')$.

Die beiden weiteren Aufgaben, in denen ein neutrales Paar und fünf Tripel, bzw. sieben Tripel gegeben sind, sollen später erledigt werden.

Dagegen soll hier noch die Aufgabe der Bestimmung der Trilinearität durch die Projektivitäten P_A, P_B zwischen u' und u'', welche

zu den Elementen A, B von u gehören, und ein Tripel $CC'C''$ besprochen werden; auf sie werden wir die zweite der eben genannten Aufgaben zurückführen. Bestimmt man quadratisch die gemeinsamen Paare $S'T''$, $T'S''$ dieser beiden Projektivitäten P_A, P_B, so hat man zwei neutrale Paare und dazu drei Tripel. Linear kann man folgendermaßen verfahren. Dem C' korrespondiere in P_A das Element C''_A von u'', in P_B das Element C''_B; dann gehört zu C' folgende Projektivität zwischen u und u'':

$$P_{C'} \quad ABC \barwedge C''_A C''_B C''.$$

Ist daher X'' ein beliebiges Element von u'', so möge ihm in P_A das Element X'_A von u', in P_B das Element X'_B von u' und in $P_{C'}$ das Element $X_{C'}$ von u entsprechen; wir haben als zu X'' gehörige Projektivität zwischen u und u':

$$P_{X''} \quad ABX_{C'} \barwedge X'_A X'_B C'.$$

Sie liefert zu jedem X oder X' das entsprechende X' oder X; wir finden so zu XX'' oder $X'X''$ das dritte Element X', bzw. X.

Man kann auch die Projektivitäten $P_{C''}$ und $P_{X'}$ herstellen und dann zu XX' oder $X'X''$ je das dritte Element X'', X konstruieren[1]).

215 Liegen zwei Trilinearitäten zwischen denselben Gebilden u, u', u'' vor, deren Gleichungen:

$$T = 0, \quad T_1 = 0$$

seien, so gibt es ∞^1 Tripel, die zu beiden gehören, weil nunmehr nur ein Parameter willkürlich gegeben werden kann; dieselben sind dann, nach bekanntem Schlusse, auch allen Trilinearitäten

$$T + \varrho T_1 = 0$$

gemeinsam, welche einen Büschel bilden.

Jedem Elemente von u ist durch $T = 0$ sowohl wie durch $T_1 = 0$ eine Projektivität zwischen u' und u'' zugeordnet; die gemeinsamen Paare derselben vervollständigen jenes Tripel zu zwei Tripeln unserer Reihe. Die gemeinsamen Tripel zweier Trilinearitäten zwischen denselben Gebilden erzeugen eine Tripelreihe von der Beschaffenheit, daß jedes Element eines der Gebilde in zwei Tripeln erhalten ist, daher: R_2.

Diese beiden Tripel, denen ein gegebenes Element eines der drei Gebilde angehört, lassen sich also quadratisch konstruieren. Linear aber ist die Aufgabe, zu einem Tripel dieser Reihe R_2 das zweite aus derselben zu konstruieren, welche eins der drei Elemente mit ihm gemeinsam hat.

---

1) Vgl. zu dieser Aufgabe London, Math. Annalen, Bd. 44, S. 396ff. — Untersuchungen über trilineare Gebilde hat auch G. Hauck veröffentlicht: Journ. f. Math., Bd. 95, 97, 98, 108, 111, 128.

Sechs Tripel bestimmen die sieben wesentlichen Konstanten der trilinearen Relation als lineare Funktionen eines Parameters, führen also zu einem Büschel von Trilinearitäten und einer solchen Reihe von Tripeln.

Handelt es sich wiederum um Ebenenbüschel u, u', u'', so haben die kubischen Flächen, welche zu $T = 0$ und $T_1 = 0$ (und allen Trilinearitäten des Büschels) gehören, außer den Axen u, u', u'', noch eine Raumkurve 6. Ordnung gemein, welche durch die Schnittpunkte der Ebenen der Tripel der Reihe R_2 erzeugt wird. Sie ist vom Geschlechte 1 und dem Range 12[1]).

Jede Ebene, etwa von u, trifft diese Kurve, außer auf u, noch zweimal: in den Punkten, in denen sie sich mit den sie zu Tripeln der Reihe R_2 ergänzenden Ebenen aus u', u'' begegnet, oder in denen die beiden Kegelschnitte, welche sie aus den beiden kubischen Flächen ausschneidet, außer auf u', u'' sich treffen. Den drei Büschelaxen begegnet sie also viermal.

Wenn zwischen zweien der Gebilde, etwa u, u', eine Projektivität P besteht, so gibt es vier Paare entsprechender Elemente derselben, die in Tripeln der Reihe R_2 sich befinden. Jedes Element X nämlich von u gehört zu zwei Tripeln von R_2; ihren zu u' gehörigen Elementen mögen durch P die beiden Elemente X_1 von u entsprechen, welche wir dem X zuordnen. Einem X_1 von u korrespondiert durch P ein Element von u'; die beiden Elemente X von u, die mit ihm zu Tripeln von R_2 gehören, entsprechen dem X_1. Die Korrespondenz [2, 2] zwischen X und X_1 führt durch ihre Koinzidenzen zu der Behauptung. Wenn u, u', u'' Ebenenbüschel sind, so hat die Trägerfläche der Regelschar, welche durch P entsteht, mit der Kurve 6. Ordnung, außerhalb u, u', noch vier Punkte gemein.

Jetzt seien drei Trilinearitäten zwischen denselben Gebilden u, u', u'' gegeben:

$$T = 0, \qquad T_1 = 0, \qquad T_2 = 0;$$

sie haben sechs Tripel gemeinsam, die dann wieder zu allen Trilinearitäten des Netzes: $T + \varrho T_1 + \sigma T_2 = 0$ gehören.

In der Tat, ein Element X_{01} von u gehört zu zwei Tripeln der Reihe R_2, welche bei $T = 0$ und $T_1 = 0$ sich ergibt; ihren zu u', u'' gehörigen Elementenpaaren sind durch $T_2 = 0$ zwei Elemente X_2 von u zugeordnet. Ein Element X_2 von u bewirkt durch $T_2 = 0$ eine Projektivität zwischen u' und u'', von welcher vier Paare entsprechender Elemente in Tripeln jener Reihe R_2 sich befinden; die zu u gehörigen

1) Sturm, Flächen 3. Ordnung Nr. 63; London, Math. Annalen Bd. 45, S. 545, wo diese Kurve ausführlicher untersucht wird.

Elemente dieser Tripel sind die dem X_2 entsprechenden X_{01}. Die sechs Koinzidenzen der entstandenen Korrespondenz [4, 2] führen zu den sechs gemeinsamen Tripeln.

Nimmt man wiederum Ebenenbüschel, so sind die Schnittpunkte der Ebenen dieser Tripel die Punkte, in denen die Raumkurve 6. Ordnung und die Fläche 3. Ordnung, welche bei $T=0$, $T_1=0$ und bei $T_2=0$ sich ergeben, außerhalb der Büschelaxen sich schneiden.

Fünf Tripel bestimmen das Netz und damit das sechste gemeinsame Tripel.

Man kann vier Gebilde quadrilinear beziehen vermittelst einer Relation zwischen vier Parametern, die in bezug auf jeden von ihnen linear ist; drei Elementen aus drei Gebilden ist eins im vierten zugeordnet. So entstehen ∞^3 Quadrupel. Jedem Elemente ist eine Trilinearität zwischen den drei andern Gebilden zugeordnet. Liegen die Gebilde ineinander, so gibt es vier Elemente, in denen je alle vier Elemente eines Quadrupels sich vereinigt haben.

Bei vier quadrilinearen Ebenenbüscheln gibt es nur ∞^2 Quadrupel mit in einen Punkt zusammenlaufenden Ebenen. Diese Punkte erzeugen eine Fläche 4. Ordnung.

216 Die drei trilinearen Gebilde mögen ineinander liegen und die Relation sei überdies symmetrisch in den drei Variabeln, so daß sie lautet:

$$10) \quad \lambda x x' x'' + \mu(x'x'' + x''x + xx') + \nu(x + x' + x'') + \varkappa = 0.$$

Aus dieser Symmetrie folgt, daß $x=\alpha$, $x'=\beta$ oder $x=\beta$, $x'=\alpha$; $x=\alpha$, $x''=\beta$ oder $x=\beta$, $x''=\alpha$; $x'=\alpha$, $x''=\beta$ oder $x'=\beta$, $x''=\alpha$ zu demselben Werte γ bzw. für x'', x', x führen; so daß die Unterscheidung der Gebilde nicht notwendig ist. Zwei Elemente bestimmen eindeutig ein drittes, während, wenn nicht Symmetrie vorliegt, je nach den Gebilden, welchen man jene zuweist, sechs zugeordnete Elemente sich ergeben.

Wir nennen diese spezielle Trilinearität involutorisch (oder symmetrisch).

Weil die Relation drei wesentliche Konstanten hat, so gibt es ∞^3 involutorische Trilinearitäten in einem gegebenen Gebilde.

Und drei Tripel bestimmen eine solche Trilinearität eindeutig.

Sie hat nur ein neutrales Paar; denn der dritte Parameter x'' wird unbestimmt für diejenigen x, x', welche in:

$$\{\lambda xx' + \mu(x + x') + \nu\}x'' + (\mu xx' + \nu(x + x') + \varkappa) = 0$$

oder

$$Ix'' + I_1 = 0$$

I und I_1 einzeln zu null machen; das gibt:

$$xx' = \frac{\nu^2 - \mu\varkappa}{\mu^2 - \lambda\nu}, \quad x + x' = -\frac{\mu\nu - \lambda\varkappa}{\mu^2 - \lambda\nu};$$

folglich sind x, x' die Wurzeln von:

11) $$(\mu^2 - \lambda\nu)x^2 + (\mu\nu - \lambda\varkappa)x + (\nu^2 - \mu\varkappa) = 0.$$

Sie liefern das neutrale Paar. Alle drei Gleichungen 5), 5'), 5'') (Nr. 209) fallen in 11) zusammen, wenn $\mu = \mu' = \mu''$, $\nu = \nu' = \nu''$.

Man kann es auffassen als ST', $S'T$, ST'', $S''T$, $S'T''$, $S''T'$.

$I = 0$, $I_1 = 0$ und allgemein $Ix'' + I_1 = 0$ sind Involutionen, und durch (11) ist das gemeinsame Paar der $I = 0$, $I_1 = 0$ gegeben, das dann zu allen $Ix'' + I_1 = 0$ gehört.

Die kubische Gleichung für die dreifachen Elemente ist:

12) $$\lambda x^3 + 3\mu x^2 + 3\nu x + \varkappa = 0.$$

Auf der kubischen Raumkurve als unikursalem Träger ergibt sich eine solche Trilinearität, wenn man sie mit den Ebenen eines Bündels O schneidet; denn zwei Punkte auf ihr bestimmen eindeutig eine Ebene des Bündels und den dritten Schnitt. Das neutrale Paar entsteht durch die beiden Punkte, in denen die von O kommende Doppelsekante die Kurve trifft; sie liegen in ∞^1 Ebenen des Bündels, die einen Büschel um diese Gerade bilden. Die Gleichung (11) liefert die Parameter der Stützpunkte. Die dreifachen Punkte sind die Oskulationspunkte der durch O gehenden Schmiegungsebenen der Kurve.

Sind x_1, x_2, x_3 die Wurzeln von 12), so ist:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{3\mu}{\lambda}, \quad x_2x_3 + x_3x_1 + x_1x_2 = \frac{3\nu}{\lambda}, \quad x_1x_2x_3 = -\frac{\varkappa}{\lambda};$$

man sieht sofort, daß x_1, x_2, x_3 für x, x', x'' in 10) eingesetzt, diese Relation befriedigen. Folglich bilden in der involutorischen Trilinearität die dreifachen Elemente nicht bloß jedes dreifach gerechnet ein Tripel, sondern auch zusammen. Das bedeutet für die kubische Raumkurve den in Nr. 204 gefundenen Satz, daß die Verbindungsebene der genannten drei Oskulationspunkte durch O geht, die Polarebene eines Punktes in bezug auf eine kubische Raumkurve, wie diese Ebene auch genannt wird, den Pol stets enthält.

Nimmt man die linke Seite von 12) als eine Grundform 3. Grades, so ist diejenige von 11) die Kovariante 2. Grades, die wir in Nr. 150 mit H bezeichnet haben. Und aus dem, was dort über die Wurzeln beider Gleichungen gefunden wurde, ergibt sich:

Je nachdem die dreifachen Elemente alle drei reell sind oder nur eins, sind die Elemente des neutralen Paares imaginär oder reell.

Und je nachdem von einem Punkte an eine kubische Raumkurve drei reelle Schmiegungsebenen kommen oder nur eine, ist die von demselben Punkte ausgehende Doppelsekante eine ideelle oder eine eigentliche.

Jede involutorische Trilinearität auf einer kubischen Raumkurve ist durch einen Bündel eingeschnitten. Denn ist O der Schnitt der Ebenen von drei beliebigen Tripeln, so ist die durch den Bündel O hervorgerufene Trilinearität mit der gegebenen identisch wegen der drei gemeinsamen Tripel.

Sei

$$Q = ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d = 0$$

die Gleichung eines Tripels von Elementen, und x, x', x'' ihre Wurzeln, so ist:

$$x + x' + x'' = -\frac{3b}{a}, \quad x'x'' + x''x + xx' = \frac{3c}{a}, \quad xx'x'' = -\frac{d}{a};$$

wir setzen dies in 10) ein und erhalten:

13) $$\lambda d - 3\mu c + 3\nu b - \varkappa a = 0$$

als Bedingung dafür, daß $Q = 0$ ein Tripel der involutorischen Trilinearität ist.

Für ein zweites Tripel $Q_1 = 0$ ergibt sich ebenso:

$$\lambda d_1 - 3\mu c_1 + 3\nu b_1 - \varkappa a_1 = 0;$$

folglich ist auch für jeden Wert von ϱ:

$$\lambda(d + \varrho d_1) - 3\mu(c + \varrho c_1) + 3\nu(b + \varrho b_1) - \varkappa(a + \varrho a_1) = 0;$$

d. h. jedes Tripel der kubischen Involution $Q + \varrho Q_1 = 0$ gehört zu unserer Trilinearität.

Die durch zwei Tripel einer involutorischen Trilinearität bestimmte kubische Involution gehört vollständig zu derselben.

Bei der involutorischen Trilinearität auf der kubischen Raumkurve ist dies unmittelbar ersichtlich.

Hieraus folgt aber, daß die drei bestimmenden Tripel einer Trilinearität nicht derselben kubischen Involution angehören dürfen.

Man erkennt ähnlich, wie eben, daß, wenn $Q = 0$, $Q_1 = 0$, $Q_2 = 0$ drei Tripel einer involutorischen Trilinearität sind (die nicht derselben kubischen Involution angehören), dann $Q + \varrho Q_1 + \sigma Q_2 = 0$ für jeden Wert von ϱ und σ ein solches Tripel ist; und durch die ∞^2 Tripel, die man dadurch erhält, werden alle Tripel derselben erschöpft. In der Tat, es sei $XX'X''$ ein Tripel der Trilinearität; man setze die Parameter von X und X' in die eben geschriebene Gleichung ein und bestimme aus den beiden erhaltenen Gleichungen die Unbekannten ϱ, σ; die sich ergebenden Werte seien

ϱ', σ', so gehört das Tripel $Q + \varrho' Q_1 + \sigma' Q_2 = 0$ zur Trilinearität und ist mit dem gegebenen identisch; da durch zwei Elemente ein Tripel eindeutig bestimmt wird.

Weil nur ein neutrales Paar vorhanden ist, so ist höchstens eins der drei Paare von $XX'X''$ neutral; XX' sei dann nicht dieses Paar.

In ähnlicher Weise ergeben sich bei einer involutorischen Quadrilinearität aus vier Quadrupeln $Q = 0$, $Q_1 = 0$, $Q_2 = 0$, $Q_3 = 0$ alle vermittelst der Gleichung:

$$Q + \varrho Q_1 + \sigma Q_2 + \tau Q_3 = 0,$$

wenn die Parameter ϱ, σ, τ auf alle möglichen Weisen variiert werden. Dies wird uns zu einer andern Begriffserweiterung führen.

Wenn bei der allgemeinen Trilinearität einem Element eines der drei Gebilde eine Projektivität zwischen den beiden andern zugeordnet ist und diese Projektivitäten einen Büschel von Projektivitäten bilden, welche zwei gemeinsame Paare entsprechender Elemente haben (Nr. 209), so ist, wie schon kurz erwähnt wurde, bei der involutorischen Trilinearität (oder Involution 3. Grades 2. Stufe, wie wir sie bald auch nennen werden) jedem Elemente eine Involution zugeordnet; diese Involutionen haben das neutrale Paar gemein, stützen sich also auf diejenige, welche dessen Elemente zu Doppelelementen hat (Nr. 85), und bilden einen Büschel.

Ist der Träger ein Kegelschnitt K, so bilden auf der Verbindungslinie u des neutralen Paars die Zentren dieser Involutionen eine Punktreihe, die zu der auf K projektiv ist, indem jedem Punkte von K das Zentrum der zugehörigen Involution entspricht. Jedes Tripel ABC der Trilinearität auf K und sein entsprechendes $A'B'C'$ auf u liegen so, daß BC, CA, AB durch A', B', C' gehen.

Wollen wir zwischen den Punktreihen auf K und u eine derartige besondere Projektivität herstellen, so darf nur ein Paar entsprechender Punkte A, A' gegeben werden; weitere entsprechende Punkte X, X' sind dann so zu konstruieren, daß immer AX' und $A'X$ sich auf dem Kegelschnitte begegnen; weil der Begegnungspunkt sich perspektiv zu X' und involutorisch zu X bewegt, so bewegen sich auch X und X' projektiv. Sind z. B. B und B' derartig konstruiert, $C = (AB', A'B)$ auf K und $C' = (u, AB)$, so sind auch C und C' entsprechend, weil AC' und $A'C$ sich in B begegnen, wir haben also zwei entsprechende Tripel von jener Eigenschaft.

Zwei beliebige Paare entsprechender Punkte XX', YY' führen zu zwei solchen Tripeln. D, E seien die auf K gelegenen Schnittpunkte $(AX', A'X)$, $(AY', A'Y)$ und Z der zweite Schnitt von XY' mit K, so zeigt das Sechseck $ADXZYE$, für welches u

Pascalsche Gerade ist, daß auch $X'Y$ durch Z geht, so daß für jede zwei Paare entsprechender Punkte X, X'; Y, Y' das Schneiden von XY', $X'Y$ auf K stattfindet, und jedes Paar X, X' als Ausgangspaar genommen werden kann. Wir wissen schon, daß, wenn $Z' = (u, XY)$, die beiden Paare XX', YY' durch ZZ' zu zwei Tripeln mit der obigen Eigenschaft vervollständigt werden.

Ordnen wir nun jedem X die Paare der Involution auf K zu, deren Zentrum X' ist, so ergibt sich eine involutorische Trilinearität; bilden Y, Z ein Paar der Involution (X'), so ist auch ZX ein Paar von (Y') und XY eins von (Z').

Die Schnitte M, N von u und K entsprechen sich gegenseitig. $M \equiv N'$, $N \equiv M'$ und bilden das neutrale Paar; jeder Punkt von u ist Schnitt mit MN, entspricht dem unbestimmten dritten Punkte.

Liegen zwei entsprechende Punkte T, T' so, daß TT' den K in T berührt, so gehört TT zur Involution (T'), und TTT ist ein Tripel der Trilinearität.

Der Büschel der Tangenten der X ist projektiv zur Punktreihe der X'; also geht (Nr. 200) dreimal eine Tangente durch den entsprechenden Punkt; wodurch wir zu den drei dreifachen Punkten gelangen.

Die dreifache Unendlichkeit der symmetrischen Trilinearitäten auf K ergibt sich aus den ∞^2 Lagen von u und den ∞^1 Punkten A' auf jeder u, die dem festen A auf K zugeordnet werden können.

Drei Tripel bestimmen die involutorische Trilinearität, also tun das auch die drei dreifachen Punkte. Seien diese T, U, V und $\mathfrak{t}, \mathfrak{u}, \mathfrak{v}$ die zugehörigen Tangenten; sind dann T', U', V' die Schnitte $(\mathfrak{t}, UV)$, $(\mathfrak{u}, VT)$, $(\mathfrak{v}, TU)$, welche in gerader Linie u liegen (Nr. 119), so liefert die Projektivität: $TUV \barwedge T'U'V'$ die Trilinearität; und auch TUV stellt sich als Tripel heraus.

Aber auch die allgemeinere Aufgabe, aus drei beliebigen Tripeln ABC, DEF, GHI die involutorische Trilinearität zu konstruieren, macht keine Schwierigkeit.

Betrachten wir zunächst nur ABC, DEF; wir legen den A entsprechenden Punkt A' auf BC, dann sind, welche Gerade u durch A' auch genommen werde, in der durch AA' in der obigen Weise bestimmten Projektivität den B, C die Schnitte von u mit CA, AB entsprechend. Legen wir nun D' so auf EF, daß AD' und $A'D$ sich auf K treffen, so erweist sich $A'D'$ als die Gerade u, bei welcher in der zugehörigen Projektivität allen sechs Punkten $A, \ldots F$ je die Schnitte von u mit der Tripel-Gegenseite entsprechen.

Während dann A' auf BC sich bewegt, umhüllt u, da D' sich projektiv bewegt, einen Kegelschnitt, welcher die sechs Tripelseiten

berührt (was möglich ist, weil die Ecken auf einem Kegelschnitte liegen, Nr. 118). Für BC und EF ist es unmittelbar klar; kommt A' nach B, so fällt $A'D'$ in die Gerade AB, usw.

Ersetzen wir nun DEF durch GHI, so ergibt sich die vierte Tangente der beiden Kegelschnitte, außer BC, CA, AB, als die geeignete u[1]).

§ 34. Involutionen höherer Stufe.

Es seien in einem (unikursalen) Gebilde $k+1$ Gruppen von je n Elementen gegeben durch die Gleichungen n^{ten} Grades: 217

$$Q=0, \quad Q_1=0, \ldots \quad Q_k=0.$$

Dann erhält man durch alle ∞^k Gruppen

$$Q+\lambda_1 Q_1+\lambda_2 Q_2+\cdots+\lambda_k Q_k=0,$$

die sich durch die verschiedenen Werte von $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k$ ergeben, eine Involution n^{ten} Grades k^{ter} Stufe, welche durch I_n^k bezeichnet werde. Die gemeine Involution ist genauer eine quadratische Involution 1. Stufe, und die involutorische Trilinearität und Quadrilinearität sind Involutionen 3. Grades 2. Stufe, bzw. 4. Grades 3. Stufe.

Statt mit unhomogenen Parametern $\lambda_1, \ldots \lambda_k$ wird die Gleichung oft mit homogenen geschrieben:

$$\mu Q+\mu_1 Q_1+\cdots+\mu_k Q_k=0,$$

wo dann $\lambda_1=\frac{\mu_1}{\mu}$, $\lambda_2=\frac{\mu_2}{\mu}, \ldots, \lambda_k=\frac{\mu_k}{\mu}$ ist und zu jeder Gruppe ein System von Parametern λ, aber ∞^1 untereinander proportionale Systeme von μ gehören.

Die gegebenen $k+1$ Gruppen nennen wir die Konstituenten der Involution.

k Elemente des Gebildes bestimmen eindeutig eine Gruppe der I_n^k, zu der sie gehören; denn werden ihre Parameter in die $Q, Q_1, \ldots$ eingesetzt, so ergeben sich k Gleichungen für die gesuchten k Parameter $\lambda_1, \ldots \lambda_k$, welche linear in ihnen sind und sie im allgemeinen eindeutig bestimmen. Sind $k'<k$ Elemente gegeben, so erhält man nur k' Gleichungen, kann also $k-k'$ der Parameter beliebige Werte geben, worauf dann die übrigen k' durch die Gleichungen bestimmt sind; jene Werte können auf $\infty^{k-k'}$ Weisen gewählt werden, und es gibt daher in der Involution $\infty^{k-k'}$ Gruppen, denen die k' Elemente angehören. Hingegen $k'>k$ beliebig gegebene Elemente gehören nicht zu derselben Gruppe.

---

1) R. Böger, Ebene Geometrie der Lage (Leipzig 1900), § 18.

Ist $k = n$, so kann man alle Elemente einer Gruppe willkürlich wählen; I_n^n besteht aus allen ∞^n n-elementigen Gruppen des Gebildes. Es muß daher $k \leqq n$ sein, und auch $k = n$ hat geringes Interesse.

Eine Involution $I_n^{k'}$, bei welcher $k' < k$ und deren $k' + 1$ Konstituenten sich unter den Gruppen von I_n^k befinden, gehört mit allen Gruppen zu I_n^k.

Es seien
$$\begin{aligned} Q^{(0)} &= Q + \lambda_1^{(0)} Q_1 + \cdots + \lambda_k^{(0)} Q_k = 0, \\ Q' &= Q + \lambda_1' Q_1 + \cdots + \lambda_k' Q_k = 0, \\ Q'' &= Q + \lambda_1'' Q_1 + \cdots + \lambda_k'' Q_k = 0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ Q^{(k')} &= Q + \lambda_1^{(k')} Q_1 + \cdots + \lambda_k^{(k')} Q_k = 0, \end{aligned}$$
die Konstituenten dieser Involution $I_n^{k'}$, so kann die Gleichung einer beliebigen Gruppe in ihr:
$$Q^{(0)} + \mu' Q' + \mu'' Q'' + \cdots + \mu^{(k')} Q^{(k')} = 0$$
in der Form:
$$\begin{aligned} (1 + \mu' + \mu'' + \cdots + \mu^{(k')}) Q + (\lambda_1^{(0)} + \mu' \lambda_1' + \mu'' \lambda_1'' + \cdots + \mu^{(k')} \lambda_1^{(k')}) Q_1 \\ + (\lambda_2^{(0)} + \mu' \lambda_2' + \cdots + \mu^{(k')} \lambda_2^{(k')}) Q_2 + \cdots \\ + (\lambda_k^{(0)} + \mu' \lambda_k' + \cdots + \mu^{(k')} \lambda_k^{(k')}) Q_k = 0 \end{aligned}$$
geschrieben werden; was beweist, daß die Gruppe zu I_n^k gehört.

Man sagt von Gruppen einer Involution I_n^k, deren Anzahl $s \geqq k + 1$ ist, sie seien unabhängig voneinander, wenn sie sich nicht in einer Involution niedrigerer Stufe befinden.

Die Konstituenten einer Involution I_n^k müssen unabhängig voneinander sein. Gehören $Q = 0, \ldots Q_k = 0$ zu einer Involution k'^{ter} Stufe, wo $k' < k$, so lassen sich $Q_{k'+1}, Q_{k'+2}, \ldots Q_n$ durch $Q, Q_1, \ldots Q_{k'}$ linear parametrisch darstellen, also auch $Q + \lambda_1 Q_1 + \cdots + \lambda_k Q_k$ durch $Q, Q_1, \ldots Q_{k'}$; man bleibt innerhalb der Involution k'^{ter} Stufe. Die ∞^k Wertegruppen $\lambda_1, \ldots \lambda_k$ führen nicht zu ∞^k, sondern nur zu $\infty^{k'}$ Elementengruppen; je $\infty^{k-k'}$ Wertegruppen liefern dann dieselbe Elementengruppe.

Die ursprünglichen Konstituenten kann man durch irgend welche $k + 1$ unabhängige Gruppen der Involution ersetzen. Der Beweis verläuft ähnlich wie der in Nr. 136 für $k = 1$ geführte.

Wenn
$$\begin{aligned} Q^{(0)} &= Q + \lambda_1^{(0)} Q_1 + \cdots + \lambda_k^{(0)} Q_k = 0, \\ Q' &= Q + \lambda_1' Q_1 + \cdots + \lambda_k' Q_k = 0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ Q^{(k)} &= Q + \lambda_1^{(k)} Q_1 + \cdots + \lambda_k^{(k)} Q_k = 0 \end{aligned}$$
$k + 1$ Gruppen sind, so handelt es sich darum, zu zeigen, daß:
$$Q + \lambda_1 Q_1 + \lambda_2 Q_2 + \cdots + \lambda_k Q_k = 0$$

in die Form

$$\varrho^{(0)} Q^{(0)} + \varrho' Q' + \varrho'' Q'' + \cdots + \varrho^{(k)} Q^{(k)} = 0$$

gebracht werden kann; dies gibt, wenn die Koeffizienten von Q, $Q_1, \ldots Q_k$ verglichen werden, folgende $k+1$ Gleichungen für die $k+1$ gesuchten homogenen Parameter $\varrho^{(0)}, \ldots \varrho^{(k)}$:

$$\begin{aligned}
1 &= \varrho^{(0)} + \varrho' + \varrho'' + \cdots + \varrho^{(k)}, \\
\lambda_1 &= \lambda_1^{(0)} \varrho^{(0)} + \lambda_1' \varrho' + \lambda_1'' \varrho'' + \cdots + \lambda_1^{(k)} \varrho^{(k)}, \\
\lambda_2 &= \lambda_2^{(0)} \varrho^{(0)} + \lambda_2' \varrho' + \lambda_2'' \varrho'' + \cdots + \lambda_2^{(k)} \varrho^{(k)}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\lambda_k &= \lambda_k^{(0)} \varrho^{(0)} + \lambda_k' \varrho' + \lambda_k'' \varrho'' + \cdots + \lambda_k^{(k)} \varrho^{(k)},
\end{aligned}$$

welche, weil linear in den Unbekannten, sie eindeutig bestimmen.

Weil k beliebige Elemente stets zu einer Gruppe einer I_n^k gehören und man $k+1$ Gruppen von k Elementen auf $\infty^{(n-k)(k+1)}$ Weisen durch je $n-k$ Elemente zu Gruppen von n Elementen vervollständigen kann, so gibt es auf gegebenem Träger $\infty^{(n-k)(k+1)}$ Involutionen I_n^k.

Nehmen wir aber an, daß diese Gruppen $Q^{(0)} = 0, \ldots Q^{(k)} = 0$ nicht unabhängig seien, sondern derselben Involution $(k-1)^{\text{ter}}$ Stufe I_n^{k-1} angehören, während $Q^{(0)} = 0, \ldots Q^{(k-1)} = 0$ unabhängig sind, so seien diese zu Konstituenten der I_n^{k-1} gewählt, und $Q^{(k)}$ läßt sich linear parametrisch durch sie darstellen:

$$Q^{(k)} = \sigma^{(0)} Q^{(0)} + \sigma' Q' + \cdots + \sigma^{(k-1)} Q^{(k-1)};$$

setzt man dies in $\varrho^{(0)} Q^{(0)} + \cdots + \varrho^{(k)} Q^{(k)}$ ein und vergleicht die Koeffizienten von Q, $Q_1, \ldots Q_k$ mit 1, $\lambda_1, \ldots \lambda_k$, so ergeben sich $k+1$ Gleichungen in den k Unbekannten:

$$\varrho^{(0)} + \varrho^{(k)} \sigma^{(0)}, \quad \varrho' + \varrho^{(k)} \sigma', \ldots, \quad \varrho^{(k-1)} + \varrho^{(k)} \sigma^{(k-1)},$$

welche im allgemeinen nicht auflösbar sind; wenn aber, so führen sie zu Werten der ϱ, die zu Gruppen gehören, welche innerhalb jener Involution $(k-1)^{\text{ter}}$ Stufe bleiben.

Aus den ∞^k Gruppen der I_n^k kann man die $l+1$ Konstituenten 218
einer in ihr enthaltenen I_n^l, wo $l < k$ ist, auf $\infty^{k(l+1)}$ Weisen herausnehmen; da aber jede I_n^l, wegen ihrer ∞^l Gruppen, auf $\infty^{l(l+1)}$ Weisen konstituiert werden kann, so ergibt sie sich so oft, und wir haben nicht $\infty^{k(l+1)}$, sondern nur $\infty^{k(l+1)-l(l+1)}$ Involutionen I_n^l.

Die Involution I_n^k enthält $\infty^{(k-l)(l+1)}$ Involutionen I_n^l; für zwei Stufen l, l', bei denen $l + l' = k - 1$, hat $(k-l)(l+1)$ denselben Wert, so also auch für I_n^{k-1} und I_n^0. Da I_n^0 ersichtlich eine einzige Gruppe bedeutet, so enthält I_n^k soviele Involutionen I_n^{k-1}, als sie einzelne Gruppen enthält, also ∞^k; ferner $\infty^{2(k-1)}$ Involutionen I_n^1 und I_n^{k-2}; usw.

Jede $I_n^k (k < n)$ ist in der einzigen Involution I_n^n ihres Trägers enthalten; dies führt wieder zu den $\infty^{(n-k)(k+1)}$ Involutionen I_n^k auf gegebenem Träger.

Zwei in I_n^k enthaltene Involutionen I_n^l und $I_n^{l'}$, bei denen $h = l + l' - k \geqq 0$ ist, haben gemeinsame Gruppen und zwar eine, wenn $h = 0$, und eine Involution I_n^h von Gruppen, wenn $h > 0$ ist.

Sie haben zusammen $l + l' + 2 = k + h + 2$ Konstituenten; von diesen nehmen wir $k + 1$ zur Konstituierung von I_n^k und zwar alle von I_n^l, nämlich $Q = 0$, $Q_1 = 0, \ldots Q_l = 0$, und von den Konstituenten von $I_n^{l'}$ noch $l' - h$, welche:

$$Q_{l+1} = 0, \quad Q_{l+2} = 0, \ldots \quad Q_k = 0$$

seien. Es bleiben dann noch $h + 1$ Konstituenten von $I_n^{l'}$ übrig, welche, als Gruppen von I_n^k, sich linear parametrisch durch $Q, Q_1, \ldots Q_k$ ausdrücken lassen; sie seien:

$$\begin{array}{l} Q^{(0)} \equiv Q + \alpha_1^{(0)} Q_1 + \cdots + \alpha_k^{(0)} Q_k = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ Q^{(h)} \equiv Q + \alpha_1^{(h)} Q_1 + \cdots + \alpha_k^{(h)} Q_k = 0. \end{array}$$

Es sei dann

$$\varrho_{l+1} Q_{l+1} + \cdots + \varrho_k Q_k + \lambda^{(0)} Q^{(0)} + \cdots + \lambda^{(h)} Q^{(h)} = 0$$

eine Gruppe von $I_n^{l'}$; soll sie auch zu I_n^l gehören, so müssen die Parameter $\varrho_{l+1}, \ldots \varrho_k$ so bestimmt werden, daß die Glieder mit Q_{l+1} bis Q_k herausfallen; dazu muß sein:

$$\begin{array}{l} -\varrho_{l+1} = \lambda^{(0)} \alpha_{l+1}^{(0)} + \cdots + \lambda^{(h)} \alpha_{l+1}^{(h)}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ -\varrho_k \;\; = \lambda^{(0)} \alpha_k^{(0)} + \cdots + \lambda^{(h)} \alpha_k^{(h)}. \end{array}$$

Es ergibt sich:

$$\lambda^{(0)}(Q + \alpha_1^{(0)} Q_1 + \cdots + \alpha_l^{(0)} Q_l) + \lambda^{(1)}(Q + \alpha_1^{(1)} Q_1 + \cdots + \alpha_l^{(1)} Q_l) \\ + \cdots + \lambda^{(h)}(Q + \alpha_1^{(h)} Q_1 + \cdots + \alpha_l^{(h)} Q_l) = 0;$$

das ist eine Involution h^{ter} Stufe, bzw. eine einzelne Gruppe, wenn $h = 0$.

Sie wächst zur Stufe $h + h'$, wenn I_n^l und $I_n^{l'}$ so in I_n^k liegen, daß sie schon von einer $I_n^{k-h'}$ umfaßt werden.

Ist aber $l + l' < k$, so haben I_n^l und $I_n^{l'}$ im allgemeinen keine Gruppe gemeinsam; es sei denn, daß sie schon von einer $I_n^{k-h'}$ umfaßt werden und $l + l' \geqq k - h'$ ist.

Es haben also in einer I_n^2 zwei I_n^1 stets eine Gruppe gemein; wir sehen es anschaulich bei der I_3^2, welche durch einen Ebenenbündel in die kubische Raumkurve eingeschnitten wird und deren I_3^1 durch die Büschel des Bündels entstehen; zwei von ihnen haben eine Ebene gemeinsam.

Jede I_n^1, welche eine der drei Konstituenten einer I_n^2 mit einer beliebigen Gruppe G derselben „verbindet" und daher der I_n^2 angehört, hat mit der I_n^1, welche durch die beiden andern Konstituenten festgelegt wird und ebenfalls der I_n^2 angehört, eine Gruppe gemein; und so befindet sich jede Gruppe der I_n^2 in einer der Involutionen I_n^1, welche jene Konstituente mit allen Gruppen dieser die beiden andern Konstituenten verbindenden I_n^1 verbindet: dies wollen wir die fächerförmige Entstehung der I_n^2 aus drei Konstituenten (unter Bevorzugung einer) nennen. Bei der I_3^2 auf der kubischen Raumkurve entspricht sie der fächerförmigen Entstehung des Ebenenbündels aus drei Konstituenten, drei Ebenen des Bündels, die nicht zu demselben Büschel gehören; irgendeine dieser Ebenen bestimmt mit jeder Ebene des Büschels der beiden andern wiederum einen Büschel, und alle diese Büschel erzeugen den Bündel. Man erzeuge ebenso einen Strahlenbündel, ein Punktfeld, ein Strahlenfeld aus drei Konstituenten.

In einer I_n^3 haben zwei I_n^1 keine Gruppe gemein, sie müßten denn in einer der I_n^3 angehörigen I_n^2 sich befinden; dagegen haben eine I_n^2 und eine I_n^1 der I_n^3 eine Gruppe gemeinsam und zwei I_n^2 der I_n^3 eine I_n^1.

So hat die I_n^1, welche eine der vier Konstituenten G_0 der I_n^3 mit einer beliebigen Gruppe G aus ihr verbindet, mit der I_n^2, die durch die drei übrigen Konstituenten G_1, G_2, G_3 bestimmt wird, eine Gruppe gemein. Wir kommen daher zu allen Gruppen der I_n^3, wenn wir jene Konstituente G_0 mit allen Gruppen dieser $I_n^2 = G_1 G_2 G_3$ verbinden, und nennen dies wiederum die fächerförmige Entstehung der I_n^3. Man erhält in ähnlicher Weise den ganzen Ebenenraum aus vier beliebigen, d. h. nicht zu demselben Bündel gehörigen Ebenen, indem man eine von ihnen mit allen Ebenen des Bündels der drei andern zu Büscheln zusammensetzt; jede Ebene befindet sich in einem dieser Büschel. Und dual entsteht der Punktraum. Beide sind uns Bilder der I_n^3.

Lassen wir bei dieser die I_n^2 der drei übrigen Konstituenten G_1, G_2, G_3 fächerförmig durch die I_n^1 entstehen, welche von G_1 nach den Gruppen der Involution $G_2 G_3$ gehen, so entsteht I_n^3 auch durch die I_n^2, welche G_0, G_1 und eine veränderliche Gruppe G' von $G_2 G_3$ zu Konstituenten haben, und jede dieser I_n^2 durch die I_n^1 von G' nach einer veränderlichen Gruppe G von $G_0 G_1$. Also entsteht I_n^3 durch die ∞^2 Involutionen I_n^1, welche je eine veränderliche Gruppe G von $G_0 G_1$ mit einer veränderlichen Gruppe G' von $G_2 G_3$ verbinden.

Ähnlich entsteht der Ebenenraum aus zwei windschiefen Ebenenbüscheln: durch die Ebenenbüschel irgend zwei Ebenen derselben, und der Punktraum aus zwei windschiefen Punktreihen: durch

die Punktreihen auf den Verbindungslinien irgend zweier Punkte derselben.

Man mache ähnliche Betrachtungen für Involutionen höherer Stufe.

Alle linearen (d. h. linear parametrisch darstellbaren) Systeme führen zu analogen Ergebnissen.

219 I_n^k sei konstituiert durch $G_0, G_1, \ldots G_k$; wir nehmen an, der Satz, daß k Elemente $A_1, \ldots A_k$ eine Gruppe von I_n^k bestimmen (Nr. 217), sei bis $k-1$ richtig, so ist er auch für k richtig. Jede der Involutionen 1. Stufe, die von G_0 nach $G_1, G_2, \ldots G_k$ gehen und der I_n^k angehören, enthält eine Gruppe, zu welcher A_k gehört; diese k Gruppen bestimmen eine Involution I_n^{k-1}, deren sämtliche Gruppen das Element A_k enthalten und welche selbst in I_n^k enthalten ist. Nach der Annahme besitzt sie, und damit I_n^k, eine Gruppe, welche A_1, $A_2, \ldots A_{k-1}$ enthält und daher alle k Elemente $A_1, \ldots A_k$. Nun ist der Satz für $k = 1$ richtig, also durchweg[1]).

Wenn sämtliche Konstituenten von I_n^k r Elemente gemein haben, so gehören diese zu allen Gruppen von I_n^k und man erhält, wenn man von diesen Elementen absieht, d. h. die auf sie bezüglichen linearen Faktoren aus $Q, Q_1, \ldots$ entfernt, eine Involution I_{n-r}^k.

Eine I_n^k enthält ∞^{k-r} Gruppen, zu denen r gegebene Elemente gehören, wo $r < k$ ist (Nr. 217); wir nehmen $k-r+1$ unabhängige aus ihnen und konstituieren durch sie eine I_n^{k-r}, welche ganz in I_n^k enthalten ist und deren Gruppen alle die r Elemente enthalten. Es sei G eine beliebige Gruppe der I_n^k, zu welcher diese r Elemente gehören; $k-r$ von den $n-r$ übrigen Elementen derselben bestimmen in I_n^{k-r} eine Gruppe, welche dadurch zu I_n^k gehört und mit G in k Elementen übereinstimmt, diesen $k-r$ und jenen r, also mit ihr identisch ist.

Folglich bilden alle Gruppen von I_n^k, welche $r < k$ gegebene Elemente enthalten, eine I_n^{k-r}, die sich, wenn von diesen gemeinsamen Elementen abgesehen wird, auf eine I_{n-r}^{k-r} reduziert.

220 Eine I_n^1 hat $2(n-1)$ Doppelelemente (Nr. 136); wir nehmen an, es sei richtig, daß eine Involution I_n^{k-1} $k(n-k+1)$ k-fache Elemente besitzt, d. h. so viele Gruppen, in denen k von den n Elementen sich vereinigt haben, so soll bewiesen werden, daß dann eine I_n^k $(k+1)(n-k)$ $(k+1)$-fache Elemente besitzt.

Aus der I_n^k scheidet das Element X eine Involution I_{n-1}^{k-1} aus, gebildet durch alle $(n-1)$-elementigen Gruppen, welche mit X

1) Cremona, Preliminari ad una teoria geometrica delle superficie (Memorie dell'Accademia di Bologna, Ser. II, Bd. 6, 7, 1866 und 67) oder: Grundzüge einer allgemeinen Theorie der Oberflächen (Berlin 1870), Nr. 43.

Gruppen von I_n^k bilden; sie hat nach der Annahme $k(n-1-k+1) = k(n-k)$ k-fache Elemente X_1, welche wir dem X zuordnen. Wir setzen in

$$f(x) \equiv Q + \lambda_1 Q_1 + \cdots + \lambda_k Q_k = 0,$$

sowie in

$$f'(x) = 0,\ f''(x) = 0, \ldots f^{(k-1)}(x) = 0, \text{ wo } f'(x), \ldots$$

die Ableitungen von $f(x)$ sind, für x den Parameter von X_1 ein und erhalten k lineare Gleichungen in $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k$, welche ein Wertsystem dieser Größen liefern und daher eine Gruppe von I_n^k, in welcher X_1 k-fach ist; denn diese k Gleichungen sind die Bedingungsgleichungen dafür, daß jener Parameter k-fache Wurzel von $f(x) = 0$ mit den genannten Werten der $\lambda_1, \ldots$ ist. Die $n-k$ übrigen Elemente dieser Gruppe sind dann die dem X_1 zugehörigen X. Zwischen den X und X_1 besteht also eine Korrespondenz $[n-k,\ k(n-k)]$ und ihre $(k+1)(n-k)$ Koinzidenzen sind $(k+1)$-fache Elemente der I_n^k. Für $k=1$ ist der Satz richtig, also gilt er allgemein[1]).

Eine I_n^k besitzt $(k+1)(n-k)$ $(k+1)$-fache Elemente $(k<n)$.

Wir ordnen nunmehr in einer I_n^2 dem Elemente X nicht die 221
$2(n-2)$ Doppelelemente der I_{n-1}^1 zu, sondern die übrigen Elemente der Gruppen, zu denen sie gehören, also im ganzen $2(n-2)\cdot(n-3)$ Elemente X_1. Diesmal sind X und X_1 gleichartig definiert, beide als Elemente einer Gruppe von I_n^k, welche ein Doppelelement besitzt; folglich liegt eine involutorische Korrespondenz $[2(n-2)(n-3)]$ vor. Aus ihren $4(n-2)(n-3)$ Koinzidenzen schließen wir, daß es in I_n^2 $2(n-2)(n-3)$ Gruppen mit zwei Doppelelementen gibt; denn für jedes von zwei so zusammengehörigen Doppelelementen ergibt sich das andere als Koinzidenz.

Das Zusammenrücken von $t+1$ Elementen einer Gruppe in ein Element ist eine t-fache und dasjenige von $k-t+1$ Elementen eine $(k-t)$-fache Bedingung; beide zusammen bilden eine k-fache Bedingung und können in einer I_n^k einer Gruppe, weil deren ∞^k vorhanden sind, auferlegt werden. Wir suchen daher die Anzahl der Gruppen in einer I_n^k, welche ein $(t+1)$-faches und ein $(k-t+1)$-faches Element besitzen; wofern natürlich $t+1+k-t+1 = k+2 \leqq n$ ist.

Ein Element X als $(k-t)$-faches Element scheidet aus I_n^k eine Involution I_{n-k+t}^t aus; dieselbe besitzt $(t+1)(n-k)$ Gruppen mit einem $(t+1)$-fachen Elemente; jede hat $n-k-1$ weitere Elemente. Diese $(t+1)(n-k)(n-k-1)$ Elemente X_1 ordnen wir dem X zu. Ein X_1 scheidet aus I_n^k eine I_{n-1}^{k-1} aus, die eine Anzahl von Gruppen mit einem $(t+1)$-fachen und einem $(k-t)$-fachen Elemente besitzt,

1) Vgl Cremona, Preliminari oder Grundzüge, Nr. 75.

welche Anzahl wir vorläufig $Z_{n-1}^{k-1,t}$ nennen. Die $Z_{n-1}^{k-1,t}$ $(k-t)$-fachen Elemente dieser Gruppen sind die dem X_1 zugehörigen X. Aus der Korrespondenz $\left[Z_{n-1}^{k-1,t},\ (t+1)(n-k)(n-k-1)\right]$ schließen wir, daß für die Anzahl der Gruppen in I_n^k, die ein $(t+1)$-faches und ein $(k-t+1)$-faches Element haben, welche Anzahl wir mit $Z_n^{k,t}$ zu bezeichnen haben, gilt:

$$Z_n^{k,t} = (t+1)(n-k)(n-k-1) + Z_{n-1}^{k-1,t};$$

ebenso:

$$Z_{n-1}^{k-1,t} = (t+1)(n-k)(n-k-1) + Z_{n-2}^{k-2,t},$$

. . . .

$$Z_{n-k+t+1}^{t+1,t} = (t+1)(n-k)(n-k-1) + Z_{n-k+t}^{t,t};$$

also durch Addition:

$$Z_n^{k,t} = (t+1)(k-t)(n-k)(n-k-1) + Z_{n-k+t}^{t,t}.$$

Diese Zahl $Z_{n-k+t}^{t,t}$ ist die Zahl der Gruppen in einer I_{n-k+t}^t, welche ein $(t+1)$-faches Element und ein $(t-t+1)$-, also ein einfaches Element haben. Aber die Zahl der Gruppen in I_{n-k+t}^t mit einem $(t+1)$-fachen Elemente liefert uns der vorige Satz, wenn wir n durch $n-k+t$ und k durch t ersetzen; sie ist $(t+1)(n-k)$; und da nun jede dieser Gruppen $n-k+t-(t+1) = n-k-1$ weitere einfache Elemente hat, so genügt sie $(n-k-1)$-fach der obigen Anforderung; d. h.:

$$Z_{n-k+t}^{t,t} = (t+1)(n-k)(n-k-1).$$

Also:

$$Z_n^{k,t} = (t+1)(k-t+1)(n-k)(n-k-1).$$

In einer Involution I_n^k, bei welcher $k+2 \leqq n$ ist, gibt es $(t+1)(k-t+1)(n-k)(n-k-1)$ Gruppen mit einem $(t+1)$-fachen und einem $(k-t+1)$-fachen Elemente.

Wenn aber k gerade und $t = \frac{k}{2}$, also $t = k - t$ ist, so ist diese Zahl zu halbieren, weil die beiden vielfachen Elemente gleichartig sind und jedes das Ausgangs-, das andere das Koinzidenzelement sein kann[1]).

222 Wir fügen einige interessanten Anwendungen hinzu:

Der Kegelschnitt gehört zu den unikursalen Gebilden. Alle Kreise der Ebene eines Kegelschnittes K schneiden in denselben eine I_4^3 ein: durch drei Punkte des K geht ein Kreis und

1) Zeitschr. f. Math. und Phys. Jahrg. 40, S. 10.

das zugehörige Quadrupel ist eindeutig bestimmt. Die ∞^4 Kreisbüschel und ∞^3 Kreisnetze erzeugen die in I_4^3 enthaltenen I_4^1 und I_4^2.

In I_4^3 gibt es vier Gruppen mit einem vierfachen Punkte. Es gibt also vier Kreise, welche K vierpunktig berühren: bekanntlich in den Scheiteln. In jedem Kreisnetze gibt es sechs Kreise, welche den K dreipunktig berühren (Krümmungskreise), und in jedem Kreisbüschel ebenfalls sechs Kreise, welche ihn berühren.

Ferner, alle Kreise durch einen festen Punkt P von K schneiden eine I_3^2 ein; die drei dreifachen Punkte derselben, welche ebenfalls ein Tripel der Involution bilden, lehren:

Durch jeden Punkt P eines Kegelschnitts gehen drei ihn anderwärts oskulierende Kreise, und die drei Oskulationspunkte liegen mit P auf einem Kreise.

Die kubische Raumkurve ist ebenfalls unikursal; durch alle ∞^4 Kugeln des Raumes entsteht auf ihr eine Involution I_6^4. Ihre I_6^3, I_6^2, I_6^1 entstehen durch die ∞^4 Kugelgebüsche, ∞^6 Kugelnetze, ∞^6 Kugelbüschel.

Die I_6^4 hat zehn fünffache Punkte. Es gibt also zehn Kugeln, welche eine kubische Raumkurve fünfpunktig berühren. Nehmen wir im letzten Satze $t = 2$, also $k - t = 2$, oder $t = 1$ und $k - t = 3$, so haben wir:

Es gibt neun Kugeln, welche die kubische Raumkurve an zwei verschiedenen Stellen dreipunktig berühren, und sechzehn Kugeln, welche sie an einer Stelle vier-, an einer andern zweipunktig berühren.

Die Kugeln, welche durch einen festen Punkt der kubischen Raumkurve gehen, schneiden eine I_5^3 ein und unter ihnen gibt es acht, welche sie (anderwärts) vierpunktig berühren (Schmiegungskugeln sind).

Bei der I_3^2 fanden wir ein neutrales Paar, welches nicht eine Gruppe bestimmt, sondern zu ∞^1 Gruppen gehört. Für diejenige I_3^2, welche in einen Kegelschnitt K von den Kreisen eingeschnitten wird, die durch einen Punkt P von K gehen, besteht dies neutrale Paar aus den unendlich fernen Punkten des K; es ergibt sich bei den unter den genannten Kreisen befindlichen Geradenpaaren, die aus der unendlich fernen Gerade und einer durch P gehenden bestehen.

Der Satz von Nr. 216 lehrt dann:

Je nachdem dies Paar der unendlich fernen Punkte von K imaginär oder reell ist (Ellipse oder Hyperbel), sind die drei anderwärts oskulierenden Kreise durch P reell oder nur einer.

Bei der Parabel haben sich zwei von den drei Kreisen vereinigt in das Geradenpaar, dessen zweite Gerade von P nach dem unendlich

fernen Berührungspunkte der Parabel geht. Durch P geht nur ein eigentlicher die Parabel anderwärts oskulierender Kreis.

223 Bei einer I_n^2 fragen wir, wieviele Elemente X es gibt von der Art, daß die durch ein solches X aus I_n^2 ausgeschiedene I_{n-1}^1 ein gemeinsames Element X_1 für alle ihre Gruppen hat; denn dann bestimmen diese beiden Elemente X und X_1 nicht bloß eine Gruppe, sondern eine ganze Involution in I_n^2. Es genügt, daß zwei von den Gruppen der I_{n-1}^1 ein gemeinsames Element haben; dann folgt es für ihre übrigen Gruppen von selbst.

Nehmen wir diejenigen, zu welchen die festen Elemente O', O'' gehören. Dann lautet die Frage: für wieviele Elemente X haben die beiden durch O' und X und durch O'' und X bestimmten Gruppen der I_n^2 außer X noch ein gemeinsames Element X_1, oder wie oft kommt es vor, daß eine Gruppe der durch O' ausgeschiedenen Involution $I_{n-1}^1(O')$ und eine Gruppe der durch O'' ausgeschiedenen $I_{n-1}^1(O'')$ zwei Elemente gemein haben? Dabei ist jedoch notwendig, daß diese beiden Gruppen, durch O', bzw. O'' zu Gruppen der I_n^2 vervollständigt, zwei verschiedene Gruppen geben, so daß sie eben geeignet sind, eine Involution 1. Stufe festzulegen, deren Gruppen dann alle jene beiden Elemente gemein haben. Die beiden Involutionen $I_{n-1}^1(O')$ und $I_{n-1}^1(O'')$ haben (Nr. 196) $(n-2)^2$ Paare, von denen jedes sowohl zu einer Gruppe der einen wie zu einer der andern Involution gehört. Aber auch die durch die beiden Elemente O', O'' bestimmte Gruppe von I_n^2 führt zu solchen Paaren; denn ohne O' gehört sie zu $I_{n-1}^1(O')$, ohne O'' zu $I_{n-1}^1(O'')$; und ihre $n-2$ übrigen Elemente liefern $\frac{1}{2}(n-2)(n-3)$ Paare, welche abgezogen werden müssen; es bleiben daher:

$$(n-2)^2 - \tfrac{1}{2}(n-2)(n-3) = \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2).$$

Eine $I_n^2 (n > 2)$ besitzt $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ neutrale Paare, welche nicht eine einzige Gruppe, sondern eine Involution 1. Stufe von Gruppen bestimmen.

Weil die I_{n-1}^2, welche aus einer I_n^3 durch ein Element ausgeschieden wird, $\frac{1}{2}(n-2)(n-3)$ neutrale Paare besitzt, so hat die I_n^3 selbst ∞^1 neutrale Tripel, von denen jedes nicht bloß einer Gruppe, sondern einer Involution 1. Stufe von Gruppen angehört; und jedes Element gehört zu $\frac{1}{2}(n-2)(n-3)$ dieser neutralen Tripel.

Folglich entsteht eine involutorische Korrespondenz $[(n-2)(n-3)]$, in der zwei demselben neutralen Tripel angehörige Elemente zugeordnet sind.

Wenn N_1, N_2, N_3 ein neutrales Tripel bilden, so sind sie allen Gruppen einer Involution 1. Stufe gemeinsam. In einer durch N_1, N_2

gehenden Gruppe sei X ein weiteres Element; $N_1 N_2 X$ ist nicht ein neutrales Tripel, bestimmt also nur eine Gruppe in I_n^3, folglich ist dies diejenige der eben erwähnten Involution, zu welcher X gehört. Also enthält jede Gruppe der I_n^3, zu welcher zwei Elemente eines neutralen Tripels gehören, von selber das dritte Element desselben.

Zwei Elemente O', O'' scheiden aus I_n^3 eine Involution I_{n-2}^1 aus, welche, als eine $[n-3]$, mit der involutorischen Korrespondenz $[(n-2)(n-3)]$ der neutralen Tripel $(n-2)(n-3)^2$ Paare gemeinsam hat. Also hat I_{n-2}^1 $(n-2)(n-3)^2$ Gruppen, welche je zwei Elemente eines neutralen Tripels der I_n^3 enthalten, oder, wenn wir wieder O', O'' hinzufügen: I_n^3 hat $(n-2)(n-3)^2$ Gruppen, zu denen O', O'' gehören und zwei Elemente eines neutralen Tripels, also auch das dritte. Wir müssen davon aber diejenigen abziehen, bei denen das dritte Element eins der beiden Elemente O', O'' ist. O' gehört zu $\frac{1}{2}(n-2)(n-3)$ neutralen Tripeln, und in der Involution 1. Stufe von I_n^3, deren Gruppen eins dieser neutralen Tripel gemeinsam haben, gibt es eine Gruppe, zu deren weiteren Elementen O'' gehört; ebenso umgekehrt. Also sind $2\cdot\frac{1}{2}(n-2)(n-3)$ Gruppen abzuziehen. Folglich bleiben $(n-2)(n-3)^2-(n-2)(n-3)=(n-2)(n-3)(n-4)$ Gruppen von I_n^3, welche ein neutrales Tripel und außerhalb desselben noch O', O'' enthalten; aber weil das neutrale Tripel aus jedem seiner drei Paare hervorgeht, ist diese Zahl zu dritteln. Es gibt daher in I_n^3 $\frac{1}{3}(n-2)(n-3)(n-4)$ Gruppen, welche ein neutrales Tripel und außerhalb desselben O', O'' enthalten.

Ebenso viele haben wir bei O' und X'; in der Involution 1. Stufe, die zu jedem dieser neutralen Tripel gehört, suchen wir diejenige Gruppe auf, welche O'' enthält, und ordnen ihre $n-4$ weiteren Elemente X'' dem X' zu, so daß jedem X' $\frac{1}{3}(n-2)(n-3)(n-4)^2$ Elemente X'' entsprechen, und ebenso viele X' jedem X''. Wir haben in dieser Korrespondenz $\frac{2}{3}(n-2)(n-3)(n-4)^2$ Koinzidenzen und sehen, daß so oft eine durch O' und ein neutrales Tripel gehende Gruppe und eine durch O'' und dasselbe neutrale Tripel gehende Gruppe noch ein Element, die Koinzidenz, gemeinsam haben. Dazu gehören aber die $\frac{1}{3}(n-2)(n-3)(n-4)$ Fälle, wo eine Gruppe ein neutrales Tripel und außerhalb desselben O', O'' enthält; in einem solchen Falle sind die beiden Gruppen nicht verschieden. Die $n-5$ weitern Elemente einer jeden solchen Gruppe gehören zu unsern Koinzidenzen. Folglich bleiben:

$$\frac{2}{3}(n-2)(n-3)(n-4)^2-\frac{1}{3}(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)$$
$$=\frac{1}{3}(n-2)(n-3)^2(n-4)$$

Fälle, wo die beiden Gruppen verschieden sind und daher eine Involution 1. Stufe bewirken, deren sämtlichen Gruppen die Koinzidenz noch gemein ist. Diese gibt daher zum neutralen Tripel gefügt ein

neutrales Quadrupel, bei welchem aber jedes der vier Elemente das vierte sein kann; so daß die erhaltene Zahl durch 4 zu dividieren ist. Mithin haben wir:

In einer I_n^3 $(n > 4)$ gibt es $\frac{1}{12}(n-2)(n-3)^2(n-4)$ neutrale Quadrupel, welche nicht eine einzige Gruppe bestimmen, sondern einer Involution 1. Stufe von Gruppen gemeinsam sind.

In eine unikursale Raumkurve n^{ter} Ordnung (ohne vielfache Punkte) schneidet ein Ebenenbündel eine Involution I_n^2 ein und der ganze Ebenenraum eine Involution I_n^3.

Wir entnehmen den vorangehenden Ergebnissen, daß **an eine unikursale Raumkurve n^{ter} Ordnung von einem Punkte $3(n-2)$ Schmiegungsebenen, $2(n-2)(n-3)$ Doppelberührungsebenen und $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ Doppelsekanten kommen, daß durch jeden Punkt der Kurve $\frac{1}{2}(n-2)(n-3)$ dreifache Sekanten gehen und $\frac{1}{12}(n-2)(n-3)^2(n-4)$ vierfache Sekanten vorhanden sind, sowie $4(n-3)$ vierpunktig berührende Ebenen und $6(n-3)(n-4)$ Ebenen, welche an einer Stelle drei-, an einer andern zweipunktig berühren.** Die Koinzidenzen der involutorischen Korrespondenz $[(n-2)(n-3)]$, in der Schnitte derselben dreifachen Sekante zugeordnet sind, beweisen die Existenz **von $2(n-2)(n-3)$ Tangenten der Kurve, welche sie nochmals treffen.**

§ 35. Das Problem der ebenen Projektivität (Homographie)[1].

224 Dies Problem besteht darin, wenn in zwei Ebenen A und B zwei Gruppen von gleich vielen und einander zugeordneten Punkten gegeben sind:

$$G^n \qquad \begin{matrix} A_1 A_2 \dots A_n \\ B_1 B_2 \dots B_n, \end{matrix}$$

korrespondierende Punkte A in A, B in B aufzufinden, durch welche die Projektivität:

$$A(A_1, A_2, \dots A_n) \barwedge B(B_1, B_2, \dots B_n)$$

erfüllt wird. Weil durch drei Paare entsprechender Elemente die Projektivität erst festgelegt wird, so beginnt das Problem bei $n = 4$, und es wird bei $n = 7$ aufhören.

Wenn zwei Strahlenwürfe, welche nach den Punkten A_1, A_2, A_3, A_4 gehen, projektiv sind, so liegen diese vier Punkte und die beiden Scheitel auf einem Kegelschnitte, der durch jene und den einen Scheitel schon bestimmt ist. Also:

1) Math. Annalen, Bd. 1, S. 533.

Alle Punkte einer Ebene, aus denen vier Punkte derselben durch einen Strahlenwurf projiziert werden, der einem gegebenen Wurfe W projektiv ist (oder ein gegebenes Doppelverhältnis hat), erfüllen einen bestimmten durch die vier Punkte gehenden Kegelschnitt.

Konstruiert man z. B. im Büschel A_4 die Gerade a_4 so, daß $A_4(A_1, A_2, A_3, a_4)$ zu W projektiv ist, so ist a_4 die Tangente dieses Kegelschnittes in A_4, und er ist durch die vier Punkte und diese Tangente eindeutig bestimmt (Nr. 126); ist dann a_2 die Tangente in A_2, so ist:

$$A_2(A_1, a_2, A_3, A_4) \barwedge A_4(A_1, A_2, A_3, a_4) \barwedge W;$$

so daß es gleichgültig ist, in welchem der vier Punkte die Tangente konstruiert wird.

Statt A_4 sei die Gerade a_4 gegeben, so führt irgend ein auf a_4 gelegter Punkt A_4 sofort zu einem Kegelschnitte, und für seinen zweiten Schnitt A mit a_4 gilt:

$$A(A_1, A_2, A_3, A_4) \equiv A(A_1, A_2, A_3, a_4) \barwedge W.$$

Ist A_4' ein anderer Punkt von a_4, so ist ja $A(A_1, A_2, A_3, A_4') \equiv A(A_1, A_2, A_3, a_4)$; der bei A_4' sich ergebende vom vorigen verschiedene Kegelschnitt geht durch denselben Punkt A. **Es gibt also nur einen Punkt A auf a_4, für welchen:**

$$A(A_1, A_2, A_3, a_4) \barwedge W.$$

Wenn wirklich für zwei verschiedene Punkte A, A' auf a_4 gilt:

$$A(A_1, A_2, A_3, a_4) \barwedge A'(A_1, A_2, A_3, a_4) \barwedge W,$$

so werden die beiden Büschel A und A' perspektiv und A_1, A_2, A_3 liegen in gerader Linie, was im allgemeinen nicht der Fall ist.

Nehmen wir aber diese spezielle Lage an, so zerfällt der obige Kegelschnitt. Wird dann auf dieser Gerade a_0 der Punkt A_4^* konstruiert, für den $A_1 A_2 A_3 A_4^* \barwedge W$, so besteht der Kegelschnitt aus den beiden Geraden $A_4 A_4^*$ und $a_0 = A_1 A_2 A_3$; für die Punkte der ersteren ist die Projektivität unmittelbar ersichtlich; für die der letzteren wird sie nur durch Ausartung erfüllt; singuläre Elemente sind im Büschel eines Punktes A auf a_0 dieser Strahl, im Wurfe W das vierte Element.

Und wenn wiederum A_1, A_2, A_3, a_4 gegeben sind und A_1, A_2, A_3 in gerader Linie liegen, so gibt es, je nachdem a_4 nicht durch A_4^* geht oder dies tut, keinen der Projektivität genügenden Punkt auf a_4, oder alle Punkte von a_4 genügen.

Wenn im Raume A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 und a gegeben sind, so gibt es einen Kegel 2. Grades durch $A_5(A_1, A_2, A_3, A_4)$, dessen Kanten mit diesen vier Kanten das Doppelverhältnis $a(A_1, A_2, A_3, A_4)$

umfassen, ebenso einen durch $A_4(A_1, A_2, A_3, A_5)$, wo es $a(A_1, A_2, A_3, A_5)$ ist. Der Schnitt beider, außer A_4A_5, ist die kubische Raumkurve durch $A_1, \ldots A_5$, welche a zur Doppelsekante hat (Nr. 206).

225 Es seien nun zwei vierpunktige Gruppen:

$$G^4 \qquad \begin{matrix} A_1A_2A_3A_4 \\ B_1B_2B_3B_4 \end{matrix}$$

in A und B gegeben; mit G^4 bezeichnen wir die beiden Gruppen zusammen, mit $G^4(A)$, $G^4(B)$ die beiden einzelnen. Jeder Punkt B etwa in B scheidet aus dem Kegelschnitt-Büschel $G^4(B)$ einen Kegelschnitt $\mathfrak{B}^2$, dessen Tangente in B_4 b_4 sei; man konstruiert dann a_4 durch A_4, so daß:

$$A_4(A_1, A_2, A_3, a_4) \barwedge B_4(B_1, B_2, B_3, b_4);$$

und a_4 als Tangente in A_4 bestimmt einen Kegelschnitt $\mathfrak{A}^2$ im Büschel $G^4(A)$, den wir den analogen zu jenem nennen wollen; seine Punkte korrespondieren dem B und allen Punkten von $\mathfrak{B}^2$ in bezug auf G^4; denn ist A irgend ein Punkt von $\mathfrak{A}^2$, B irgend ein Punkt von $\mathfrak{B}^2$, so ist:

$$A(A_1, A_2, A_3, A_4) \barwedge A_4(A_1, A_2, A_3, a_4) \barwedge B_4(B_1, B_2, B_3, b_4)$$
$$\barwedge B(B_1, B_2, B_3, B_4).$$

Die Tangenten a_4 und b_4 in den Büscheln A_4, B_4 bewegen sich projektiv; folglich sind auch die Kegelschnitt-Büschel projektiv mit analogen Kegelschnitten als entsprechenden.

Gleichnamige Geradenpaare sind auch analog, z. B. (A_1A_2, A_3A_4) und (B_1B_2, B_3B_4); liegt A auf A_1A_2, B auf B_1B_2, so handelt es sich nur um drei Paare entsprechender Strahlen, welche ja erst die Projektivität festlegen; liegt aber A auf A_1A_2, B auf B_3B_4, so besteht ausgeartete Projektivität: singuläre Strahlen sind AA_1A_2 und BB_3B_4.

Oder auch, zu jedem Paare analoger Kegelschnitte gehört ein gewisses Doppelverhältnis, bei den drei Paaren analoger Geradenpaare ist dies 1, 0, ∞.

Sind die beiden Ebenen A und B identisch, so entsteht durch die Schnittpunkte analoger Kegelschnitte eine Kurve 4. Ordnung (Nr. 169) als Ort der Punkte C, welche nach $G^4(A)$ und $G^4(B)$ projektive Würfe senden. Sie geht durch die acht Punkte G^4, als Grundpunkte der erzeugenden Kegelschnitt-Büschel, und durch die $3 \cdot 4$ Schnittpunkte analoger Geradenpaare.

Haben die beiden Gruppen einen Punkt gemeinsam, so wird dieser, als gemeinsamer Grundpunkt, Doppelpunkt der Kurve 4. Ordnung (Nr. 171).

Nehmen wir aber an, daß es zwei solche sich deckende Punkte gebe, und zwar folgender Art:

$$A_4 \equiv B_3, \qquad B_4 \equiv A_3;$$

so daß im Grunde nur drei Paare zugeordneter Punkte vorliegen:

$$A_1,\ B_1; \qquad A_2,\ B_2; \qquad A_3,\ B_3.$$

A_3, B_3 werden also Doppelpunkte der Kurve 4. Ordnung. Die Verbindungslinie gehört ganz dieser Kurve an; denn alle ihre Punkte sind den beiden analogen Geradenpaaren (A_1A_2, A_3A_4) und (B_1B_2, B_3B_4) oder (A_1A_2, A_3B_3), (B_1B_2, A_3B_3) gemeinsam. Es bleibt eine Kurve 3. Ordnung übrig, welche noch durch A_3, B_3 geht, sowie auch durch die vier andern Punkte. Für einen Punkt C auf der Gerade gilt:

$$C(A_1,\ A_2,\ A_3B_3) \barwedge C(B_1,\ B_2,\ B_3A_3);$$

es handelt sich um drei Strahlenpaare und CA_3B_3 ist Koinzidenzstrahl. Für einen C aber auf der Kurve 3. Ordnung sind CA_3 und CB_3 nicht identisch und diese beiden verschiedenen Strahlen entsprechen sich in:

$$C(A_1,\ A_2,\ A_3,\ B_3) \barwedge C(B_1,\ B_2,\ B_3,\ A_3)$$

involutorisch, und daher tun es auch CA_1 und CB_1, CA_2 und CB_2, oder kurz: jeder Punkt C der Kurve 3. Ordnung projiziert die drei Punktepaare A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 durch drei Strahlenpaare in Involution.

Der Ort derjenigen Punkte, aus denen drei Punktepaare einer Ebene durch drei Strahlenpaare in Involution projiziert werden, ist eine Kurve 3. Ordnung[1]).

Wir wissen schon, daß die sechs Punkte auf ihr liegen; das folgt aber auch daraus, daß für jeden dieser Punkte der eine Strahl unbestimmt wird und entsprechend der Involution konstruiert werden kann. Z. B. bei A_1 haben wir als A_1A_1 denjenigen Strahl zu nehmen, welcher dem A_1B_1 in der Involution $A_1(A_2,\ B_2;\ A_3,\ B_3)$ gepaart ist. Nähert sich der Punkt C auf der Kurve dem A_1, so geht der nach A_1 gehende Strahl in diesen sechsten Strahl in Involution über; und derselbe wird die Tangente der Kurve in A_1; so daß in den sechs Punkten leicht die Tangenten konstruiert werden können.

Aber auch Punkte, wie $(A_1A_2,\ B_1B_2)$ oder $(A_1B_2,\ B_1A_2)$ gehören zur Kurve; bei ihnen handelt es sich nur um zwei Strahlenpaare, die ja die Involution erst bestimmen. Der erstere ist Schnittpunkt analoger Geradenpaare; aber auch den zweiten kann man so auffassen, da jetzt z. B. A_2, B_2 gleichartig auftreten und auch A_2 zur zweiten, B_2 zur ersten Gruppe gerechnet werden kann.

Läßt man zwei gepaarte Punkte, wie A_1 und B_1, sich vereinigen, so wird dieser Punkt Doppelpunkt der Kurve 3. Ordnung und der

1) Cayley, Liouvilles Journal, Bd. 9_1, S. 285; Math. Papers, Bd. 1, S. 184.

Strahl nach ihm in dem Büschel um einen Punkt der Kurve der eine Doppelstrahl der Involution; nähert man sich dem Punkte A_1 auf dem einen oder andern Aste, so ergeben sich die beiden Doppelstrahlen von $A_1(A_2, B_2; A_3, B_3)$ als die Tangenten des Doppelpunktes.

226 Es seien zwei fünfpunktige Gruppen gegeben:

$$G^5 \qquad \begin{matrix} A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 \\ B_1 B_2 B_3 B_4 B_5. \end{matrix}$$

Wir bezeichnen die vierpunktigen Gruppen, die durch Weglassung von A_i, B_i sich ergeben, mit $G^4_{(i)}$.

Jetzt korrespondiert jedem Punkt B der einen Ebene ein Punkt A in der andern. Jener bestimmt je einen Kegelschnitt $\mathfrak{B}^2$, $\mathfrak{B}'^2$ in den Büscheln $G^4_{(5)}(B)$ und $G^4_{(4)}(B)$, denen dann die Kegelschnitte $\mathfrak{A}^2$, $\mathfrak{A}'^2$ aus $G^4_{(5)}(A)$ und $G^4_{(4)}(A)$ analog sind. Der vierte Schnitt A derselben außer A_1, A_2, A_3 ist der korrespondierende. Denn es bestehen die Projektivitäten:

$$A(A_1, A_2, A_3, A_4) \barwedge B(B_1, B_2, B_3, B_4),$$
$$A(A_1, A_2, A_3, A_5) \barwedge B(B_1, B_2, B_3, B_5);$$

sie stimmen in drei Paaren entsprechender Strahlen überein und sind deshalb identisch; daher gilt:

$$A(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5) \barwedge B(B_1, B_2, B_3, B_4, B_5).$$

Bei A_1 z. B. gilt dieser Schluß nicht, weil die Tangenten in A_1 an $\mathfrak{A}^2, \mathfrak{A}'^2$, welche in den beiden Fällen als Strahlen $A_1 A_1$ gelten, verschieden sind.

Dieser Punkt A ist als vierter Schnittpunkt zweier durch Punkte hinreichend bestimmter Kegelschnitte, neben drei bekannten, linear konstruierbar[1]). Einfacher erhält man ihn so: In dem Büschel A_4, wo a_4 so konstruiert ist, daß $A_4(A_1, A_2, A_3, a_4) \barwedge B(B_1, B_2, B_3, B_4)$, also die Tangente von $\mathfrak{A}^2$ ist, die diesen Kegelschnitt vollständig bestimmt, konstruiere man den Strahl, welcher in dieser Projektivität dem BB_5 entspricht, schneide ihn (Nr. 126) zum zweiten Male mit $\mathfrak{A}^2$ in A_5', wodurch die krumme Punktreihe $A_1 A_2 A_3 A_4 A'_5$ auf $\mathfrak{A}^2$ zum Büschel $B(B_1, \ldots B_5)$ projektiv wird; darauf schneide man $A_5 A_5'$ zum zweiten Male mit $\mathfrak{A}^2$ in A; das ist der gesuchte Punkt.

Die Ermittelung des Punktes A, der einem gegebenen B in bezug auf G^5 korrespondiert, ist das erste wichtige Ziel in unserm Problem.

---

1) Schröter, Journ. f. Math., Bd. 62, S. 45. § 4, Zeitschr. f. Math., Jahrg. 35, S. 59; Steiner-Schröters Vorlesungen, 3. Aufl., Anhang Aufg. 13; Cremona, Einleitung in eine geometrische Theorie der ebenen Kurven, Nr. 62, 64.

Wenn im Raume A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 und b gegeben sind, so gibt es in dem Bündel O einen Strahl c, so beschaffen, daß

$$c(A_1, \dots A_5) \barwedge b(A_1, \dots A_5);$$

er ist die Doppelsekante aus O an die einzige kubische Raumkurve, welche durch $A_1, \dots A_5$ geht und b zweimal trifft (Nr. 206).

Dies Ergebnis möge für einige interessante Sätze und Aufgaben 227
verwertet werden.

Wenn für eine ebene Kurve 3. Ordnung 9 Punkte gegeben sind, so sei durch 4 von ihnen ein Büschel B von Kegelschnitten gelegt. Wir nehmen aus ihm diejenigen 5, welche durch die 5 übrigen Punkte $P_1, \dots P_5$ bzw. gehen, und konstruieren den Punkt G, für welchen $G(P_1, P_2, P_3, P_4, P_5)$ projektiv ist zu dem Büschel der Tangenten an jene 5 Kegelschnitte in einem der Grundpunkte von B und daher auch zu dem Büschel der 5 Kegelschnitte selbst. In G hat man den Scheitel des Strahlenbüschels, der in projektiver Beziehung zu dem Kegelschnitt-Büschel B die Kurve 3. Ordnung durch die 9 Punkte erzeugt (Nr. 169). Dieser Punkt G wird auf der Kurve der Gegenpunkt zu den 4 Punkten genannt, die als Grundpunkte von B genommen sind[1]).

Es seien bloß 8 Punkte gegeben; wir lassen P_5 fallen; dann durchläuft G, nach dem Vorangehenden, einen Kegelschnitt K, der durch die vier Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 geht; und jeder Punkt G desselben führt zu einer Kurve 3. Ordnung durch die 8 Punkte. Es sei H der sechste Schnitt einer dieser Kurven mit K, außer $P_1, \dots P_4$ und dem G, so schneiden sich in ihm ein Kegelschnitt von B und der entsprechende Strahl von G; wird aber G auf K bewegt, so bleibt $G(P_1, \dots P_4, H)$ zu sich projektiv, d. h. jener Kegelschnitt trifft sich in H mit dem entsprechenden Strahle aus jedem der Büschel G; folglich liegt H auf allen Kurven 3. Ordnung, welche durch die 8 Punkte gehen, und ist der sogenannte assoziierte neunte Punkt zu den achten, der durch sie eindeutig bestimmt ist und mit ihnen die volle Gruppe der Grundpunkte eines Kurvenbüschels 3. Ordnung bildet.

Die Gegenpunkte zu vier von den neun Grundpunkten eines Büschels 3. Ordnung auf den verschiedenen Kurven desselben erfüllen den Kegelschnitt durch die fünf übrigen.

Nimmt man aus den 8 gegebenen Grundpunkten zwei Gruppen von 4 Punkten mit drei gemeinsamen Punkten, konstruiert jedesmal den Kegelschnitt der Gegenpunkte, so gehen diese beiden Kegelschnitte bzw. durch die beiden Gruppen der weiteren Punkte, die auch drei Punkte gemeinsam haben, und für jeden gewinnt man einen fünften

1) Cremona, a. a. O., Nr. 66.

Punkt, indem man für irgend eine Kurve des Büschels, die durch einen beliebigen neunten Punkt bestimmt ist, den einen und den andern Gegenpunkt konstruiert, was ja linear geschehen kann. Darauf hat man für diese beiden Kegelschnitte den vierten gemeinsamen Punkt herzustellen, und man hat so — linear, wie es ja notwendig ist — den neunten assoziierten Punkt konstruiert.

Zerteilen wir aber die 8 Punkte in zwei sich ergänzende Gruppen:

$$P_1, P_2, P_3, P_4; \quad P_5, P_6, P_7, P_8;$$

so seien K und K' die Örter der Gegenpunkte G, G'; K geht durch P_5, P_6, P_7, P_8, P_9, K' durch P_1, P_2, P_3, P_4, P_9, wo P_9 der noch unbekannte neunte assoziierte Punkt ist. Außer ihm haben K und K' noch die drei Punkte R, S, T gemein. Auf diesen Kegelschnitten bewegen sich G und G' projektiv. Denn G bestimmt eindeutig die Kurve C^3 des Büschels, für welche er Gegenpunkt von $P_1, \dots P_4$ ist, diese eindeutig den Gegenpunkt G' zu $P_5, \dots P_8$ auf ihr. Kommt G nach R, so ist für die zugehörige Kurve C^3 dieser Punkt der sechste Schnitt mit K, außer den fünf Grundpunkten auf K; als Punkt von K' ist er dann auch sechster Schnitt dieses Kegelschnitts mit der nämlichen C^3, also der G entsprechende G'. In den drei gemeinsamen Punkten R, S, T vereinigen sich daher entsprechende Punkte der projektiven Punktreihen der G und G' auf K und K'.

Daher dreht sich (Nr. 166) die Verbindungslinie entsprechender Punkte G, G' um den vierten Schnittpunkt P_9, und wir erhalten folgende lineare Konstruktion des neunten assoziierten Punktes P_9 zu acht gegebenen $P_1, \dots P_8$.

Man konstruiere für irgend eine Kurve C^3 des Büschels $(P_1, \dots P_8)$, die etwa durch P vollständig bestimmt sei, die Gegenpunkte G, G' zu den komplementären Gruppen P_1, P_2, P_3, P_4; P_5, P_6, P_7, P_8, und für eine dieser Gruppen, etwa die erste, den Ort der Gegenpunkte, also den Kegelschnitt $(P_5 P_6 P_7 P_8 G)$; der zweite Schnitt desselben mit GG' ist P_9.

Man kann ein zweites Paar G_1, G_1' konstruieren für eine zweite Kurve des Büschels oder für eine andere derartige Zerteilung; es ist dann $(GG', G_1 G_1') = P_9$.

Der Gegenpunkt G, auf einer Kurve 3. Ordnung C^3, zu vier Punkten derselben A, B, C, D ist der Konvergenzpunkt aller der Sehnen, welche die weiteren Schnitte E, F der durch A, B, C, D gehenden Kegelschnitte verbinden. Sei zunächst eine solche Sehne EF, vom Kegelschnitte C^2 herrührend, gezogen und G ihr dritter Schnitt; liefert dann ein zweiter Kegelschnitt C_1^2 des Büschels die Sehne E_1F_1, so sind die 9 Punkte $A, B, C, D, E, F, E_1, F_1, G$ die Schnitte der beiden Kurven 3. Ordnung C^3 und (C_1^2, EFG), also neun assoziierte Punkte; daher geht (C^2, E_1F_1), welche durch die 8

ersten geht, auch durch den neunten G; d. h. E_1F_1 geht durch G und ebenso jede weitere derartige Sehne.

Ingleichen führen vier Punkte A, B, C, G auf C^3 zu einem Punkte D der Kurve, so daß G der Gegenpunkt zu A, B, C, D ist, oder daß, wenn E, F die weiteren Schnitte eines Strahls durch G sind, alle Kegelschnitte $ABCEF$ die C^3 in demselben vierten Punkte D treffen. Wenn E, F; E_1, F_1 zu zwei Strahlen durch G gehören und C^2, C_1^2 die Kegelschnitte $ABC(EF, E_1F_1)$ sind, so sei D der sechste Schnitt des ersten; dann sind die 9 Punkte $A, \ldots G$ assoziiert als Schnittpunkte von C^3 und (C^2, GE_1F_1); folglich geht (C_1^2, GEF), die durch 8 von ihnen geht, auch durch den neunten D, d. h. C_1^2 tut es. Oder, wenn D der sechste Schnitt des Kegelschnitts durch A, B, C und ein Paar E, F ist, so ist der dritte Schnitt G von EF schon als Gegenpunkt on A, B, C, D charakterisiert; E_1 und F_1 liegen auf demselben Kegelschnitt durch A, B, C, D, oder der Kegelschnitt $ABCE_1F_1$ geht durch D.

Aus der Fundamentaleigenschaft von 9 assoziierten Punkten folgt, daß, wenn 3 von ihnen in gerader Linie liegen, die 6 übrigen einem Kegelschnitte angehören, denn jene Gerade und der Kegelschnitt durch 5 von den Punkten bilden eine Kurve 3. Ordnung, welche durch 8 von den 9 Punkten geht; und umgekehrt, wenn 6 der 9 assoziierten Punkte auf einem Kegelschnitte liegen, so sind die 3 übrigen in gerader Linie gelegen.

In bezug auf 228

$$G^5 \quad \begin{matrix} A_1A_2A_3A_4A_5 \\ B_1B_2B_3B_4B_5 \end{matrix}$$

sind die korrespondierenden Punkte A und B eindeutig einander zugeordnet, und wir gewinnen so schon ein Beispiel der eindeutigen oder Cremonaschen Verwandtschaften, welche uns später beschäftigen sollen.

Das eindeutige Entsprechen hat Ausnahmen. Zu ihnen gehören zunächst die 10 Punkte von G^5, dem B_1 z. B. entspricht, weil B_1B_1 unbestimmt wird, in bezug auf G^5 der ganze Kegelschnitt A_1^2 durch A_2, A_3, A_4, A_5, welcher dem B_1 in bezug auf $G^4_{(1)}$ korrespondiert, für dessen sämtliche Punkte A also gilt:

$$A(A_2, A_3, A_4, A_5) \barwedge B_1(B_2, B_3, B_4, B_5).$$

Der analoge zu ihm in bezug auf $G^4_{(1)}$ ist der Kegelschnitt

$$(B_2B_3B_4B_5B_1),$$

also durch die $G^5(B)$, den wir B_0^2 nennen wollen. Und allgemein korrespondiert dem B_i der Kegelschnitt, der in bezug auf G_i^4 diesem Kegelschnitt B_0^2 analog ist, und ebenso

dem A_i derjenige, welcher zu $A_0^2 - (A_1 A_2 A_3 A_4 A_5)$ in bezug auf G_i^4 analog ist.

Man kann z. B. den A_1^2 auch dadurch erhalten, daß man sich dem B_1 auf allen Strahlen durch ihn nähert. Man ordnet einander die Kegelschnitte durch $G^4_{(5)}(B)$ und $G^4_{(4)}(B)$ zu, welche denselben Strahl in B_1 tangieren; dadurch werden diese Büschel projektiv und die der analogen Kegelschnitte werden es auch, so daß sich eine Kurve 4. Ordnung ergiebt, auf welcher A_1, A_2, A_3, die gemeinsamen Grundpunkte, doppelt, A_4, A_5 einfach sind, aber es lösen sich $A_1(A_2, A_3)$ ab, so daß ein Kegelschnitt bleibt, der durch A_2, A_3, A_4, A_5 geht.

Man konstruiere ferner den Punkt A_0, der irgend einem Punkte B von B_0^2 in bezug auf G^5 korrespondiert, so ersieht man sofort, daß er jedem Punkt von B_0^2 korrespondiert, weil ja die Büschel aus allen Punkten von B_0^2 nach $G^5(B)$ projektiv sind. Daher korrespondiert dem A_0 der ganze Kegelschnitt B_0^2.

Also ist:

$$A_0(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5) \barwedge B(B_1, B_2, B_3, B_4, B_5)$$

wo B jeder beliebige Punkt von B_0^2 ist.

Da B_1 auch diesem Kegelschnitt angehört, so ist

$$A_0(A_2, A_3, A_4, A_5) \barwedge B_1(B_2, B_3, B_4, B_5);$$

woraus folgt, daß A_0 auf A_1^2 liegt. Und ebenso liegt er auf $A_2^2, \ldots A_5^2$.

In derselben Weise entspricht allen Punkten von A_0^2 ein Punkt B_0, der auf allen B_i^2 liegt.

Die lineare Konstruktion von A_0 ist nach Nr. 226 die folgende:

Man konstruiere an $B_0^2 = (B_1 \ldots B_5)$ in B_4 die Tangente b_4, darauf durch A_4 die Strahlen a_4, a_5', für welche:

$$A_4(A_1, A_2, A_3, a_4, a_5') \barwedge B_4(B_1, B_2, B_3, b_4, B_5),$$

schneide a_5' zum zweiten Male mit dem Kegelschnitte, der durch A_1, A_2, A_3, A_4 geht und in A_4 die a_4 berührt, in A_5' und nun denselben Kegelschnitt zum zweiten Male mit $A_5 A_5'$ in A_0. Dieser Kegelschnitt ist der zu B_0^2 in bezug auf $G^4_{(5)}$ analoge, also A_5^2.

Auf diesen analogen Kegelschnitten A_5^2 und B_0^2 sind die Punktreihen $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5'$ und $B_1 B_2 B_3 B_4 B_5$ projektiv; wir können ebenso auf $A_1^2, \ldots A_4^2$ die Punkte $A_1', \ldots A_4'$ entsprechend konstruieren; die Verbindungslinien $A_1 A_1', \ldots A_5 A_5'$ laufen in A_0 zusammen.

Wir nennen die so beschaffenen 12 Punkte

$$A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_0$$
$$B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_0$$

die Hauptpunkte der eindeutigen Verwandschaft und die ihnen

korrespondierenden Kegelschnitte die Hauptkurven. Jede Hauptkurve geht durch 5 Hauptpunkte ihrer Ebene, diejenigen, welche den Zeiger, den sie und der korrespondierende Hauptpunkt hat, nicht tragen.

Das sechste Paar A_0, B_0 von Hauptpunkten hängt von den fünf gegebenen ab, und wird, weil es aus ihnen linear konstruiert werden kann, das linear abhängige Paar genannt; man nennt auch alle sechs Punktepaare sechs linear abhängige[1]). Es wird sich noch herausstellen, daß jedes von ihnen das sechste sein kann, wie das ja schon aus der Gleichartigkeit des Verhaltens der Hauptpunkte zu den Hauptkurven in jeder Ebene zu vermuten ist.

Am einfachsten werden A_0, B_0 vielleicht durch Projektivitäten folgender Art definiert:

$$A_5(A_1, A_2, A_3, A_4) \barwedge B_0(B_1, B_2, B_3, B_4),$$
$$A_4(A_1, A_2, A_3, A_5) \barwedge B_0(B_1, B_2, B_3, B_5);$$
$$A_0(A_1, A_2, A_3, A_4) \barwedge B_5(B_1, B_2, B_3, B_4),$$
$$A_0(A_1, A_2, A_3, A_5) \barwedge B_4(B_1, B_2, B_3, B_5).$$

Erwähnen wir zwei spezielle Fälle.

Bilden $A_1, \ldots A_5$; $B_1, \ldots B_5$ projektive Punktreihen auf A_0^2, B_0^2, so fallen alle fünf Kegelschnitte A_i^2 in A_0^2, alle fünf B_i^2 in B_0^2 zusamen, und A_0, B_0 sind zwei beliebige Punkte auf diesen Kurven.

Aber andererseits sind ersichtlich auch jede zwei Punkte von A_0^2 und B_0^2 korrespondierende Punkte A, B.

Ferner, wenn zwei vollständige Vierseite $a_1a_2a_3a_4$, $b_1b_2b_3b_4$ vorliegen und die Punkte $A_1, \ldots A_5$; $B_1, \ldots B_5$ in die Ecken

$$a_2a_3,\ a_3a_1,\ a_1a_2,\ a_1a_4,\ a_2a_4;\quad b_1b_4,\ b_2b_4,\ b_3b_4,\ b_2b_3,\ b_3b_1$$

gelegt sind, so sind die sechsten Ecken a_3a_4, b_1b_2 die Punkte A_0, B_0; es genügt der Beweis für b_1b_2. Der Kegelschnitt A_0^2 ist das Geradenpaar a_1a_2 und ist A irgend ein Punkt auf a_1 oder a_2, so besteht die ausgeartete Projektivität:

$$A(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5) \barwedge b_1b_2(B_1, B_2, B_3, B_4, B_5)$$

mit a_1 und b_1 oder a_2 und b_2 als singulären Strahlen.

Sehen wir nun zu, von welchem Grade diese eindeutige Verwandt- 229
schaft der in bezug auf G^5 korrespondierenden Punkte A und B ist. Wenn B sich auf einer Gerade b bewegt, so kommen die Kegelschnitte $\mathfrak{B}^2$ und $\mathfrak{B}'^2$ der Büschel $G^4_{(5)}(B)$ und $G^4_{(4)}(B)$, die je durch B gehen, in eine Korrespondenz [2,2]; denn jeder $\mathfrak{B}^2$ schneidet b in zwei Punkten, durch welche die entsprechenden $\mathfrak{B}'^2$ gehen. Wegen der Projektivität der analogen Kegelschnitte $\mathfrak{A}^2$ und $\mathfrak{B}^2$, $\mathfrak{A}'^2$ und $\mathfrak{B}'^2$ über-

1) Rosanes, Journal f. Math., Bd. 88, S. 241 und Bd. 90, S. 303.

trägt sich diese Korrespondenz in eine gleichartige zwischen $\mathfrak{A}^2$ und $\mathfrak{A}'^2$, und durch diese entsteht, weil die entsprechenden Kegelschnitte auf einer Gerade eine Korrespondenz [4, 4] hervorrufen, eine Kurve 8. Ordnung, zu der jedoch die 3 Geraden A_1A_2, A_1A_3, A_2A_3 gehören; denn z. B. der Punkt (b, B_1B_2) führt zu den Geradenpaaren (B_1B_2, B_3B_4) und (B_1B_2, B_3B_5) und den analogen (A_1A_2, A_3A_4), (A_1A_2, A_3A_5); also gehört A_1A_2 zum Erzeugnis der $\mathfrak{A}^2$ und $\mathfrak{A}'^2$; obwohl nun für A auf A_1A_2, B auf B_1B_2 gilt:

$$A(A_1, A_2, A_3, A_4) \barwedge B(B_1, B_2, B_3, B_4),$$
$$A(A_1, A_2, A_3, A_5) \barwedge B(B_1, B_2, B_3, B_5),$$

so kann doch, weil $AA_1 \equiv AA_2$, $BB_1 \equiv BB_2$, nicht auf:

$$A(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5) \barwedge B(B_1, B_2, B_3, B_4, B_5)$$

geschlossen werden; wohl aber ist das der Fall für die Punkte A der restierenden Kurve 5. Ordnung und die korrespondierenden B auf b. Also:

Einer Gerade der einen Ebene, etwa b in B, korrespondiert eine Kurve 5. Ordnung a^5 in der andern A.

Demnach ist die Verwandtschaft 5. Grades.

Da die Gerade die 6 Hauptkurven in B je zweimal schneidet, geht a^5 durch jeden der 6 Hauptpunkte $A_1, \ldots A_5, A_6$ zweimal und erhält durch diese 6 Doppelpunkte das Geschlecht 0, wie dies wegen des eindeutigen Entsprechens der Punkte von b und a^5 notwendig ist (Nr. 163).

Geht b durch einen Hauptpunkt, etwa B_1, so bleibt, nach Ablösung der diesem entsprechenden Hauptkurve, eine Kurve 3. Ordnung übrig, welche nur noch durch A_1 doppelt geht, durch die übrigen Hauptpunkte, welche auf jener Hauptkurve liegen, nur noch einmal; der eine Doppelpunkt giebt ihr das Geschlecht 0.

Geht b durch zwei Hauptpunkte, A_1, A_2, so korrespondiert ihr eine Gerade, die B_1B_2.

Einer Kurve n^{ter} Ordnung in B korrespondiert in A eine Kurve $5n^{\text{ter}}$ Ordnung, weil die Kurve 5. Ordnung, die einer Gerade in A entspricht, der Kurve n^{ter} Ordnung $5n$-mal begegnet. Die Kurve 5ter Ordnung in B, die einer Gerade a von A korrespondiert, muß demnach eine korrespondierende Kurve 25. Ordnung haben, welche aus der Gerade a und sechs doppelt zu rechnenden Kegelschnitten besteht; und einem Hauptkegelschnitt entspricht eine Kurve 10. Ordnung, welche aus den fünf Hauptkurven besteht, die den auf ihm gelegenen Hauptpunkten korrespondieren.

Insbesondere wichtig ist, daß einer Kurve 3. Ordnung β^3 der einen Ebene, welche durch die 6 Hauptpunkte derselben

geht, in der andern eine ebenso beschaffene Kurve 3. Ordnung α^3 entspricht[1]).

Betrachten wir wiederum einige spezielle Fälle. Wenn A_4, A_5; 230
B_4, B_5 die absoluten Punkte der beiden Ebenen sind, so sind solche Punkte A und B korrespondierend, für welche die Winkel $A(A_1, A_2)$, $A(A_2, A_3)$ den Winkeln $B(B_1, B_2)$, $B(B_2, B_3)$ gleich sind (Pothenotsche Aufgabe in der Geodäsie). Es sei in jede der beiden Ebenen ein positiver Drehsinn gelegt; dann erhält jeder der absoluten Punkte, vermittelst der darstellenden absoluten Involution, einen Sinn (Nr. 78); es mögen dann A_4 und B_4, A_5 und B_5 denselben Sinn haben, also haben auch die gleichen Büschel A und B gleichen Sinn, insbesondere die obigen Winkel; die Kreise durch A_1, A_2; A_2, A_3, als deren zweiter Schnitt A sich ergibt, und aus deren Punkten A_1A_2, A_2A_3 unter den Winkeln B_1BB_2, B_2BB_3 gesehen werden, müssen so gelegt werden, daß auch der Sinn stimmt. Ist dann A zu B bestimmt, so kann man die gleichen Büschel A und B mit den entsprechenden Strahlen in zwei Weisen (von denen die eine durch die Drehung um 180^0 aus der anderen hervorgeht) aufeinander legen; die Dreiecke $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$ sind dadurch in perspektive Lage gebracht. Ändert man in der einen Ebene den Sinn, ordnet also die absoluten Punkte in anderer Weise einander zu, so ergeben sich zwei weitere Weisen, die Dreiecke in perspektive Lage zu bringen.

Bei jeder der beiden Festsetzungen über den Sinn oder Zuordnungen der absoluten Punkte erhält man den A_0 durch die Bestimmung, daß er so liegen muß, daß die Winkel $A_0(A_2, A_3)$ und $A_0(A_1, A_2)$ mit den Winkeln $B_1(B_2, B_3)$ und $B_2(B_1, B_3)$ in Größe und Sinn übereinstimmen; und ähnlich ist B_0 bestimmt.[2])

In dem oben erwähnten Spezialfalle, daß $A_1, \ldots, A_5$ und $B_1, \ldots, B_5$ auf A_0^2 und B_0^2 projektive Punktreihen bilden, entspricht den beiden Schnittpunkten von b mit B_0^2 der ganze Kegelschnitt A_0^2 und sondert sich also doppelt von der Kurve 5. Ordnung ab. Einer Gerade entspricht eine Gerade. Es liegt eine eindeutige Verwandtschaft 1. Grades vor, eine Kollineation, wie eine solche später genannt werden wird.

Wenn die beiden Felder A und B wieder ineinander liegen, so führen die Gruppenpaare $G^4_{(5)}$ und $G^4_{(4)}$ je zu einer Kurve 4. Ordnung (Nr. 225). Gemeinsam sind diesen beiden Kurven die sechs Punkte von $G^3_{(4,5)}$, und die drei Punkte

$$(A_1A_2, B_1B_2), \quad (A_1A_3, B_1B_3), \quad (A_2A_3, B_2B_3);$$

es bleiben sieben gemeinsame Punkte.

---

1) Diese Kurven 3. Ordnung sind eindeutig aufeinander bezogen und beide vom Geschlechte 1.

2) Cayley, Proceed. London Math. Soc., Bd. 4, S. 396; Mathem. Papers Bd. 8, S. 200.

Es gibt daher sieben Punkte in der Ebene, welche gleichzeitig nach beiden Gruppen von G^6 projektive Büschel senden. Oder unsere Cremonasche Verwandtschaft 5. Grades hat sieben sich selbst entsprechende Punkte.

Wenn dann weiter B_5 mit A_4 und zugleich A_5 mit B_4 identisch ist, so gehört jeder dieser beiden Punkte zu den sieben Koinzidenzpunkten; der erstere z. B., weil bei ihm A_4A_4 und B_5B_5 unbestimmt sind und der projektiven Beziehung entsprechend gewählt werden können. Ferner rufen die projektiven Büschel der analogen Kegelschnitte durch $G^4_{(5)}(A)$ und $G^4_{(5)}(B)$ auf der Gerade A_4B_4 zwei konjektive Punktreihen hervor durch die veränderlichen zweiten Schnitte; für jede der beiden Koinzidenzen $\mathfrak{C}$ ist:

$$\mathfrak{C}(A_1, \ldots, A_4, A_5) \barwedge \mathfrak{C}(B_1, \ldots, B_4, B_5),$$

weil $\mathfrak{C}A_5$ und $\mathfrak{C}B_5$ mit $\mathfrak{C}A_4$ und $\mathfrak{C}B_4$ identisch sind. Für die drei übrig bleibenden Koinzidenzen C wird wiederum, weil die verschiedenen Strahlen CA_4B_5 und CB_4A_5 sich in beiderlei Sinn entsprechen, die Projektivität Involution.

Wenn in einer Ebene vier Punktepaare $A_1B_1, \ldots, A_4B_4$ vorliegen, so gibt es drei Punkte, aus denen sie durch Strahlenpaare in Involution projiziert werden.

Den beiden Kurven 3. Ordnung, welche zu A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 und A_1B_1, A_2B_2, A_4B_4 gehören (Nr. 225), sind sie gemeinsam außer den Punkten A_1, B_1, A_2, B_2, (A_1A_2, B_1B_2), (A_1B_2, B_1A_2).

Die drei Punkte sind ersichtlich die Doppelpunkte der Geradenpaare des Kegelschnitt-Büschels, in bezug auf welchen A_1 und $B_1, \ldots$ A_4 und B_4 konjugiert sind.

Sind A_4, B_4 die absoluten Punkte, so wird die Involution gleichseitig hyperbolisch.

Es gibt also drei Punkte, aus denen drei Punktepaare einer Ebene durch Strahlenpaare einer gleichseitig-hyperbolischen Involution projiziert werden.

Nehmen wir weiter an, daß B_1, B_2, B_3 mit A_1, A_2, A_3 identisch sind, so daß die Gruppen:

$$A_1A_2A_3A_4A_5$$
$$A_1A_2A_3A_5A_4$$

vorliegen; dann entsprechen sich A und B involutorisch; denn eine Vertauschung von A und B in:

$$A(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5) \barwedge B(A_1, A_2, A_3, A_5, A_4)$$

ändert nichts; jeder Punkt von A_4A_5 ist jetzt Koinzidenzpunkt; die sechsten Hauptpunkte A_0, B_0 decken sich auch in dem einzigen Punkte, der nach A_1, A_2, A_3, A_5, A_4 einen Strahlenbüschel

sendet, welcher zu denen projektiv ist, durch welche A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 aus den Punkten ihres Kegelschnitts A_0^2 projiziert werden.

In den Involutionsbüscheln um die außerhalb der Koinzidenzgerade A_4A_5 gelegenen drei Koinzidenzpunkte C gehen gepaarte Strahlen nach A_4, A_5, sich selbst entsprechende nach A_1, A_2, A_3, A_0; also sind diese drei Punkte die Diagonalpunkte des Vierecks $A_1A_2A_3A_0$, und $A_0(A_1, A_2, A_3)$ werden von A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 durch A_4, A_5 harmonisch getrennt, oder A_4, A_5 sind die Doppelpunkte der Involution, die durch die Gegenseiten des Vierecks eingeschnitten wird; was zur Konstruktion von A_0 dient.

Sind A_4, A_5 die absoluten Punkte, so ist A_0 der Höhenpunkt von $A_1A_2A_3$. Der Büschel, der aus ihm die Ecken projiziert, ist gleich und ungleichsinnig mit denen, durch welche sie aus den Punkten des umgeschriebenen Kreises projiziert werden.

Wird aber vorausgesetzt, daß B_1 mit A_1 sich deckt, hingegen B_2, B_3, B_4, B_5 mit A_3, A_2, A_5, A_4, so daß die Gruppen sind:

$$A_1A_2A_3A_4A_5$$
$$A_1A_3A_2A_5A_4;$$

dann ist auch die Beziehung involutorisch. Hier besteht aber eine Koinzidenzkurve 3. Ordnung, diejenige, aus deren Punkten A_1A_1, A_2A_3, A_4A_5 durch Strahlenpaare in Involution projiziert werden; auf ihr ist A_1 Doppelpunkt.

Der Punkt (A_2A_3, A_4A_5) ist ein außerhalb dieser Koinzidenzkurve gelegener Koinzidenzpunkt.

Es seien die beiden Kegelschnitte durch A_1, A_3, A_2, A_4, bzw. A_1, A_3, A_2, A_5 konstruiert, die zu A_0^2 analog sind; ist dann a die Tangente an A_0^2 in A_1, so vereinigen diejenigen an jene sich in den Strahl a', welcher ihr in der Involution $A_1(A_2, A_3; A_4, A_5)$ gepaart ist. Der sechste Hauptpunkt A_0 liegt daher, als vierter Schnitt der beiden Kegelschnitte, unendlich nahe neben A_1 auf a'.

Es sei $\mathfrak{A}$ der zweite Schnitt von a' mit A_0^2, so ist:

$$\mathfrak{A}(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5) \barwedge A_0(A_1, A_3, A_2, A_5, A_4),$$

diese perspektiven Büschel werden von A_2A_3, A_4A_5 involutorisch geschnitten; also liegt ihr Schnittpunkt, das involutorische Zentrum, auf dem gemeinsamen Strahle $a' = A_0\mathfrak{A}A_1$, oder a' geht durch (A_2A_3, A_4A_5).

Wenn aber die Punkte $A_1, \ldots, A_5$ auf A_0^2 so liegen, daß A_1A_1, A_2A_3, A_4A_5 in Involution sind, dann ist a Doppelstrahl der Involution $A_1(A_2, A_3; A_4, A_5)$, vereinigt sich mit a' und geht durch (A_2A_3, A_4A_5). Jetzt werden A_1A_1, A_2A_3, A_4A_5 aus jedem Punkte des A_0^2 involutorisch projiziert, also gehört dieser Kegelschnitt zur Koinzidenzkurve 3. Ordnung. Der andere Bestandteil, der noch durch

den Doppelpunkt A_1 gehen muß, ist die Axe der Involution auf A_0^2; denn aus jedem Punkte derselben wird ja die krumme Involution durch eine Strahleninvolution (immer zwei Paare durch dasselbe Paar) projiziert (Nr. 113).

Sind A, B zwei beliebige Punkte von A_0^2, so ist:

$$A(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5) \barwedge B(A_1, \ldots, A_5) \barwedge B(A_1, A_3, A_2, A_5, A_4);$$

also sind im vorliegenden Falle in der eindeutigen Verwandtschaft beliebige zwei Punkte von $A_0^2 \equiv B_0^2$ korrespondierend; daher ergibt sich wie oben eine Kollineation.

Zu jedem Punkte A liegt der korrespondierende B auf der Gerade nach dem Koinzidenzpunkte $(A_2 A_3, A_4 A_5)$, harmonisch getrennt durch diesen Punkt und die Koinzidenzgerade; denn bei dieser Lage werden die Büschel $A(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5)$ und $B(A_1, A_3, A_2, A_5, A_4)$ dadurch projektiv, daß sie perspektiv sind mit dieser Gerade als Axe. Unsere Verwandtschaft ist diejenige, welche wir später involutorische Homologie nennen werden.

231 Wir kehren zum allgemeinen Falle zurück und steigen zu sechspunktigen Gruppen auf:

$$G^6 \qquad \begin{matrix} A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6 \\ B_1 B_2 B_3 B_4 B_5 B_6 . \end{matrix}$$

Ein beliebiger Punkt hat im allgemeinen keinen korrespondierenden. Es wird ∞^1 Paare korrespondierender Punkte geben, welche zwei Kurven in A und B erfüllen. Die Punkte von G^6 gehören ersichtlich je zu der betreffenden Kurve, denn z. B. dem B_1 korrespondiert auch in bezug auf G^6 der nämliche Punkt A, der ihm in bezug auf $G^5_{(1)}$ korrespondiert. Daraus erhellt auch, daß diese Punkte den Kurven einfach angehören.

Wir bilden die beiden Gruppenpaare $G^5_{(6)}$ und $G^4_{(4,5)}$. Einer Gerade b in B korrespondiert in bezug auf $G^5_{(6)}$ eine Kurve 5. Ordnung a^5, einem Punkte B' von b also ein Punkt A von a^5 und diesem in bezug auf $G^4_{(4,5)}$ ein Kegelschnitt durch B_1, B_2, B_3, B_6, welcher b in zwei Punkten B'' schneidet. Einem B'' von b korrespondiert in bezug auf $G^4_{(4,5)}$ ein Kegelschnitt durch A_1, A_2, A_3, A_6, welcher mit a^5, außer A_1, A_2, A_3, noch vier Punkte A gemein hat, deren (in bezug auf $G^5_{(6)}$) korrespondierende auf b die dem B'' zugeordneten B' sind.

Die so entstandene Korrespondenz [4, 2] auf b hat 6 Koinzidenzen; zu ihnen gehören die Schnitte mit B_1B_2, B_1B_3, B_2B_3. Der korrespondierende zu (b, B_1B_2) in bezug auf $G^5_{(6)}$ liegt auf A_1A_2 (Nr. 229), also in deren letztem Schnitte mit a^5, und diesem Punkte von A_1A_2 korrrespondiert in bezug auf $G^4_{(4,5)}$ der Punkt (b, B_1B_2).

Ist B eine der drei übrigen Koinzidenzen und A der auf a^5 kor-

respondierende Punkt, der, wegen der Koinzidenz, demselben B auch in bezug auf $G^4_{(4,5)}$ korrespondiert, so ist sowohl:

$$A(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5) \barwedge B(B_1, B_2, B_3, B_4, B_5),$$

als auch:

$$A(A_1, A_2, A_3, A_6) \barwedge B(B_1, B_2, B_3, B_6),$$

daher:

$$A(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6) \barwedge B(B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6),$$

weil drei Paare entsprechender Strahlen übereinstimmen.

Somit haben wir auf b drei Punkte gefunden, welche einen korrespondierenden in bezug auf G^6 haben.

In bezug auf zwei sechspunktige Gruppen G^6 gibt es in den beiden Ebenen A, B zwei Kurven 3. Ordnung a^3, b^3, deren Punkte so eindeutig zugeordnet sind, daß aus korrespondierenden Punkten A, B nach den Gruppen von G^6 projektive Büschel gehen.

Sie haben beide das Geschlecht 1.

Jede von ihnen geht durch die sechs Punkte der betreffenden Gruppe; sie geht aber auch durch die sechsten Punkte von A, B, welche zu den sechs Paaren fünfpunktiger Gruppen in G^6 gehören.

Zu $G^5_{(i)}$ mögen $A_{0,i}$ $B_{0,i}$ als sechste Punkte gehören. Z. B. dem $A_{0,6}$ korrespondiert in bezug auf $G^5_{(6)}$ ein Kegelschnitt $B^2_{0,6}$ derartig, daß die Punktreihe B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 auf ihm zum Büschel

$$A_{0,6}(A_1, \ldots, A_5)$$

projektiv ist; bestimmt man also in ihr B_6' dem Strahle $A_{0,6}A_6$ entsprechend, so liefert der Strahl B_6B_6' in seinem zweiten Schnitte mit $B^2_{0,6}$ den Punkt, welcher dem $A_{0,6}$ auch in bezug auf G^6 korrespondiert: er ist der sechste Schnitt der b^3 mit $B^2_{0,6}$ außer $B_1, \ldots, B_5$.

In bezug auf $G^5_{(6)}$ entspricht der Gerade B_1B_2 die A_1A_2, also korrespondieren in bezug auf G^6 die dritten Schnitte derselben mit a^3, b^3.

Die Kurven a^3, b^3 sind in bezug auf $G^5_{(i)}$ korrespondierende Kurven α^3, β^3 durch die Punkte $G^5_{(i)}(A)$, $G^5_{(i)}(B)$ und die zugehörigen sechsten Punkte $A_{0,i}$, $B_{0,i}$ (Nr. 229).

Nachdem das Hauptergebnis für sechspunktige Gruppen fest- 232
gestellt ist, kehren wir nochmals zu fünfpunktigen Gruppen zurück. Wir fanden, daß einer Kurve 3. Ordnung α^3 durch $A_1, \ldots, A_5, A_0$ eine Kurve 3. Ordnung β^3 durch $B_1, \ldots, B_5, B_0$ korrespondiert.

Es seien $\mathfrak{A}$, A, A' drei Punkte auf α^3, B, B' die den A, A' auf β^3 entsprechenden; in den projektiven Büscheln A und B, A' und B'

entsprechen den Strahlen $A\mathfrak{A}$, $A'\mathfrak{A}$ zwei Strahlen von B, B', deren Schnitt $\mathfrak{B}$ sei. Zu den beiden sechspunktigen Gruppen $A_1, \ldots, A_5, \mathfrak{A}$; $B_1, \ldots, B_5, \mathfrak{B}$, welche $\bar{G}^6$ heißen mögen, gehören nach dem Vorangehenden die Kurven $\bar{a}^3$, $\bar{b}^3$, auf denen A, A'; B, B' liegen. Also gehen α^3 und $\bar{a}^3$ beide durch $A_1, \ldots, A_5, A_0, \mathfrak{A}, A, A'$ und sind, weil diese drei letzten Punkte beliebig auf α^3 gewählt sind, identisch; demnach vereinigen sich auch β^3 und $\bar{b}^3$ in eine Kurve, diejenige, welche jener in bezug auf G^5 korrespondiert. Folglich liegt $\mathfrak{B}$ auf β^3, weil auf $\bar{b}^3$.

Punkte A, B von α^3, β^3, welche in bezug auf G^5 korrespondierend sind, sind, weil auf $\bar{a}^3$, $\bar{b}^3$ gelegen, auch korrespondierend in bezug auf $\bar{G}^6$; und umgekehrt, korrespondierende in bezug auf $\bar{G}^6$ auch in bezug auf G^5. Da sie jenes sind, so gehen in ihren Büscheln entsprechende Strahlen nach $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$.

Wenn bei zwei fünfpunktigen Gruppen α^3 und β^3 korrespondierende Kurven 3. Ordnung durch die Hauptpunkte $A_1, \ldots A_5, A_0$, bzw. $B_1, \ldots B_5, B_0$ und $A, A', A'' \ldots, B, B', B'', \ldots$ korrespondierende Punkte auf ihnen sind, ferner $\mathfrak{A}$ ein fester Punkt auf α^3, so laufen die Strahlen in $B, B', \ldots$ welche in den Projektivitäten um korrespondierende Punkte den Strahlen von $A, A', \ldots$ nach $\mathfrak{A}$ entsprechen, alle durch denselben Punkt $\mathfrak{B}$ von β^3. Solche Punkte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ mögen homologe Punkte auf α^3, β^3 heißen. Die beiden Kurven α^3, β^3 stehen also auf zwei verschiedene Weisen in eindeutiger Beziehung ihrer Punkte; das eine Mal sind zugeordnet korrespondierende Punkte A, B, solche, die nach den Gruppen von G^5 projektive Büschel senden; und in diesen Projektivitäten entsprechen sich auch Strahlen aus korrespondierenden Punkten nach homologen Punkten; das andere Mal sind homologe Punkte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ zugeordnet.

Feste homologe Punkte sind $A_1, B_1; \ldots A_5, B_5$. Sonst sind die homologen Punkte beweglich. Während nämlich jedem A nur ein B korrespondiert, welches auch die durchgehenden korrespondierenden Kurven α^3, β^3 seien (es gibt ∞^2 Paare), ändert sich zu einem $\mathfrak{A}$ der homologe $\mathfrak{B}$ je nach der durchgehenden Kurve 3. Ordnung α^3.

Seien A, B korrespondierend und $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ homolog auf α^3, β^3, so sind die dritten Schnitte $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$ von $A\mathfrak{A}$ und α^3, $B\mathfrak{B}$ und β^3 gleichfalls homolog. Denn der homologe zu B wird, bei der beliebigen Lage von $\mathfrak{A}$, nicht der dritte Schnitt $\mathfrak{A}'$ von $A\mathfrak{A}$ sein. Sind ferner A', B' korrespondierend auf α^3, β^3, so geht von den Strahlen von B', die den Strahlen $A'\mathfrak{A}$, $A'\mathfrak{A}'$ entsprechen, und wie diese verschieden sind, der eine nach $\mathfrak{B}$, dem homologen Punkt zu $\mathfrak{A}$, der andere muß sich mit $B\mathfrak{B}\mathfrak{B}'$ auf der β^3 treffen, also muß er durch den dritten Schnitt $\mathfrak{B}'$ gehen, wodurch derselbe homolog zu $\mathfrak{A}'$ wird; B ist es ja nicht.

Insbesondere entsprechen den Tangenten aus A an α^3 die Tangenten aus B an β^3 und die konstanten Doppelverhältnisse der beiden Kurven sind gleich.

Wir wissen, $A_1 A_0$, $B_1 B_0$ sind korrespondierend in bezug auf G^5, weil sie Hauptpunkte mit denselben Zeigern verbinden. Es seien A, B die dritten Schnitte dieser Geraden mit korrespondierenden Kurven α^3, β^3, also sind sie korrespondierend; A_1, B_1 sind homolog, folglich auch A_0, B_0. Daher stellen sich auch diese Punkte A_0, B_0 als feste homologe Punkte heraus. In allen projektiven Büscheln um korrespondierende Punkte A, B für G^5 gehen entsprechende Strahlen nach A_0 und B_0.

Dem A_1 korrespondieren alle Punkte B des Kegelschnitts $(B_2 \ldots B_5 B_0)$, dem Strahl $A_1 A_0$ entspricht daher der Strahl BB_0, d. h. A_1 ist der sechste Hauptpunkt in A, der zu den beiden Gruppen $A_2 \ldots A_5 A_0$, $B_2 \ldots B_5 B_0$ gehört, und B_1 der in B. Damit ist erkannt, daß jedes Paar homologer Hauptpunkte aus den fünf andern in gleicher Weise hervorgeht.

Wir kehren wieder zu G^6 zurück.

Durch die sieben Punkte $A_1, \ldots A_5$, $A_0 (\equiv A_{0,6})$, A_6 gehen ∞^2 Kurven α^3, die ihnen in bezug auf $G^5_{(6)}$ korrespondierenden β^3 gehen durch $B_1, \ldots B_5$, B_0 und den Punkt B_6', der dem A_6 korrespondiert, ∞^1 unter diesen β^3 gehen durch B_6 und die ihnen korrespondierenden durch A'_6, welcher dem B_6 korrespondiert. Bei diesen ∞^1 Paaren in bezug auf $G^5_{(6)}$ korrespondierenden Kurven α^3, β^3 hat A_6 im allgemeinen einen von B_6 verschiedenen homologen Punkt; dasjenige Paar, bei dem er in B_6 fällt, ist das Paar a^3, b^3, das in Nr. 231 für G^6 gefunden wurde.

Wie wir zu zwei korrespondierenden Kurven α^3, β^3, die zu G^5 gehören, ein Paar $A_6 B_6$ ermitteln können, so daß diese Kurven die a^3, b^3 für die dann entstandene G^6 sind, haben wir oben gefunden. Zwei homologe Punkte auf ihnen (oben $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$) führen als A_6, B_6 zum Ziele; und wir haben ∞^1 solche Paare. Das stimmt mit den ∞^4 Paaren von Punkten in A, B und den ∞^3 Paaren korrespondierender Kurven α^3, β^3.

In den projektiven Büscheln um A_6, B_6' muß dem Strahle $B_6' B_6$ der Strahl $A_6 A_6$ entsprechen, d. i. die Tangente in A_6 an a^3, so daß, weil B_6' linear konstruiert werden kann, wir auch diese Tangente linear konstruieren können und so sämtliche Tangenten an a^3, b^3 in den Punkten von G^6.

Wenn $\mathfrak{A}$ ein Punkt auf a^3 ist, so laufen in den projektiven Büscheln um die korrespondierenden Punkte A, B auf a^3, b^3 die Strahlen des B, die den Strahlen $A\mathfrak{A}$ entsprechen, alle durch denselben Punkt $\mathfrak{B}$

von b^3, weil eben a^3 und b^3 korrespondierende Kurven α^3, β^3 in bezug auf $G^5_{(6)}$ oder allgemein $G^5_{(i)}$ sind[1]).

Auf a^3, b^3, die zu G^6 gehören, kann ersichtlich jedes Paar homologer Grundpunkte A_i, B_i durch ein beliebiges Paar homologer Punkte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ ersetzt werden.

233 Jetzt gehen wir zu **siebenpunktigen Gruppen**:

$$G^7 \qquad \begin{matrix} A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6 A_7 \\ B_1 B_2 B_3 B_4 B_5 B_6 B_7 . \end{matrix}$$

Es seien $a^3_{(7)}$, $b^3_{(7)}$, die zu $G^6_{(7)}$ gehörigen Kurven, $a^3_{(6)}$, $b^3_{(6)}$, die zu $G^6_{(6)}$ gehörigen, so haben $a^3_{(7)}$ und $a^3_{(6)}$ zunächst die sechs Punkte $A_1, A_2 \ldots A_5$, A_0, wo A_0 zu $G^5_{(6,7)}$ gehört, gemeinsam, also noch drei Punkte, jeder von ihnen hat in bezug sowohl auf $G^6_{(7)}$, als auf $G^6_{(6)}$ denselben korrespondierenden Punkt, den einzigen, der ihm in bezug auf $G^5_{(6,7)}$ korrespondiert; dieser ist dann einer der übrigen gemeinsamen Punkte von $b^3_{(7)}$ und $b^3_{(6)}$ und korrespondiert ihm auch in bezug auf G^7.

In bezug auf zwei siebenpunktige Gruppen gibt es drei Paare korrespondierender Punkte, welche nach ihnen projektive Büschel senden.

Der Nachweis der Existenz dieser drei Punktepaare heißt das Problem der ebenen Projektivität (Homographie) im engern Sinne[2]).

Diese drei Punktepaare haben in der Photogrammetrie Bedeutung gewonnen[3]).

Wenn das siebente Paar A_7, B_7 aus homologen Punkten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ auf den zu G^6 gehörigen Kurven a^3, b^3 besteht, so gibt es zu G^7 ∞^1 korrespondierende Punkte.

Befinden sich wiederum die absoluten Punkte in den Gruppen an homologen Stellen, so liegen gleiche Büschel vor.

Bei G^6 **gibt es also drei Paare von Punkten, aus denen die beiden Gruppen durch gleiche Büschel projiziert werden**; entsprechende Strahlen gehen nach den sechsten Punkten A_0, B_0.

234 Die Ermittelung dieser drei Punktepaare ist im allgemeinen eine **kubische Aufgabe** und daher nicht mit Zirkel und Lineal zu leisten.

Es gibt aber einen interessanten Fall, wo das eine Paar unmittelbar bekannt ist und die Aufsuchung der anderen

1) Diese Ergebnisse von Nr. 232 rühren größtenteils von mündlichen Mitteilungen Hirsts aus dem Jahre 1876 her.

2) Jonquières, Nouv. Annales, 1. Ser., Bd. 17, S. 399; Cremona, ebenda, Bd. 20, S. 452; Hesse, Journ. f. Math., Bd. 62, S. 188; Sturm, a. a. O.

3) Finsterwalder, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 6, zweites Heft, S. 1.

Paare eine quadratische Aufgabe wird. Die beiden Gruppen von G^7 mögen sich als Projektionen von sieben Punkten $C_1, \ldots C_7$ aus zwei Punkten P, Q auf dieselbe Ebene E ergeben; die beiden Projektionen A_i, B_i von C_i liegen dann stets mit der Spur S von PQ in gerader Linie. Aus diesem Punkte S werden die beiden Gruppen durch den nämlichen Strahlenbüschel projiziert, also repräsentiert S zwei vereinigte korrespondierende Punkte, etwa A''' und B'''; und es sind noch A', B'; A'', B'' zu konstruieren.

Es sind also A' und A'' die beiden weiteren Schnitte der Kurven $a^3_{(7)}$ und $a^3_{(6)}$, außer $A_1, \ldots A_5, A_0, S$. Von jeder der Kurven $a^{(3)}_7$ und $a^3_{(6)}$ lassen sich leicht noch zwei weitere Punkte konstruieren, z. B. die sechsten Punkte $A_{0,1}, A_{0,2}$, die zu $G^5_{(1,7)}, G^5_{(2,7)}$ gehören, bzw. zu $G^5_{(1,6)}, G^5_{(2,6)}$, je nachdem es sich um $a^3_{(7)}$ oder $a^3_{(6)}$ handelt.

Wir haben in Nr. 227 gelernt, für eine durch neun Punkte gegebene Kurve 3. Ordnung den Gegenpunkt zu vier von diesen Punkten zu konstruieren, und gefunden, daß die Gegenpunkte auf zwei kubischen Kurven zu vier ihrer gemeinsamen Punkte auf dem Kegelschnitte durch die fünf andern liegen. Seien also $G_{(7)}$ und $G_{(6)}$ die Gegenpunkte zu A_1, A_2, A_3, A_4, so liegen sie mit A_5, A_0, S, A', A'' auf einem Kegelschnitte; und sind $G^*_{(7)}, G^*_{(6)}$ die zu A_1, A_2, A_3, A_5 gehörigen Gegenpunkte, so befinden diese sich mit A_4, A_0, S, A', A'' auf einem Kegelschnitt. Daher sind die gesuchten Punkte A', A'' die beiden weiteren Schnitte der Kegelschnitte $(A_0, S, A_5, G_{(7)}, G_{(6)})$ und $(A_0, S, A_4, G^*_{(7)}, G^*_{(6)})$, außer A_0 und S, also in bekannter Weise (Nr. 128) zu konstruieren. B', B'' gewinnt man dann einfacher als die korrespondierenden Punkte in bezug auf $G^5_{(i,k)}$.

Die beiden projektiven Ebenenbüschel PA' und PB' senden dann nach den A_i und B_i, also da $(PA_i, QB_i) = C_i$ ist, nach C_i entsprechende Ebenen, und wir erhalten, wenn A', B' und dann auch A'', B'' reell sind, die Fläche 2. Grades, welche durch P, Q und die sieben C_i bestimmt ist, erzeugt durch die eine Regelschar, zu deren Leitschar PA', QB' gehören, und die Büschel PA'', QB'' liefern die andere Regelschar.

Sind freilich A', B'; A'', B'' nicht reell, so gelangt man zu einer nicht reellen Erzeugung einer reellen Fläche 2. Grades mit nicht reellen Regelscharen.

Wenn fünf Punkte $C_1 \ldots C_5$ auf einem Kegelschnitte K liegen, der dann der erzeugten Fläche angehört, so projiziere man auf diese Ebene, so daß die Projektionen dieser fünf Punkte sie selbst sind. Auch die gesuchten Punkte A, B müssen dem K angehören und so auf ihm liegen, daß sowohl AA_6 und BB_6, als AA_7, BB_7 sich auf K schneiden. Es ist daher (Nr. 129) dem K ein Viereck $ACBD$ so

einzubeschreiben, daß AC durch A_6, CB durch B_6, BD durch B_7, DA durch A_7 geht. Es gibt zwei solche Vierecke und daher zwei Paare A', B', $A''B''$.

Sind bloß acht Punkte gegeben: P, Q, $C_1, \ldots C_6$, so ergeben sich durch die Projektion in E zwei sechspunktige Gruppen mit zwei Kurven a^3, b^3. Jedes Paar korrespondierender Punkte A, B auf diesen Kurven liefert dann eine Fläche 2. Grades durch die acht Punkte. S liegt auf beiden Kurven, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ seien zwei homologe Punkte auf a^3, b^3; nach ihnen gehen in allen korrespondierenden Büscheln A, B entsprechende Strahlen, also auch in den identischen Büscheln S, so daß zwei homologe Punkte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ stets mit S in gerader Linie liegen. Daraus folgt, daß $P\mathfrak{A}$ und $Q\mathfrak{B}$ sich schneiden: in $\mathfrak{C}$; und dieser Punkt $\mathfrak{C}$ liegt auf der Schnittlinie der entsprechenden Ebenen $PA\mathfrak{A}$, $QB\mathfrak{B}$, also auf der durch die projektiven Ebenenbüschel PA, QB erzeugte Fläche 2. Grades, und so auf allen Flächen 2. Grades durch die acht Punkte. Die Kurven a^3, b^3 sind die Projektionen, aus P, Q, der Raumkurve 4. Ordnung, die den Flächen gemeinsam ist und durch die Punkte $\mathfrak{C}$ entsteht.

Ein Strahl durch S in E enthält zwei Paare homologer Punkte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$; $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, und die Ebene aus PQS die vier Punkte P, Q, $(P\mathfrak{A}, Q\mathfrak{B})$, $(P\mathfrak{A}', Q\mathfrak{B}')$ der Raumkurve. Also haben alle Flächen 2. Grades durch acht Punkte eine Raumkurve 4. Ordnung gemeinsam und bilden einen Büschel.

Die Verbindungslinie korrespondierender Punkte A, B auf a^3, b^3 umhüllt eine Kurve 5. Klasse. Denn diese Punkte rufen in jedem Strahlenbüschel von E eine Korrespondenz [3,3] hervor; von den Koinzidenzen geht eine nach S; die andern beweisen die genannte Klasse. Im Kontinuum muß eine durch S gehende Gerade, welche die Verbindungslinie SS ist, bei der Kurve verbleiben; die vier übrigen Tangenten aus S führen zu korrespondierenden Punkten A, B, die mit S in gerader Linie liegen; folglich schneiden sich PA und QB; und wir kommen so zu den vier Kegeln des Büschels. Noch einfacher ergeben sich die mit S in gerader Linie liegenden A, B durch die Korrespondenz [2, 2], die im Büschel S selbst durch die nach korrespondierenden Punkten gehenden Strahlen entsteht.

Die beiden Punkte A', A'', welche mit ihren korrespondierenden B', B'' je die nämliche Fläche des Büschels liefern, stehen in einer eindeutigen Beziehung auf a^3; als Spuren der beiden Geraden PA', PA'' dieser Fläche, welche sich in P schneiden, liegen sie in einer Gerade mit der Spur der Tangente in P an die Grundkurve des Büschels, welche auf a^3 liegt. Der Strahlenbüschel um einen Punkt einer Kurve 3. Ordnung bringt ersichtlich eine eindeutige involutorische Korrespondenz auf der Kurve hervor, in der die beiden weiteren Schnittpunkte eines Strahles des Büschels zugeordnet sind. Der Träger ist

aber nicht unikursal und die Korrespondenz hat nicht zwei, sondern vier Koinzidenzen, nämlich die Berührungspunkte der von dem Punkte kommenden Tangenten, in unserem Falle die Punkte A, die zu den Kegeln des Büschels führen, bei denen ja jene Geraden PA', PA'' sich vereinigt haben. Diese eindeutigen involutorischen Korrespondenzen auf einer Kurve 3. Ordnung werden wir später zentrale Involutionen nennen.

Sind nur sieben Punkte gegeben: P, Q, $C_1, \ldots C_5$, so daß in 235
E sich zwei fünfpunktige Gruppen ergeben, so haben wir ∞^2 Paare korrespondierender Punkte A, B, und ∞^2 Flächen 2. Grades. In allen projektiven Büscheln A, B gehen entsprechende Strahlen nach den sechsten Punkten A_0, B_0, also auch in den identischen Büscheln S, so daß A_0, B_0 mit S in gerader Linie liegen und die entsprechenden Ebenen PAA_0, QBB_0 ihre Schnittlinie durch den Punkt $C_0 = (PA_0, QB_0)$ schicken. Er ist allen Flächen 2. Grades gemeinsam, welche durch die sieben Punkte gehen, der achte assoziierte zu ihnen. Da A_0, B_0 linear aus $A_1, \ldots A_5$; $B_1, \ldots B_5$ zu konstruieren sind, so haben wir damit eine lineare Konstruktion dieses achten assoziierten Punktes C_0 aus den sieben gegebenen P, Q, $C_1, \ldots C_5$: ein viel behandeltes Problem[1]).

Man nennt das System dieser Flächen ein Flächennetz 2. Ordnung und die acht assoziierten Punkte seine Grundpunkte.

Eine Gerade in E durch S begegnet sich mit der ihr entsprechenden Kurve 5. Ordnung (Nr. 229), außer in S, noch viermal; das beweist, daß es auf ihr vier Paare korrespondierender Punkte gibt. Die Büschel PA, QB erzeugen wiederum Kegel; und wir erhalten in jeder Ebene durch PQS außerhalb dieser Gerade vier Spitzen von Kegeln des Flächennetzes. Nun gibt es (Nr. 206) eine durch C_1, $C_2, \ldots C_5$ gehende kubische Raumkurve, welche die Gerade PQ zweimal schneidet; die Kegel 2. Grades, welche sie aus den beiden Schnittpunkten projizieren, gehen durch alle sieben (bzw. acht) Grundpunkte des Netzes. So ergibt sich die 6. Ordnung der Kegelspitzen-Kurve des Netzes.

Lassen wir noch einen Punkt fallen, so daß wir nur sechs haben: P, Q, $C_1, \ldots C_4$, so sind die Büschel der Kegelschnitte in E mit den Grundpunkten $A_1, \ldots A_4$, $B_1, \ldots B_4$ projektiv, so daß analoge Kegelschnitte einander entsprechen; folglich gilt dies auch für die Kegelbüschel aus P, Q, die über ihnen stehen. Jeder Punkt eines Kegelschnittes des einen Büschels korrespondiert jedem des analogen; in jedem Punkte der Schnittkurve zweier analogen Kegel treffen sich korrespondierende Axen PA, QB; er ist die Spitze des durch ihre Ebenenbüschel erzeugten Kegels 2. Grades. Die Fläche 4. Ordnung,

1) Vgl. z. B. Journal f. Math. Bd. 99.

welche durch die beiden Kegelbüschel entsteht, ist daher der Ort der Spitzen der Kegel 2. Grades durch die gegebenen sechs Punkte[1]). Die acht Grundkanten der beiden Kegelbüschel, also (weil die Bevorzugung von P, Q willkürlich ist) alle fünfzehn Verbindungslinien liegen auf ihr. Die vier Punkte $C_1, \ldots C_4$, beiden Basen des Büschels gemeinsam, sind Doppelpunkte des Erzeugnisses (Nr. 171); daher sind die sechs gemeinsamen Punkte Doppelpunkte der Kegelspitzen-Fläche.

Zieht man an jede kubische Raumkurve durch fünf von den Punkten aus dem sechsten die Doppelsekante, so haben wir zwei Kegel 2. Grades aus den beiden Begegnungspunkten, welche die Kurve projizieren und daher auch die Doppelsekante enthalten; sie gehen demnach durch alle sechs Punkte, und ihre Spitzen liegen auf unserer Fläche. Und weil auch zu jedem Strahl durch den sechsten Punkt eine kubische Raumkurve durch die fünf Punkte gehört, für die er Doppelsekante ist, so stellt sich unsere Fläche heraus als Ort der Schnittpunkte der kubischen Raumkurven durch fünf von den sechs Punkten mit je der aus dem sechsten kommenden Doppelsekante.

236 Wir sind jetzt in der Lage, die beiden noch aufgeschobenen Probleme der Trilinearität (Nr. 214) zu erledigen.

Es seien nunmehr ein neutrales Paar ST' und fünf Tripel gegeben: $AA'A'', \ldots EE'E''$. Von den Strahlenbüscheln in der beliebig gegebenen Ebene können wir nur zwei geben: V, V', wo dann wieder VV' zugleich s, t' ist. Wir ziehen a, b durch V, a', b' durch V' und bestimmen c, d, e; c', d', e' so, daß:

$$sabcde \barwedge SABCDE, \quad t'a'b'c'd'e' \barwedge T'A'B'C'D'E'.$$

Sind dann $\mathfrak{A}, \ldots \mathfrak{E}$ die Schnitte $aa', \ldots, ee'$; so ist der Scheitel V'' des dritten Büschels der eindeutig bestimmte Punkt (Nr. 226), für den:

$$V''(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}, \mathfrak{E}) \barwedge A''B''C''D''E'',$$

und damit ist auch die Projektivität von V'' zu u'' gegeben, jede drei konkurrente Strahlen von V, V', V'' liefern ein Tripel von $(uu'u'')$ und wird VV'' mit t, s'', $V'V''$ mit s', t'' bezeichnet, so sind die diesen Strahlen in den Projektivitäten korrespondierenden Elemente T, S'', S', T'' die weiteren singulären Elemente.

Etwas umständlicher ist der letzte Fall, wo sieben Tripel gegeben sind; er läßt sich nicht mit Hilfe einer einfacheren Hilfstrilinearität behandeln (Nr. 213). Die sieben Tripel seien $AA'A'', \ldots GG'G''$.

---

1) Längere Zeit, bis etwa 1860, hat man die kubische Raumkurve, welche durch die sechs Punkte bestimmt ist, für den Ort der Spitzen der Kegel 2. Grades durch sie gehalten; z. B. Chasles, Aperçu historique, Note 33.

Wir nehmen zunächst die sechs ersten; sie bestimmen eine Tripelreihe $R_{2,1}$, die einem Büschel von Trilinearitäten gemeinsam ist (Nr. 215), dem auch die gesuchte Trilinearität T angehört. Als Konstituenten dieses Büschels wollen wir folgende beiden Trilinearitäten nehmen; die eine T_1 ist bestimmt durch die fünf Tripel $AA'A'', \ldots EE'E''$ und hat FF' zum neutralen Paare, die andere T_2 soll die fünf Tripel $AA'A'', \ldots DD'D'', FF'F''$ enthalten und EE' als neutrales Paar haben. Beide können wir nach der vorangehenden Aufgabe beliebig vervollständigen, haben dann zu jedem Elemente eines der drei Gebilde die beiden in diesen Trilinearitäten zugehörigen Projektivitäten und können, quadratisch, die beiden gemeinsamen Paare entsprechender Elemente konstruieren, d. h. die beiden Paare, welche jenes Element zu Tripeln der Reihe $R_{2,1}$ ergänzen; oder wenn das eine Tripel schon ganz bekannt ist, so kann man das ergänzende Paar des andern linear konstruieren (Nr. 215). Wir nehmen z. B. das Tripel $AA'A''$ der Reihe $R_{2,1}$ und konstruieren, linear, das zweite Tripel $AA'_1A''_1$ derselben, zu welchem A gehört, und ebenso das zweite Tripel $BB'_1B''_1$, zu welchem B gehört.

Jetzt bestimmen wir durch die sechs Tripel $AA'A'', \ldots EE'E'', GG'G''$ eine zweite Reihe $R_{2,2}$ und in ihr die zweiten Tripel, zu denen A und B gehören: $AA'_2A''_2$, $BB'_2B''_2$. Weil auch diese Reihe $R_{2,2}$ sich in T befindet, so gehören alle diese Tripel zu T und wir haben die Projektivitäten zwischen u' und u'', welche zu A und B gehören:

$$A'A_1'A_2' \barwedge A''A_1''A_2'',$$
$$B'B_1'B_2' \barwedge B''B_1''B_2''.$$

Damit ist unsere Aufgabe zurückgeführt auf die in Nr. 214 behandelte, bei welcher die Trilinearität durch die Projektivitäten zwischen zwei der Gebilde, welche zu zwei Elementen des dritten gehören, und ein Tripel bestimmt wird[1]).

Im Anschluß an Nr. 210 erwähnen wir noch:

Es liege eine Kurve 3. Ordnung vor: mit den nicht assoziierten neun Punkten $U, U', U'', A, \ldots F$; die Tripel aus U, U', U'' nach diesen sechs Punkten bestimmen (Nr. 213) ∞^1 Trilinearitäten; allen ist die Kurve 3. Ordnung als Ort von Konkurrenzpunkten von Tripeln gemeinsam. Wird ein siebentes Tripel mit einem Konkurrenzpunkte gegeben, der nicht der Kurve angehört, so entsteht die durch die Scheitel völlig bestimmte spezielle Trilinearität, bei welcher alle Tripel konkurrent sind; sie gehört also zu jenem System von Trilinearitäten.

Wenn aber die neun Punkte $U, \ldots F$ assoziiert sind, so ergeben sich ∞^2 Trilinearitäten, zu jeder Kurve des Büschels ∞^1.

---

1) London, Math. Annalen, Bd. 44, S. 402.

§ 36. Der tetraedrale Komplex und das Problem der räumlichen Projektivität[1]).

237 Dies Problem besteht darin, wenn im Raume, oder besser, in zwei Räumen A und B, zwei Gruppen von gleich vielen und entsprechend zugeordneten Punkten gegeben sind, korrespondierende Geraden a und b aufzusuchen, von denen nach ihnen projektive Ebenenbüschel gehen. Dazu müssen wir uns zunächst über die durch Strahlen erzeugten Örter etwas orientieren.

Während es im Raume nur ∞^3 Punkte und ∞^3 Ebenen gibt, sind ∞^4 Geraden vorhanden: zu jedem der ∞^2 Strahlen eines Bündels ∞^2 Parallelen; wenn wir also bei den Punkten und Ebenen nur Örter 1. und 2. Stufe haben: Kurven und Flächen als Örter als Punkten, Torsen und Flächen als Örter von Ebenen, führen die Strahlen zu Örtern 1., 2., 3. Stufe: Regelflächen, Kongruenzen und Komplexe, welche beiden letzteren Namen durch Plückers Liniengeometrie eingeführt worden sind. Sie entstehen durch Strahlen. denen 3, 2, 1 Bedingungen auferlegt sind.

Es seien vier Punkte A_1, A_2, A_3, A_4 im Raume gegeben; gesucht werden solche Geraden, von denen nach ihnen Ebenenwürfe gehen, die ein gegebenes Doppelverhältnis haben oder die einem gegebenen Wurfe $W = \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4$ projektiv sind. Damit wird den Geraden nur eine Bedingung auferlegt, sie müssen daher einen Komplex bilden, mit dem wir uns zunächst beschäftigen wollen.

Neben diese Aufgabe tritt die duale: Es sind vier Ebenen α_1, α_2, α_3, α_4 gegeben; welches ist der Komplex der Strahlen, die von diesen Ebenen in Punktwürfen von gegebenem Doppelverhältnisse geschnitten werden?

Steiner hat diese Fragen — in erster Linie die letztere — im Anhange der Systematischen Entwickelung (1832) in Nr. 15[2]) gestellt, freilich in der Form, daß er nach der Fläche fragte, welche von den Geraden berührt wird, indem er vermutlich des Glaubens war, daß in einer dreifachen Unendlichkeit von Strahlen immer der Inbegriff der Tangenten einer Fläche, ein „Tangentenkomplex", vorliege; was nicht der Fall ist.

Die beiden dualen Fragen können in eine zusammengezogen werden vermittelst eines von Staudt[3]) herrührenden Satzes:

---

1) H. Müller, Math. Annalen, Bd. 1, S. 413; Sturm, ebenda Bd. 6, S. 513, Bd. 15, S. 407; Schubert, Kalkül der abzählenden Geometrie, S. 199—201.

2) Gesammelte Werke, Bd. 1, S. 442.

3) von Staudt, Beiträge zur Geometrie der Lage, Nr. 85.

Sind $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ die Ebenen des Tetraeders A_1, A_2, A_3, A_4 und zwar so, daß A_1 und $\alpha_1, \ldots$ einander gegenüberliegen, so sind bei jeder Gerade a die beiden Würfe von Ebenen und Punkten

$$a(A_1, A_2, A_3, A_4) \quad \text{und} \quad a(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$$

projektiv.

Wir schneiden den ersten Wurf mit A_1A_2 und projizieren den zweiten aus A_3A_4 auf A_1A_2. Die Schnitte von $a(A_1, A_2)$ sind ersichtlich A_1, A_2, für $a(\alpha_1, \alpha_2)$ sind die projizierenden Ebenen α_1, α_2 und die Projektionen A_2, A_1. Ferner hat die projizierende Ebene $(A_3A_4, a\alpha_3)$ in α_3 dieselbe Spurlinie $(A_4, a\alpha_3)$ wie die Ebene aA_4; beide schneiden also A_1A_2 in dem nämlichen Punkte $\mathfrak{A}_4$, und ebenso schneiden $(A_3A_4, a\alpha_4)$ und aA_3 in dem nämlichen Punkte $\mathfrak{A}_3$; daher ist:

$$a(A_1, A_2, A_3, A_4) \barwedge A_1A_2\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4, \quad a(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \barwedge A_2A_1\mathfrak{A}_4\mathfrak{A}_3;$$

da aber $A_1A_2\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4 \barwedge A_2A_1\mathfrak{A}_4\mathfrak{A}_3$, so ergibt sich die Behauptung.[1])

Gehören also A_1, A_2, A_3, A_4 und $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ zu demselben Tetraeder als gegenüberliegende Elemente, so ergibt sich in beiden Fällen, wofern es sich um dasselbe Doppelverhältnis handelt, der nämliche Komplex, der deshalb tetraedraler Komplex genannt wird. Er wurde von Reye in der ersten Auflage der Geometrie der Lage, Abt. II (1868), S. 117 zum ersten Male behandelt und wird auch nach ihm benannt.

Jedes der $\infty^{4\cdot 3}$ Tetraeder des Raumes führt zu ∞^1 tetraedralen Komplexen, und es gibt deren ∞^{13}.

Weil ein Komplex durch ∞^3 Strahlen gebildet wird, so werden die doppelten Bedingungen für einen Strahl, durch einen gegebenen Punkt zu gehen, in eine gegebene Ebene zu fallen, von ∞^1 Strahlen des Komplexes erfüllt: es entsteht der Komplexkegel des Punktes, die Komplexkurve der Ebene. Wenn ein Komplex algebraisch ist, so ist die Ordnung seiner Komplexkegel der Klasse seiner Komplexkurven gleich; denn beide Zahlen geben an, wie viele Strahlen des Komplexes einem Strahlenbüschel angehören, der vom Scheitel des Kegels ausgeht oder in der Ebene der Kurve liegt. Diese Zahl heißt der Grad des Komplexes.

Bei einer Kongruenz (von ∞^2 Strahlen) werden jene doppelten Bedingungen von einer endlichen Anzahl von Strahlen erfüllt; diese Zahlen der mit einem Punkt oder einer Ebene in-

---

1) Dreht man a um den Punkt $A = a\alpha_4$ in der Ebene aA_4 in die Schnittlinie mit α_4, so ergibt sich: Wenn ein Dreieck $A_1A_2A_3 \equiv a_1a_2a_3$ gegeben ist und in seiner Ebene ein Punkt A und ein Strahl a, welche inzidieren, so ist: $A(A_1, A_2, A_3, a) \barwedge a(a_1, a_2, a_3, A)$.

zidenten Strahlen heißen bei einer algebraischen Kongruenz die Ordnung und Klasse (Bündelgrad, Feldgrad) derselben. So hat z. B. die Kongruenz der Doppelsekanten einer kubischen Raumkurve die Ordnung 1 und die Klasse 3, die zu ihr duale Kongruenz der Schmiegungsaxen dieser Kurve die Ordnung 3 und die Klasse 1, endlich die in sich duale der Schmiegungsstrahlen (d. i. der Strahlen durch die Punkte der Kurve je in der zugehörigen Schmiegungsebene) die Ordnung und Klasse 3.

Zwei Komplexe von den Graden n, n' durchschneiden sich in einer Kongruenz von der Ordnung und der Klasse nn', wie das die gemeinsamen Kanten der beiden Komplexkegel aus einem Punkte und die gemeinsamen Tangenten der Komplexkurven in einer Ebene lehren.

Der Grad des tetraedralen Komplexes ist 2; denn der Satz von Nr. 224 lautet auf den Bündel übertragen: Die von einem Punkte O ausgehenden Strahlen, welche nach A_1, A_2, A_3, A_4 oder nach $O(A_1, \ldots, A_4)$ Ebenenwürfe von gegebenem Doppelverhältnis senden, erzeugen einen Kegel 2. Grades, und in der Ebene dualisiert: Die Geraden in einer Ebene ω, welche von den Ebenen $\alpha_1, \ldots, \alpha_4$ oder den Geraden $\omega(\alpha_1, \ldots, \alpha_4)$ in Punktwürfen von jenem Doppelverhältnisse geschnitten werden, umhüllen einen Kegelschnitt.

Der tetraedrale Komplex, vom Mannigfaltigkeitsgrade 13, wie oben gefunden, ist ein sehr spezieller Komplex 2. Grades; der Grad der Mannigfaltigkeit des allgemeinen ist 19. Noch spezieller — vom Grade 9 der Mannigfaltigkeit — ist der Tangentenkomplex 2. Grades einer Fläche 2. Grades.

Die Komplexkegel des tetraedralen Komplexes gehen alle durch die vier Ecken $A_1, \ldots, A_4$ des Tetraeders, die Komplexkurven berühren die vier Ebenen $\alpha_1, \ldots, \alpha_4$. Daraus folgt, daß die vier Strahlenbündel $A_1, \ldots$ und die vier Strahlenfelder $\alpha_1, \ldots$ vollständig zum Komplexe gehören. In der Tat, die Projektivität des Punktwurfes auf einem Strahle a durch A_1 zu W wird durch Ausartung erfüllt, derartig, daß A_1 und $\mathfrak{a}_1$ die singulären Elemente sind; während die Ebene aA_1 unbestimmt wird und in der Projektivität $a(A_2, A_3, A_4) \barwedge \mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4$ dem $\mathfrak{a}_1$ entsprechend konstruiert werden kann.

238 Jede Regelschar, welche einen Strahl a_0 des Komplexes enthält und deren Trägerfläche durch die Ecken des Tetraeders geht, gehört ganz zum Komplexe. Denn sind a_1', a_2', a_3', a_4' die durch die Ecken gehenden Geraden der Leitschar und a eine beliebige Gerade der Regelschar, so ist:

$$a(A_1, A_2, A_3, A_4) \equiv a(a_1', a_2', a_3', a_4') \barwedge a_0(a_1', a_2', a_3', a_4')$$
$$\equiv a_0(A_1, A_2, A_3, A_4) \barwedge W.$$

Weil durch die Ecken und a_0 ∞^2 Flächen 2. Grades gehen, a_0 in ∞^3 Lagen gewählt werden kann, aber bei einer bestimmten Regelschar jede ihrer ∞^1 Geraden die a_0 sein kann, so ergeben sich ∞^{2+3-1}, also ∞^4 im Komplexe enthaltene Regelscharen dieser Art.

Ein zweites vierfach unendliches System ergibt sich durch den dualen Satz: Jede Regelschar, welche einen Strahl a_0 des Komplexes enthält und deren Trägerfläche die vier Ebenen des Tetraeders berührt, ist ganz im Komplexe enthalten.

Zu diesen Regelscharen der einen oder anderen Art gelangt man auch, von zwei Strahlen a_0, a_0' des Komplexes ausgehend. Die Ebenenbüschel um sie, die Punktreihen auf ihnen sind projektiv; dadurch entstehen zwei Regelscharen, und die ihnen verbundenen, in denen a_0, a_0' sich befinden, gehören dem Komplexe an, und zwar bzw. dem ersten, zweiten Systeme. Die Mannigfaltigkeit ∞^4 ergibt sich hier als $\infty^{2 \cdot 3 - 2 \cdot 1}$.

Von den Leitscharen dieser im Komplexe enthaltenen Regelscharen befindet sich keine in ihm. Sei etwa ϱ eine Regelschar aus dem ersten Systeme, λ die Leitschar; wenn diese auch dem Komplexe angehörte, so würden die Würfe der Geraden von λ und ϱ, welche durch die Ecken gehen, zu W und zueinander projektiv sein, also die Schnittpunkte A_1, A_2, A_3, A_4 entsprechender Geraden auf einem Kegelschnitte liegen (Nr. 105) und demnach in einer Ebene, was nicht der Fall ist. Auch gehört jede Gerade l des Raumes zu ∞^1 Leitscharen der einen oder anderen Art; denn es gibt ∞^2 Flächen 2. Grades durch die gegebene l und die vier Ecken; und unter ihren Regelscharen, zu denen l gehört, ∞^1, bei denen der Wurf der durch die Ecken gehenden Geraden zu W projektiv ist.

Wenn eine kubische Raumkurve durch die Ecken des Tetraeders geht und einen Strahl a_0 des Komplexes zur Doppelsekante hat, so gehören alle ihre Doppelsekanten demselben an; weil die Kurve aus allen durch projektive Ebenenbüschel projiziert wird. Es gibt ∞^2 kubische Raumkurven, welche durch vier gegebene Punkte gehen und eine gegebene Gerade zweimal treffen (Nr. 206). Daher ist die Mannigfaltigkeit derartiger Kongruenzen im tetraedralen Komplexe ∞^3; sie ergibt sich als ∞^{3+2-2}.

Andererseits führen auch drei beliebige Strahlen des Komplexes, wegen der projektiven Büschel, zu einer kubischen Raumkurve und ihrer Doppelsekanten-Kongruenz; ∞^3 ergibt sich hier als $\infty^{3 \cdot 3 - 2 \cdot 3}$.

Dual: Wenn eine kubische Raumkurve die vier Ebenen des Tetraeders oskuliert und einen Strahl des Komplexes zur Schmiegungsaxe (Nr. 204) hat, so gehören alle ihre Schmiegungsaxen zum Komplexe.

Drei beliebige Strahlen des Komplexes bestimmen eine in ihm enthaltene Schmiegungsaxen-Kongruenz.

Im Komplexe befinden sich ferner sechs Systeme von ∞^1 Strahlennetzen; ein Strahlennetz $[u, v]$ wird von allen Strahlen gebildet, welche zwei feste Geraden u, v, die Leitgeraden des Netzes, treffen. Zwei Büschel wie (A_1, α_2), (A_2, α_1) führen zu einem solchen Netze, wenn aus ihnen zwei Strahlen a', a'' als Leitgeraden genommen werden, welche $A_3 A_4$ in solchen Punkten $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{A}''$ begegnen, daß

$$\mathfrak{A}'\mathfrak{A}'' A_3 A_4 \barwedge W$$

ist. Denn wenn a eine a', a'' treffende Gerade ist, so gehen die Ebenen $a(A_1, A_2)$ durch $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{A}''$, und es ist

$$a(A_1, A_2, A_3, A_4) \barwedge \mathfrak{A}'\mathfrak{A}'' A_3 A_4 \barwedge W.$$

Jedes Strahlennetz enthält ∞^3 Regelscharen, nämlich diejenigen der ∞^3 durch die Leitgeraden gehenden Flächen 2. Grades, zu welchen diese Leitgeraden nicht gehören. Auf diese Weise erhält der tetraedrale Komplex noch sechs weitere Systeme von je ∞^4 Regelscharen. Jede von diesen sendet durch zwei Ecken und in die gegenüberliegenden Ebenen Geraden.

239 Der Komplexkegel für einen Punkt A in einer der Tetraederebenen, etwa in α_1, zerfällt, weil das ganze Strahlenfeld in α_1 zum Komplexe gehört, in den Strahlenbüschel (A, α_1) und einen zweiten, der durch A_1 geht, weil die Ebene des ersteren die anderen Ecken enthält. Seine Ebene α wird folgendermaßen bestimmt: für einen beliebigen Strahl dieses Büschels ist α die Ebene nach A_1; also gilt für die Spur von α in α_1, daß $A(\alpha\alpha_1, A_2, A_3, A_4) \barwedge W$ ist; daher ist α so durch AA_1 zu legen, daß $AA_1(\alpha, A_2, A_3, A_4) \barwedge W$ ist. Damit wird jedem Punkte A von α_1 eine durch ihn gehende Ebene α des Bündels A_1 eindeutig zugeordnet.

In der durch A_1 gehenden Ebene α zerfällt die Komplexkurve in den Büschel (A_1, α) und einen zweiten, der, weil jener die Ebenen α_2, α_3, α_4 berührt, d. h. seinen Scheitel in ihnen hat, den seinigen A in α_1 haben muß. Ein beliebiger Strahl dieses Büschels lehrt, wenn seine Schnitte mit α_1, α_2, α_3, α_4, von denen A der mit α_1 ist, aus A_1 auf α_1 projiziert werden, daß auf der Spur $\alpha\alpha_1$ der A so liegt, daß $\alpha\alpha_1(A, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \barwedge W$ ist. Das ist genau der Punkt A, welchem oben α zugeordnet wurde. Denn oben war:

$$A(\alpha\alpha_1, A_2, A_3, A_4) \barwedge W;$$

für diesen Punkt A gilt aber (Nr. 237 Anm.) auch:

$$\alpha\alpha_1(A, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \barwedge A(\alpha\alpha_1, A_2, A_2, A_4) \barwedge W.$$

Auch der Ebene α ist der Punkt A eindeutig zugeordnet.

Und wir haben eine interessante eindeutige Verwandtschaft zwischen den Punkten eines Feldes und den Ebenen eines Bündels erhalten: mit durchweg inzidenten entsprechenden Elementen.

Wir wollen diese Verwandtschaft noch etwas weiter untersuchen. Es bewege sich A auf einer Gerade $\mathfrak{a}$ in α_1, also von einem der Strahlen a'' zum andern, und demnach perspektiv zu $\mathfrak{A}''$ auf A_3A_4. Dieser wiederum bewegt sich, weil das Doppelverhältnis $(\mathfrak{A}'\mathfrak{A}''A_3A_4)$ konstant ist, projektiv zu $\mathfrak{A}'$ und daher auch zu a'. Der jeweilige Strahlenbüschel des Komplexes aus A gehört zum Netze $[a', a'']$; sein Scheitel A liegt auf a'', die Ebene α geht durch die andere Leitgerade a'; sie verbindet also entsprechende Elemente der Punktreihe auf $\mathfrak{a}$ und des Strahlenbüschels (A_1, α_2), die projektiv sind, oder, wenn wir jene aus A_1 projizieren, zweier projektiven Büschel mit demselben Scheitel A_1, umhüllt demnach einen Kegel 2. Grades.

Infolgedessen nennen wir diese Verwandtschaft zwischen den Punkten eines Feldes α_1 und den Ebenen eines Bündels A_1, in der den Punkten einer Gerade die Tangentialebenen eines Kegels 2. Grades korrespondieren, quadratisch. Da ein Ebenenbüschel in A_1 zwei Ebenen an diesen Kegel sendet, so folgt, daß ihm im Felde α_1 die Punkte eines Kegelschnitts korrespondieren, den man direkt durch die duale Betrachtung erhalten kann.

Kommt A in der Ebene α_1 in eine der Ecken, etwa A_2, so erweitert sich der Büschel (A, α) zum Bündel A_2, dem aus A_1 die Ebenen durch A_1A_2 angehören; ebenso entspricht der Ebene α_2 von A_1 die Gerade $\alpha_1\alpha_2 = A_3A_4$ von α_1. Wir erhalten so die Hauptelemente der quadratischen Verwandtschaft, bei denen die eindeutige Korrespondenz aufhört: in α_1 die Punkte A_2, A_3, A_4 denen in A_1 die ganzen Ebenenbüschel A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4 entsprechen, in A_1 die Ebenen α_2, α_3, α_4, denen in α_1 die ganzen Geraden $\alpha_1\alpha_2$, $\alpha_1\alpha_3$, $\alpha_1\alpha_4$ korrespondieren.

Auf die quadratische Verwandtschaft einerseits und auf die Eigenschaft durchgängiger Inzidenz entsprechender Elemente andererseits kommen wir zurück.

Wir haben im Komplexe dreimal vier Systeme von je ∞^2 Strahlenbüscheln: 1. die eben besprochenen (A, α) mit dem Scheitel in einer Ebene des Tetraeders und der Ebene durch die Gegenecke, 2. die Büschel aus den Ecken des Tetraeders, und 3. diejenigen in seinen Ebenen.

Wenn die vier Punkte A_1, A_2, A_3, A_4 in einer Ebene α_0 liegen, so artet der tetraedrale Komplex in den Inbegriff der Geraden aus, welche den Kegelschnitt in α_0 durch A_1, A_2, A_3, A_4 treffen, für dessen Punkte A gilt: $A(A_1, A_2, A_3, A_4) \barwedge W$.

Wegen der Identität der vier Ebenen wird die andere Erzeugung illusorisch.

Dual, wenn die vier Ebenen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ durch einen Punkt A_0 gehen, so wird er durch die Tangenten des Kegels 2. Grades gebildet, dessen Berührungsebenen α die Bedingung: $\alpha(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \barwedge W$ erfüllen.

Hier allein handelt es sich um Tangentenkomplexe, aber um solche von ausgearteten Flächen 2. Grades, Kegelschnitten als ausgearteten Flächen 2. Klasse, Kegeln als ausgearteten Flächen 2. Ordnung.

240 Für das Problem der räumlichen Projektivität seien in A und B die beiden vierpunktigen Gruppen:

$$G^4 \qquad \begin{matrix} A_1 A_2 A_3 A_4 \\ B_1 B_2 B_3 B_4 \end{matrix}$$

gegeben. Jeder Gerade, etwa b in B, korrespondiert in A ein tetraedraler Komplex von Strahlen a, und b erweitert sich selbst zu einem tetraedralen Komplexe, dessen sämtlichen Strahlen jener korrespondiert; wir nennen diese den beiden Tetraedern und dem nämlichen Doppelverhältnisse zugehörigen Komplexe analog.

Es entstehen so zwei „Büschel" von tetraedralen Komplexen; gemeinsam sind den Komplexen eines Büschels die Bündel und Felder der Ecken und Ebenen des zugehörigen Tetraeders. Wir können sie als projektiv bezeichnen, wobei analoge Komplexe entsprechend sind: die Büschel der Komplexkegel um zwei beliebige Punkte A, B, die Scharen der Komplexkurven in zwei beliebigen Ebenen α, β sind projektiv.

Lassen wir A und B in O zusammenfallen, so schneiden sich entsprechende Kegel in Strahlen c, die sich selbst korrespondieren, also projektive Würfe nach den beiden Gruppen von G^4 senden (oder von den zugehörigen Tetraederebenen in projektiven Würfen geschnitten werden). Es ergibt sich ein Kegel 4. Ordnung von Strahlen c und in einer Ebene ω eine Kurve 4. Klasse, also ein Komplex 4. Grades.

Die Strahlen c, welche nach den beiden Gruppen von G^4 projektive Würfe senden, erzeugen einen Komplex 4. Grades. Zu ihm gehören die Bündel um die acht Punkte und die Felder in den acht Ebenen der beiden Tetraeder.

Der Büschel von tetraedralen Komplexen, der zu A_1, A_2, A_3, A_4 gehört, enthält drei zerfallende Komplexe: sie bestehen aus zwei Strahlengebüschen (speziellen linearen Komplexen), deren Strahlen alle eine feste Gerade, die Axe, treffen; unsere Paare von Strahlengebüschen haben die Axen A_1A_2, A_3A_4; A_1A_3, A_2A_4; A_1A_4, A_2A_3, und ergeben sich bei den Doppelverhältnissen 1, 0, ∞, analog sind ihnen, ähnlich wie in Nr. 225, die gleichnamigen Gebüsche-Paare in B. Jede zwei analoge

Gebüsche-Paare, wie $[A_1A_2]$, $[A_3A_4]$ und $[B_1B_2]$, $[B_3B_4]$ schneiden sich in vier Strahlennetzen $[A_1A_2, B_1B_2]$, $[A_3A_4, B_1B_2]$, $[A_1A_2, B_3B_4]$, $[A_3A_4, B_3B_4]$, und so ergeben sich zwölf im Komplexe 4. Grades der Strahlen c befindliche Strahlennetze.

Nehmen wir aber wiederum an, daß A_4 mit B_3, B_4 mit A_3 identisch sei, so gehört zum Komplex 4. Grades das Gebüsche, welches die Verbindungslinie dieser beiden Punkte zur Axe hat und zwei analogen Gebüsche-Paaren gemeinsam ist; es bleibt ein Komplex 3. Grades, und für jeden Strahl c desselben gilt:

$$c(A_1, A_2, A_3, B_3) \barwedge c(B_1, B_2, B_3, A_3);$$

woraus, weil cA_3 und cB_3 verschieden sind, folgt, daß die Ebenenpaare $c(A_1, B_1;\ A_2, B_2;\ A_3, B_3)$ in Involution sind. Also: Alle Geraden, welche nach drei gegebenen Punktepaaren Ebenenpaare in Involution senden, erzeugen einen Komplex 3. Grades[1]).

Der Kegel 3. Ordnung aus einem Punkte gibt den analogen Satz von Nr. 225, auf den Bündel übertragen. Zu diesem Komplexe gehören die sechs Bündel um die gegebenen Punkte, die Felder in den acht Ebenen durch drei Punkte aus verschiedenen Paaren, die sechs Strahlennetze $[A_1A_2, B_1B_2]$, $[A_1B_2, B_1A_2]$, ...; bei einem Strahle eines der Bündel kann die unbestimmte Ebene der Involution entsprechend bestimmt werden, bei einem Strahle eines der Felder ist die Involution parabolisch, und bei den Strahlen der Netze handelt es sich nur um zwei Ebenenpaare.

Jetzt seien zwei fünfpunktige Gruppen gegeben: 241

$$G^5 \qquad \begin{matrix} A_1A_2A_3A_4A_5 \\ B_1B_2B_3B_4B_5. \end{matrix}$$

Wir zerlegen in zwei Gruppenpaare $G^4_{(5)}$, $G^4_{(4)}$, einer Gerade b sind dann bzw. zwei tetraedrale Komplexe zugeordnet. Gemeinsam ist ihnen eine Kongruenz von der Ordnung und der Klasse 4, zu welcher die drei Bündel A_1, A_2, A_3 (Kongruenzen von der Ordnung 1 und der Klasse 0) und das Feld in der Ebene $A_1A_2A_3$ (eine Kongruenz von der Ordnung 0 und der Klasse 1) gehören; es bleibt eine Kongruenz von der Ordnung 1 und der Klasse 3 übrig.

In allen Fällen gilt für einen Strahl a, der beiden Komplexen gemeinsam ist:

$$a(A_1, A_2, A_3, A_4) \barwedge b(B_1, B_2, B_3, B_4),$$
$$a(A_1, A_2, A_3, A_5) \barwedge b(B_1, B_2, B_3, B_5).$$

Bei einem Strahle des Bündels A_1 wird die Ebene aA_1 in der einen

1) Diesen mir 1875 von Voß mitgeteilten Satz habe ich damals in der obigen Weise bewiesen.

Projektivität eine andere sein, als in der andern; ferner bei einem Strahle des Feldes $\alpha_0 = A_1 A_2 A_3$ sind beide Projektivitäten ausgeartet: mit der singulären Ebene α_0 im Büschel a und der singulären Ebene bB_4, bzw. bB_5 im Büschel b. In beiden Fällen handelt es sich also um verschiedene Projektivitäten.

Und nur für einen Strahl a der restierenden Kongruenz (1, 3) sind die beiden Projektivitäten identisch, weil sie in drei verschiedenen Paaren entsprechender Elemente übereinstimmen. Also gilt:

$$a(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5) \barwedge b(B_1, B_2, B_3, B_4, B_5).$$

Demnach korrespondieren in bezug auf G^5 einem Strahle b die Strahlen a einer Kongruenz (1, 3).

Die Ordnung 1 dieser Kongruenz ergibt sich auch aus dem Satze von Nr. 226, wenn er von den Ebenen auf die Bündel um einen beliebigen Punkt A und um einen Punkt B auf b übertragen wird.

Seien nun a, a', a'' drei Strahlen unserer Kongruenz, so erzeugen die drei projektiven Ebenenbüschel um sie eine kubische Raumkurve, welche durch $A_1, \dots A_5$ geht und jene drei Geraden zu Doppelsekanten hat (Nr. 201). Die Punktreihe auf ihr wird aber aus allen ihren Doppelsekanten durch projektive Ebenenbüschel projiziert, insbesondere also die Reihe der fünf Punkte. Folglich gehören alle Doppelsekanten der kubischen Raumkurve zu unserer Kongruenz und, da sie selbst eine Kongruenz (1, 3) bilden, so sind beide Kongruenzen identisch; denn der aus einem Punkte kommende Strahl unserer Kongruenz ist immer die Doppelsekante der kubischen Raumkurve, die durch ihn geht. Der obige Satz präzisiert sich daher in folgenden:

In bezug auf G^5 korrespondiert einer Gerade b die Kongruenz (1, 3) der Doppelsekanten einer durch $A_1, A_2, \dots A_5$ gehenden kubischen Raumkurve[1]).

Durch die fünf Punkte und eine Gerade a, welche b korrespondiert, als Doppelsekante ist die kubische Raumkurve eindeutig festgelegt (Nr. 206).

Hält man B_5 fest, und läßt A_5 den ganzen Raum A durchlaufen, so ergeben sich wiederum die ∞^3 Doppelsekanten-Kongruenzen von kubischen Raumkurven, welche in dem tetraedralen Komplexe enthalten sind, der der Gerade b in bezug auf $G^4_{(5)}$ korrespondiert. Jeder Punkt A_5 gibt eine besondere kubische Raumkurve, weil jede sich nur bei demjenigen Punkte ergibt, der in der Projektivität ihrer Punktreihe zu dem Ebenenbüschel b, in welcher den Punkten A_1, A_2,

1) Liegen die fünf Punkte $A_1, \dots A_5$ in einer Ebene α_0, so korrespondiert der Gerade b der Bündel um den Punkt $\mathfrak{A}$ in α_0, für welchen

$$\mathfrak{A}(A_1, \dots A_5) \barwedge b(B_1, \dots B_5).$$

Ergänzt zur (1, 3) wird dieser Bündel durch das dreifache Strahlenfeld in α_0.

A_3, A_4 die Ebenen $b(B_1, B_2, B_3, B_4)$ homolog sind, der Ebene bB_5 korrespondiert.

Die Gerade b in B erweitert sich zu der Doppelsekanten-Kongruenz derjenigen kubischen Raumkurve, welche durch $B_1, \ldots B_5$ geht und b zur Doppelsekante hat.

Diese beiden Doppelsekanten-Kongruenzen, von denen jeder Strahl der einen jedem der anderen korrespondiert, können wir wiederum analog in bezug auf G^5 nennen; und da durch fünf Punkte ∞^2 kubische Raumkurven gehen, so haben wir ∞^2 Paare analoger Kongruenzen.

Es ist wohl richtig, daß die Ebenenwürfe, durch welche vier Punkte einer kubischen Raumkurve aus allen Doppelsekanten derselben projiziert werden, dasselbe Doppelverhältnis haben; aber dieser Satz darf, wie schon in Nr. 202 bemerkt, nicht umgekehrt werden: Die Axen aller Büschel von vier Ebenen, welche durch vier gegebene Punkte gehen und ein gegebenes Doppelverhältnis haben, sind die sämtlichen Doppelsekanten einer kubischen Raumkurve. Durch diese ∞^2 Doppelsekanten wird der Ort der Axen gar nicht erschöpft und kann es nicht werden, weil den Geraden nur eine Bedingung auferlegt ist und diese durch ∞^3 Geraden erfüllt wird: wie wir wissen, durch die sämtlichen Strahlen eines tetraedralen Komplexes. Auch müßte die kubische Raumkurve durch die gegebenen Bedingungen bestimmt sein; es liegen aber nur 10, nicht 12 Bedingungen für sie vor.

Diese falsche Umkehrung ist in Schröters „Oberflächen 2. Ordnung und Raumkurven 3. Ordnung“, S. 233 gemacht worden; und in gleicher Weise ist die Antwort, die auf Steiners Frage im Anhang der Systematischen Entwickelung Nr. 15 (Nr. 237) in Anm. 25 des Anhangs des ersten Bandes der Gesammelten Werke Steiners (S. 527) gegeben worden ist, falsch, wegen der unrichtigen Mannigfaltigkeit mehr falsch, als was Steiner irrtümlich vermutet hatte, der doch wenigstens einen Ort von ∞^3 Strahlen — die Tangenten einer Fläche — annahm. Dazu kommt noch eine andere Verwechselung.

Liegen, statt fünf Punkten, fünf Ebenen $\alpha_1, \ldots, \alpha_5$ vor, und handelt es sich um die Geraden a, welche von ihnen in Punktreihen geschnitten werden, die einem gegebenen fünfelementigen Gebilde, etwa $b(B_1, \ldots, B_5)$ oder $b(\beta_1, \ldots, \beta_5)$, projektiv sind, so ergibt sich diesmal nicht dasselbe Gebilde (wie der in sich duale tetraedrale Komplex bei vier Punkten oder vier Ebenen), sondern die zur Doppelsekanten-Kongruenz einer kubischen Raumkurve duale, aber von ihr verschiedene Kongruenz der Schmiegungsaxen einer kubischen Raumkurve, welche die fünf Ebenen $\alpha_1, \ldots, \alpha_5$ oskuliert: eine Kongruenz 1. Klasse 3. Ordnung.

In Steiners in erster Linie und ausführlich gestellter Aufgabe sind Ebenen gegeben und nicht Punkte; wenn nun in der erwähnten Anm. 25 die Doppelsekanten-Kongruenz einer kubischen Raumkurve genannt wird als Antwort auf die Steinersche Frage, so ist also erstens der Fall von vier gegebenen Elementen mit dem von fünf gegebenen Elementen verwechselt, und zweitens der von gegebenen Ebenen mit dem von gegebenen Punkten.[1])

Wenn:

$$G^5 \quad \begin{matrix} \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5 \\ \beta_1\beta_2\beta_3\beta_4\beta_5 \end{matrix}$$

gegeben ist, so sind immer zwei Kongruenzen von Schmiegungsaxen kubischer Raumkurven, welche $\alpha_1, \ldots, \alpha_5$, bzw. $\beta_1, \ldots, \beta_5$ oskulieren, zueinander analog.

242 Kehren wir zu zwei fünfpunktigen Gruppen zurück. Jedes der beiden Gruppenpaare $G^4_{(5)}$ und $G^4_{(4)}$ führt zu einem Komplexe 4. Grades von solchen Geraden c, welche je nach den beiden Gruppen des betreffenden Paares projektive Ebenenwürfe senden. Diese Komplexe haben gemeinsam die sechs Strahlenbündel $A_1, \ldots, B_3$, die Felder in $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$, die drei Strahlennetze $[A_1A_2, B_1B_2]$, $[A_1A_3, B_1B_3]$, $[A_2A_3, B_2B_3]$ und daher außerdem noch eine Kongruenz 7. Ordnung 11. Klasse. Nur bei den Strahlen c dieser Kongruenz sind die beiden Projektivitäten:

$$c(A_1, A_2, A_3, A_4) \barwedge c(B_1, B_2, B_3, B_4),$$
$$c(A_1, A_2, A_3, A_5) \barwedge c(B_1, B_2, B_3, B_5)$$

identisch, weil sie in drei verschiedenen Paaren entsprechender Ebenen übereinstimmen; bei den Strahlen der genannten Netze stimmen nur zwei überein. Also gilt für jene Strahlen:

$$c(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5) \barwedge c(B_1, B_2, B_3, B_4, B_5).$$

In bezug auf G^5 besteht eine Kongruenz (7, 11), deren Strahlen c nach den beiden fünfpunktigen Gruppen projektive Ebenenbüschel senden.

Aus jedem der zehn Punkte kommt an sie, wegen der unbestimmt werdenden Ebene, ein Kegel 4. Ordnung, z. B. aus A_5 (oder B_5) derjenige des Komplexes 4. Grades, welcher zu $G^4_{(5)}$ gehört. In der Ebene $A_1A_2A_3$ befindet sich von ihr ein Büschel mit dem Scheitel im Spurpunkt von B_4B_5.

Die korrespondierenden Strahlen a, b in einem festen Bündel O

---

1) Diese doppelt unrichtige Antwort ist in dem Abdruck der Systematischen kelung in der Sammlung: Klassiker der exakten Wissenschaften, Nr. 83, unverbessert wiedergegeben. So schleppen sich Fehler weiter!

bilden (Nr. 229) eine eindeutige Verwandtschaft 5. Grades; die sieben Strahlen unserer Kongruenz durch O sind die sich selbst entsprechenden Strahlen derselben (Nr. 230).

Wenn wiederum A_5, B_5 mit B_4, A_4 identisch sind, so löst sich von dieser Kongruenz (7, 11) ab die Kongruenz (4, 4) der zu $G^4_{(5)}$ gehörigen Strahlen c, welche $A_4 B_4$ treffen; sie besteht aus den beiden Bündeln A_4, B_4 und noch einer Kongruenz (2, 4). Es bleibt eine Kongruenz (3, 7), für deren Strahlen wieder auf Involution geschlossen werden kann:

Die Strahlen, welche nach vier gegebenen Punktepaaren A_1, B_1; ..., A_4, B_4 Ebenenpaare in Involution senden, bilden eine Kongruenz 3. Ordnung 7. Klasse.

Die drei Strahlen dieser Kongruenz aus einem Punkte führen, durch Schnitt der Bündelfigur mit einer Ebene, zu dem Satze in Nr. 230.

Es seien nun sechste Punkte hinzugefügt: 243

$$G^6 \quad \begin{matrix} A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6 \\ B_1 B_2 B_3 B_4 B_5 B_6. \end{matrix}$$

Wir konstruieren die kubische Raumkurve, deren Doppelsekanten-Kongruenz einer gegebenen Gerade b in bezug auf $G^5_{(6)}$ korrespondiert. Die Punktreihe auf ihr ist dem Ebenenbüschel b so projektiv, daß die Punkte $A_1, \ldots, A_5$ den Ebenen $b(B_1, \ldots, B_5)$ entsprechen; ist dann auf ihr A_6' der der Ebene bB_6 entsprechende Punkt, so können in bezug auf G^6 der b nur diejenigen Doppelsekanten a der Raumkurve korrespondieren, welche der einfachen Sekante $A_6' A_6$ begegnen, und zwar nicht im Punkte A'_6; denn für diese allein ist

$$aA_6 \equiv aA'_6.$$

Diese Doppelsekanten bilden eine Regelschar (Nr. 202), und ihre Trägerfläche enthält die sechs Punkte $A_1, \ldots, A_6$.

Also:

In bezug auf G^6 korrespondiert einer Gerade b eine Regelschar von Geraden a, deren Trägerfläche durch $A_1, \ldots, A_6$ geht.

Andererseits bestimmen die sechs Punkte $B_1, \ldots, B_6$ und die Gerade b eine Fläche 2. Grades; ist b' eine Gerade auf ihr aus derselben Regelschar mit b, während $b_1', \ldots, b_6'$ die durch $B_1, \ldots, B_6$ gehenden Geraden der anderen Schar sind, so haben wir:

$$b'(B_1, \ldots, B_6) \equiv b'(b_1', \ldots, b_6') \barwedge b(b_1', \ldots, b_6') \barwedge b(B_1, \ldots, B_6);$$

also erweitert sich b wiederum zu einer ganzen Regelschar, und wir erhalten zwei analoge Regelscharen, deren Trägerflächen durch die Punktgruppen gehen, und von denen jede

Gerade der einen jeder Geraden der anderen korrespondiert. Es ergeben sich ∞^3 Paare analoger Regelscharen.

Wenn die Punktgruppe in B und b, in A aber nur die Punkte A_1, A_2, A_3, A_4 festgehalten werden, während A_5, A_6 sich verändern, so erhalten wir im tetraedralen Komplexe, der zu b in bezug auf $G^4_{(5,6)}$ gehört, Regelscharen aus dem ersten Systeme, aber nur ∞^4, nicht ∞^6, wie die Lagen der Punkte A_5, A_6 vermuten lassen. In der Tat, bei jeder Regelschar des Komplexes aus diesem Systeme ist die Leitschar zum Büschel b so projektiv, daß den Geraden $a_1', \ldots, a_4'$ durch $A_1, \ldots, A_4$ die Ebenen $b(B_1, \ldots, B_4)$ entsprechen. Sind dann a_5', a_6' den $b(B_5, B_6)$ entsprechend, so kommt bei jedem A_5 auf a_5' und A_6 auf a_6' dieselbe Regelschar zustande.

Wird auch A_5 festgehalten, so führen die verschiedenen Lagen von A_6 nur zu ∞^{3-1} Regelscharen, allen Regelscharen von Doppelsekanten der kubischen Raumkurve, welche der b in bezug auf $G^5_{(6)}$ korrespondiert.

Von der eindeutigen Zuordnung der Regelscharen durch $G^6(A)$ und $G^6(B)$ ist eine Ausnahme zu verzeichnen. Durch jede dieser Gruppen geht eine kubische Raumkurve a_0^3, b_0^3 (Nr. 206).

Einer Doppelsekante b von b_0^3 entspricht eine Regelschar $\bar{\mathfrak{A}}^2$, deren Geraden dann allen Doppelsekanten von b_0^3 korrespondieren, welche also allen Regelscharen von Doppelsekanten dieser Kurve analog ist. Ebenso gibt es in B eine ausgezeichnete Regelschar $\bar{\mathfrak{B}}^2$, deren Geraden allen Doppelsekanten von a_0^3 korrespondieren.

Die Kurve b_0^3 hat sechs analoge Kurven a_i^3, je in bezug auf $G^5_{(i)}$, und ebenso seien zu a^3_0 analog die b_i^3. Weil die Doppelsekanten-Kongruenz von b_0^3 und die Regelschar $\bar{\mathfrak{A}}^2$ auch in bezug auf $G^5_{(6)}$ analog sind, so sind die Geraden von $\bar{\mathfrak{A}}^2$ Doppelsekanten aller sechs a_i^3 und die von $\bar{\mathfrak{B}}^2$ Doppelsekanten aller b_i^3, die ihnen verbundenen Regelscharen bestehen demnach aus einfachen Sekanten dieser Kurven und mögen deshalb mit $\mathfrak{A}^2$, $\mathfrak{B}^2$ bezeichnet werden. Sie werden sich später als analog in bezug auf G^6 herausstellen.

244 Wir kommen zu zwei siebenpunktigen Gruppen:

$$G^7 \quad \begin{matrix} A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6 A_7 \\ B_1 B_2 B_3 B_4 B_5 B_6 B_7. \end{matrix}$$

Die Leitschar der Regelschar, welche der Gerade b in bezug auf $G^6_{(7)}$ korrespondiert, ist projektiv zu dem Ebenenbüschel b, derartig, ihren durch $A_1, \ldots, A_6$ gehenden Geraden $a_1', \ldots, a_6'$ die Ebenen $b(B_1, \ldots, B_6)$ entsprechen. Entspricht dann in dieser Projektivität

der Ebene bB_7 die Gerade a_7' der Leitschar, so ist diejenige Gerade a, welche aus der Regelschar selbst durch die Ebene $a'_7 A_7$ ausgeschnitten wird, die einzige Gerade, welche der b in bezug auf G^7 korrespondiert.

In bezug auf zwei Gruppen G^7 von je sieben Punkten korrespondiert einer Gerade b eindeutig eine Gerade a; und wir haben so eine eindeutige Verwandtschaft zweier Strahlenräume — vielleicht die einzige bekannte neben denjenigen, welche durch eine Kollineation oder Korrelation entstehen.

In bezug auf zwei Gruppen

$$\alpha_1 \ldots \alpha_6$$
$$\beta_1 \ldots \beta_6$$

haben wir ebenfalls analoge Regelscharen, deren Trägerflächen die einen und die anderen Ebenen berühren, und in bezug auf

$$\alpha_1 \ldots \alpha_7$$
$$\beta_1 \ldots \beta_7$$

eindeutige Zuordnung der Geraden der beiden Räume.

Unser Ergebnis sagt auch aus, daß, wenn sieben Punkte $A_1, \ldots, A_7$ und ein siebenelementiges Gebilde $\mathfrak{B}_1 \ldots \mathfrak{B}_7$ gegeben sind, eine Gerade a vorhanden ist, für welche:

$$a(A_1, A_2, \ldots, A_7) \barwedge \mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2 \ldots \mathfrak{B}_7.$$

Dabei ist vorausgesetzt, daß $A_1, \ldots, A_7$ allgemeine Lage im Raume haben; liegen sie z. B. alle in einer Ebene, so ist das nicht möglich; denn es gibt in dieser keinen Punkt A, durch den ja a gehen müßte, für welchen

$$A(A_1, \ldots, A_7) \barwedge \mathfrak{B}_1 \ldots \mathfrak{B}_7.$$

Werden noch weitere Punkte zu den Gruppen hinzu- 245
gefügt, so ergeben sich, je nachdem die Anzahl der Punkte in jeder Gruppe 8, 9, 10, 11 beträgt, zwei Komplexe, zwei Kongruenzen, zwei Regelflächen mit eindeutig korrespondierender Strahlen, eine endliche Anzahl von Paaren korrespondierenden Strahlen, welche bzw. nach der einen und der anderen Gruppe projektive Büschel senden. Ferner entstehen in allen Fällen noch andere Fragen, z. B. bei G^6 nach der Kongruenz, den Komplexen, die von der einer b korrespondierenden Regelschar erzeugt werden, wenn b einen Büschel, einen Bündel oder ein Feld durchläuft.

Wir benutzen zur Erledigung dieser Fragen die Methoden der abzählenden Geometrie und verallgemeinern zugleich das Problem. Wir nehmen an, es seien in dem einen Raume $k+3$ Punkte $A_1, \ldots, A_{k+3}$ und $l+3$ Ebenen $\alpha_1, \ldots, \alpha_{l+3}$, und, ihnen

homolog, im andern $B_1, \ldots, B_{k+3}$, $\beta_1, \ldots, \beta_{l+3}$ gegeben. Wir wollen (kl) die Signatur dieser „Grundelemente" nennen. Es sollen nun solche korrespondierende Geraden a, b aufgesucht werden, daß gleichzeitig die Ebenenbüschel

$$\Pi_e \qquad a(A_1, \ldots, A_{k+3}) \text{ und } b(B_1, \ldots, B_{k+3})$$

und die Punktreihen

$$\Pi_p \qquad a(\alpha_1, \ldots, \alpha_{l+3}) \text{ und } b(\beta_1, \ldots, \beta_{l+3})$$

projektiv sind[1]).

Durch diese Doppel-Projektivitäten $\Pi_{e,p}$ werden den beiden Geraden a und b insgesamt $k+l$ Bedingungen auferlegt; wenn l oder k gleich 0 ist, so bildet die betreffende Projektivität keine Bedingung, es ist so, als wenn die zugehörigen Grundelemente gar nicht vorhanden wären. Im vorangehenden haben wir uns mit den Signaturen (1, 0), (2, 0), (3, 0), (4, 0) und den dualen beschäftigt.

Den beiden Geraden können im ganzen acht Bedingungen auferlegt werden, also noch $8-(k+l)$ weitere; wir werden dann eine endliche Anzahl von Paaren a, b haben. Als solche weiteren Bedingungen nehmen wir reine Lagenbedingungen (Inzidenzen). Die Bedingungen, daß b eine feste Lage habe, bezeichnen wir mit b_f, daß sie einem gegebenen Strahlenbüschel angehöre, mit b_s, daß sie durch einen gegebenen Punkt gehe oder in eine gegebene Ebene falle (einem gegebenen Bündel oder Felde angehöre), mit b_p, b_e, daß sie eine gegebene Gerade treffe (einem gegebenem Strahlengebüsche angehöre) mit b_g, und ähnlich bei a. Diese Bedingungen b_f, b_s, b_p und b_e, b_g werden von einer, ∞^1, ∞^2, ∞^3 Geraden erfüllt und sind daher vierfach, dreifach, doppelt, einfach. Nebeneinander in Form eines Produktes gestellte, „mit einander multiplizierte" Bedingungen sollen zugleich erfüllt werden. Indem wir im vorangehenden bei (1, 0), (2, 0), (3, 0), (4, 0) nach dem Komplexe, der Kongruenz, der Regelfläche, den Geraden fragten, die einer festen Gerade b korrespondieren, wurden die Lagenbedingungen $b_f a_s$; $b_f a_p$, $b_f a_e$; $b_f a_g$; b_f hinzugefügt, d. h. $4+3$, $4+2$, $4+1$, 4 Bedingungen. Aber $k+l=1$ bietet nun zwei Fälle: (1, 0), (0, 1), $k+l=2$ drei: (2, 0), (1, 1), (0, 2), usw.

Hinzuzufügende Lagenbedingungen sind dann folgende, wobei solche, die sich nur durch Vertauschung der Räume unterscheiden, weggelassen werden:

$$k+l=1\colon\ b_f a_s;\quad k+l=2\colon\ b_f a_p,\ b_f a_e,\ b_s a_s;\quad k+l=3\colon\ b_f a_g,\ b_s a_p,\ b_s a_e;$$
$$k+l=4\colon\ b_f,\ b_s a_g,\ b_p a_p,\ b_p a_e,\ b_e a_p,\ b_e a_e;\quad k+l=5\colon\ b_s,\ b_p a_g,\ b_e a_g;$$
$$k+l=6\colon\ b_p,\ b_e,\ b_g a_g;\quad k+l=7\colon\ b_g;$$

1) Vgl. Math. Annalen, Bd. 15, S. 407, wo aber k, l statt $k+3$, $l+3$ stehen; einer Signatur (kl) dort entspricht $(k-3, l-3)$ hier.

während bei $k+l=8$ keine Inzidenz hinzugefügt werden kann. Immer handelt es sich um die endliche Anzahl der Paare ab. Manche Zahlen lassen sich doppelt deuten, z. B. die Zahl bei $k+l=3$ und $b_s a_p$ ist sowohl Ordnung der Kongruenz in A, welche durch die den Strahlen b eines Büschels entsprechenden Regelflächen von Strahlen a entsteht, als Grad des Komplexes in B, der durch die den Strahlen eines Bündels in A korrespondierenden Regelflächen erzeugt wird; oder $b_s a_g$ bei $k+l=4$ führt sowohl zum Grade der Regelfläche in A, welche durch die den Strahlen eines Büschels in B korrespondierenden Strahlen a entsteht, als zum Grade des Komplexes in B, den die Strahlen b erzeugen, welche den Strahlen eines Gebüsches in A korrespondieren. Bei $k+l=5$ führt $b_e a_g$ zum Grade der Regelfläche von Strahlen a, welche korrespondierende b (in einfacher Unendlichkeit) in einer gegebenen Ebene haben, und zur Klasse der Kongruenz von Strahlen b, welche korrespondierende a (in doppelter Unendlichkeit) in einem gegebenen Gebüsche haben.

Der Leser deute in ähnlicher Weise die den übrigen Fällen entsprechenden Zahlen.

Um zu diesen Zahlen zu gelangen, wird eine Projektivitäts- 246
bedingung fallen gelassen, so daß nur sieben Bedingungen bleiben, und daher sich ein einfach unendliches System von Paaren von a, b und zugehörigen Doppel-Projektivitäten $\Pi_{e,p}$ ergibt; (kl) sei die Signatur der verbleibenden Projektivitäts-Bedingungen.

In diesem einfach unendlichen System führen wir fünf Zahlen ein:

1) die Zahl μ derjenigen $\Pi_{e,p}$, in denen die Ebenenbüschel-Projektivität Π_e noch zwei weitere entsprechenden Ebenen nach gegebenen Punkten sendet,

2) die Zahl ϱ derjenigen, in denen zwei weitere entsprechende Punkte der Punktreihen-Projektivität Π_p in gegebenen Ebenen liegen,

3) die Zahl ω der $\Pi_{e,p}$ in denen Π_e ausartet,

4) die Zahl θ der $\Pi_{e,p}$, in denen Π_p ausartet,

5) die Zahl $\chi = \chi_a + \chi_b$, worin χ_a, χ_b die Zahl der $\Pi_{e,p}$ ist, in denen a bzw. b eine gegebene Gerade trifft.

Eine ausgeartete Projektivität hat in jedem der beiden Gebilde ein singuläres Element, dem alle Elemente des andern entsprechen (Nr. 66). Daraus folgt, daß, wenn in einer ausgearteten Π_e die singuläre Ebene σ_b des einen Büschels nicht durch einen der gegebenen B_i geht, dann die singuläre Ebene σ_a durch den homologen A_i gehen muß; so daß von zwei homologen A_i, B_i immer einer in einer singulären Ebene liegt. Duales gilt für eine ausartende Π_p.

Und umgekehrt, wenn die beiden singulären Elemente so bestimmt sind, so ist die ausgeartete Projektivität festgelegt.

Die beiden **Charakteristiken** μ, ϱ sind gerade unsere gesuchten Zahlen für acht Bedingungen, und zwar μ für $(k+1, l)$ und ϱ für $(k, l+1)$; so daß eine Zahl, die zu einer Signatur (k, l), in der $k, l > 0$ sind, und gewissen Lagenbedingungen gehört, bei $(k-1, l)$, $(k, l-1)$ und denselben Lagenbedingungen als μ, ν sich ergibt. Daher erhalten wir viele Zahlen doppelt, was eine wertvolle Kontrolle ist.

Zwischen den fünf Zahlen μ, ϱ, ω, θ, χ sollen nunmehr zwei Relationen aufgestellt werden, vermittelst deren μ, ν, also die gesuchten Zahlen, berechnet werden, nachdem die einfacher zu ermittelnden ω, θ, χ direkt bestimmt sind.

Es liege irgend eins der einfach unendlichen Systeme von $\Pi_{\epsilon, \mathfrak{p}}$ vor; $\bar{a}$, $\bar{b}$ seien zwei feste Geraden, auf $\bar{b}$ seien die festen Punkte B', B'' gelegt; auf $\bar{a}$ hingegen werde eine Korrespondenz betrachtet, in der zwei Punkte A', A'' einander zugeordnet sind, nach denen in einer der $\Pi_{\epsilon, \mathfrak{p}}$ Ebenen von a gehen, die in Π_{ϵ} den Ebenen bB', bB'' entsprechen. Wir wissen, die Zahl der $\Pi_{\epsilon, \mathfrak{p}}$, in denen entsprechende Ebenen von Π_{ϵ} nach A', B' oder nach A'', B'' gehen, ist μ; daher entsprechen jedem Punkte A' μ Punkte A'' und jedem A'' μ Punkte A'. Die 2μ Koinzidenzen ergeben sich folgendermaßen. Wenn b die $\bar{b}$ trifft, was χ_b-mal geschieht, so sind bB', bB'' identisch, also auch die ihnen entsprechenden Ebenen und daher auch A' und A''; wenn hingegen b nicht die $\bar{b}$ trifft, so sind bB', bB'' verschieden; liegt daher eine allgemeine Π_{ϵ} vor, in der dann auch die entsprechenden Ebenen von a verschieden sind, so muß, wenn sie $\bar{a}$ in demselben Punkte schneiden, a die $\bar{a}$ treffen, was χ_a-mal geschieht; oder aber Π_{ϵ} artet aus, und jenen beiden Ebenen entspricht die singuläre Ebene und schneidet $\bar{a}$ in demselben Punkte $A' \equiv A''$. Demnach ist:

1) $$2\mu = \omega + \chi_a + \chi_b = \omega + \chi.$$

Und die duale Betrachtung, in welcher zwei Ebenen α', α'' durch $\bar{a}$ einander zugeordnet werden, in denen die Punkte auf a liegen, welche in der $\Pi_{\mathfrak{p}}$ einer $\Pi_{\epsilon, \mathfrak{p}}$ den in den festen Ebenen β', β'' durch $\bar{b}$ gelegenen Punkten von b entsprechen, führt zu:

2) $$2\varrho = \theta + \chi.$$

Wir ermitteln nochmals die uns schon bekannte Gradzahl 2 des Komplexes der a, die einer festen Gerade b für (1, 0) oder (0, 1) korrespondieren, so daß $b_f a_s$ die Lagenbedingung ist. Der Büschel von a_s sei $(A, \alpha.)$ Wir haben daher auf (00) zurückzugehen.

$$(00) \quad \begin{matrix} A_1 A_2 A_3 \, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \\ B_1 B_2 B_3 \, \beta_1 \beta_2 \beta_3 . \end{matrix}$$

b ist fest, kann also nicht $\bar{b}$ treffen, a bewegt sich in (A, α), trifft demnach einmal $\bar{a}$; folglich $\chi_b = 0$, $\chi_a = 1$, $\chi = 1$.

In einer ausgearteten Π_e muß die singuläre Ebene σ_b von b mindestens durch einen der B_i gehen, weil sonst σ_a durch alle drei A_i und durch den Scheitel A gehen müßte; aber weil σ_b durch die feste b geht, kann sie nur durch einen B_i gehen; die σ_a muß dann durch die nicht homologen A_i und A gehen, ist dadurch eindeutig bestimmt, scheidet aus (A, α) eindeutig den a aus; und die $\Pi_{e,p}$ mit ausgearteter Π_e ist vollständig bestimmt, da diese durch die singulären Ebenen festgelegt ist, während Π_p durch die drei Paare entsprechender Elemente bestimmt wird. Wir haben die drei Kombinationen:

$$\sigma_b = bB_1,\ \sigma_a = A_2A_3A;\quad \sigma_b = bB_2,\ \sigma_a = A_1A_3A;\quad \sigma_b = bB_3,\ \sigma_a = A_1A_2A;$$

Daher ist $\omega = 3$, und die duale Betrachtung gibt: $\theta = 3$. Daraus folgt, vermöge der Formeln 1), 2):

$$\mu = \varrho = 2.$$

Bei der Berechnung der ω und θ haben sich die auf die ausgeartete Projektivität bezüglichen Bedingungen auch in Inzidenzen verwandelt, die andere Projektivität aber ist noch allgemein geblieben und würde, wenn nun weiter gegangen wird, die Betrachtung erschweren. Wir lassen daher eine weitere Vereinfachung eintreten und dazu noch eine weitere Projektivitäts-Bedingung fallen, so daß die verbliebenen Projektivitäts-Bedingungen und die Inzidenzen sechs Bedingungen darstellen, also ein doppelt unendliches System von $\Pi_{e,p}$ vorliegt. Dasselbe enthält zwei einfach unendliche Systeme, in denen durchweg Π_e oder durchweg Π_p ausgeartet ist; nennen wir diese Systeme Σ', Σ''. In beiden Systemen befinden sich die $\Pi_{e,p}$ des doppelt unendlichen Systems, in denen Π_e und Π_p ausgeartet sind; ihre Anzahl sei τ. 247

Wir führen in jedem der beiden Systeme nur eine Charakteristik ein, diejenige, die zur nicht ausgearteten Projektivität gehört, ϱ' bei Σ', die angibt, wie oft zwei entsprechende Punkte von Π_p in weitere gegebene Ebenen fallen, und die Zahl μ'' bei Σ''; χ_a', χ_b', χ'; χ_a'' χ_b'', χ'' mögen analoge Bedeutungen haben, wie oben χ_a, χ_b, χ.

Eine ähnliche Betrachtung, wie die, welche oben zu 1) führte, gibt auf Σ'' angewandt:

3) $$2\mu'' = \tau + \chi'',$$

und die duale Betrachtung gibt für Σ':

4) $$2\varrho' = \tau + \chi'.$$

Eine zweite Formel erhält man nicht; denn da z. B. in Σ' alle Π_e ausgeartet sind, so fallen die Punkte A', A'', welche in die $\bar{a}$ durch die Ebenen von a, die den bB', bB'' entsprechen, d. i. beidemal die singuläre Ebene σ_a, eingeschnitten werden, immer zusammen; und es entsteht keine Korrespondenz.

Die Zahlen τ, χ', χ'' werden direkt ermittelt und darauf vermittelst 3) und 4) die ϱ', μ'' berechnet. Es ist dann ϱ' für (kl) die Ausartungszahl ω für $(k, l+1)$ und μ'' für (kl) ist θ für $(k+1, l)$. Demnach erhält man die ω für die Signaturen mit $l = 0$, die θ für diejenigen mit $k = 0$ nicht und muß sie direkt ermitteln.

Für die Ermittelung der χ braucht man bisweilen den Satz, daß es in einer Kongruenz (m, n) stets $m + n$ Geraden gibt, welche zwei gegebene Geraden p, q schneiden. In der Tat, die bloß p schneidenden bilden eine Regelfläche $(m+n)^{\text{ten}}$ Grades, weil p m-fache Leitgerade ist, da von jedem Punkte auf ihr m Erzeugende ausgehen, und in jeder Ebene durch p noch n Erzeugende liegen, so daß der volle Schnitt einer solchen Ebene $(m+n)^{\text{ter}}$ Ordnung ist. Die zweite Gerade q begegnet daher $m+n$ Erzeugenden dieser Regelfläche[1]).

248 Bei $k+l=2$ mit den drei Signaturen (20), (11), (02) hatten wir die Lagenbedingungen: $b_f a_p$, $b_f a_e$, $b_e a_e$. Wir gehen auf (00) zurück und nehmen zunächst $b_f a_p$ vor. Der Punkt von a_p sei $\mathfrak{A}$. Wir ermitteln τ.

b ist fest, also muß σ_b nach einem der B_i, etwa B_1 gehen, S_b (der singuläre Punkt) in einer der β_i liegen, etwa β_1; dann ist σ_a die Ebene $\mathfrak{A}A_2A_3$, S_a muß auf $\alpha_2\alpha_3$ liegen, und a ist der Strahl aus $\mathfrak{A}$ in σ_a, der $\alpha_2\alpha_3$ trifft. Wir erhalten neun Kombinationen, also $\tau = 9$.

Weil b fest ist, so ist $\chi_b' = \chi_b'' = 0$. Da in den $\Pi_{e,p}$ von Σ' die singuläre Ebene σ_b nur bB_1, bB_2 oder bB_3 sein kann, also σ_a nur $\mathfrak{A}A_2A_3$, $\mathfrak{A}A_1A_3$, $\mathfrak{A}A_1A_2$, so muß a einem der drei Büschel $(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}A_2A_3), \ldots$ angehören, und jeder enthält eine $\bar{a}$ treffende Gerade; daher $\chi_a' = 3$. In den $\Pi_{e,p}$ von Σ'' ist singulärer Punkt S_b $b\beta_1$, $b\beta_2$ oder $b\beta_3$, also muß S_a auf $\alpha_2\alpha_3$, $\alpha_3\alpha_1$, $\alpha_1\alpha_2$ liegen; und es gibt aus $\mathfrak{A}$ je einen Strahl der $\bar{a}$ und eine dieser Geraden trifft; folglich $\chi_a'' = 3$. Demnach $\chi' = \chi'' = 3$. Folglich, wegen 3) und 4): $\mu'' = \varrho' = 6$.

Also haben wir: $\omega = 6$ bei (10), $\theta = 6$ bei (01).

Es fehlt noch ω für (10), θ für (01).

Wenn bei (10) σ_b durch b und B_1 ginge, so müßte σ_a durch A_2, A_3, A_4 und $\mathfrak{A}$ gehen, also $\omega = 0$. Wenn bei (01) S_b auf b und β_1 liegt, so muß S_a auf α_2, α_3, α_4 liegen; also ist a die Gerade von $\mathfrak{A}$ nach $\alpha_2\alpha_3\alpha_4$; daher ist $\theta = 4$.

Wegen der festen b ist $\chi_b = 0$ in beiden Signaturen.

Dem b korrespondiert in bezug auf (10) und (01) ein tetraedraler Komplex, von dessen Kegel aus $\mathfrak{A}$ zwei Geraden die $\bar{a}$ treffen, daher

1) Dieser Beweis ist insofern weniger gut, als er sich auf das Prinzip der speziellen Lage stützt; in speziellen Fällen (z. B. Nr. 257) wird man wohl einen bessern geben können, indem gezeigt wird, daß eine beliebige Gerade von $m+n$ Erzeugenden geschnitten wird. Für den allgemeinen Fall ist mir keiner bekannt, und ich sehe auch nicht recht, wie ein solcher möglich ist; es hat [illegible]hl auch noch niemand an der Richtigkeit des Ergebnisses gezweifelt. Vgl. [illegible]iv der Math. und Phys., 3. Reihe, Bd. 12, S. 116.

ist $\chi_a = 2$. Demnach haben wir folgende Tabelle, in deren letzten Kolonnen die vermittelst 1), 2) berechneten μ, ϱ stehen:

$b_f a_p$

	ω	θ	χ_b	χ_a	χ	μ	ϱ
(10)	0	6	0	2	2	1	4
(01)	6	4	0	2	2	4	3;

daher ist die gesuchte Zahl für (20), (11), (01) bzw. 1, 4, 3, wobei die 4 sich doppelt ergeben hat, als ϱ bei (10), als μ bei (01).

Die Ordnung der Kongruenz, welche der festen Gerade b in bezug auf (20), (11), (02) korrespondiert, ist 1, 4, 3. Die Ordnungen 1, 3 sind uns schon bekannt.

Es ist ersichtlich, daß was bei $b_f a_p$ für (20), (11), (02) gilt, bei $b_f a_e$ für (02), (11), (20) gilt.

Folglich sind die Klassen der eben genannten Kongruenzen 3, 4, 1.

Neu ist, daß in bezug auf (11) einer Gerade eine Kongruenz (4, 4) korrespondiert.

Wir wollen nun wissen, welchen Komplex diese Kongruenz beschreibt, wenn b durch einen Strahlenbüschel sich bewegt; die Lagenbedingung ist $b_s a_s$. Die beiden Strahlenbüschel dieser Bedingung seien (B, β), (A, α). Wir berechnen wiederum zuerst τ für (00).

Es gehe σ_b durch B_1, B_2 und B, wodurch sie und b in (B, β) bestimmt sind; σ_a geht durch A_3 und A. S_b sei $b\beta_1$, dann liegt S_a auf $\alpha_2\alpha_3$, und a ist bestimmt als Strahl von (A, α), welcher $\alpha_2\alpha_3$ trifft; σ_a ist (a, A_3). Dies führt zu neun Kombinationen, und da hier auch σ_a durch zwei Punkte A_i gehen kann, so haben wir: $\tau = 18$.

Es gibt einen Strahl in (B, β), welcher $\bar{b}$ trifft; es gehe σ_b von ihm nach B_1, σ_a ist A_2A_3A und schneidet in (A, α) den a ein; also ist $\chi_b' = 3$, ebenso $\chi_b'' = 3$ und weil Gleichartigkeit der Räume herrscht, auch $\chi_a' = \chi_a'' = 3$. Also $\mu'' = \varrho' = 12$. Demnach ist $\omega = 12$ für (01) und $\theta = 12$ für (10).

Bei (10) gibt es in (B, β) sechs Strahlen b, welche eine Verbindungslinie zweier B_i treffen, der zugehörige a in (A, α) trifft die Verbindungslinie der nicht homologen A_i; also ist $\omega = 6$; und ebenso $\theta = 6$ bei (01).

Ferner $\chi_a = \chi_b = 2$; denn z. B. in (B, β) gibt es einen $\bar{b}$ treffenden Strahl, dem dann in bezug auf (10) oder (01) ein tetraedraler Komplex korrespondiert, von dem zwei Strahlen in (A, α) fallen. Daher:

$b_s a_s$

	ω	θ	χ_b	χ_a	χ	μ	ϱ
(10)	6	12	2	2	4	5	8
(01)	12	6	2	2	4	8	5

Bei (20), (11), (02) erzeugt, wenn ein Strahl einen Büschel durchläuft, die korrespondierende Kongruenz (1, 3), (4, 4), (3, 1) einen Komplex vom Grade 5, 8, 5.

Der Grad 5 des ersten Komplexes ist der Grad 5 der eindeutigen Verwandtschaft bei zwei fünfpunktigen Gruppen in zwei Ebenen (Nr. 229); wir projizieren aus den Punkten A und B auf diese.

249 Wir gehen zu $k + l = 3$ über, wo es sich um $b_f a_g$, $b_s a_p$, $b_s a_e$ handelt. Bei $b_f a_g$ sei $\mathfrak{a}$ die Gerade der Bedingung a_g:

$b_f a_g$

	τ	χ_b'	χ_a'	χ_b''	χ_a''	ϱ'	μ''
(10)	12	0	4	0	12	8	12
(01)	12	0	12	0	4	12	8;

χ_a' ist, nach dem obigen Satze über die Anzahl der zwei Geraden — hier $\bar{\mathfrak{a}}$ und $\mathfrak{a}$ — treffenden Strahlen einer Kongruenz, die Summe der Zahlen ω bei $b_f a_p$ und bei $b_f a_e$; da wir (in Nr. 248) die Tabelle für $b_f a_e$ nicht hingeschrieben haben, so ersetzen wir das letztere dieser ω durch das ebenso große θ für $b_f a_p$ bei der andern (dualen) Signatur. Also ist $\chi_a' = 0 + 4$ bei (10), $6 + 6$ bei (01). Ähnlich ist χ_a'' gleich der Summe von θ bei der Signatur selbst und von ω bei der andern, beidemal für $b_f a_p$. Daher:

$b_f a_g$

	ω	θ	χ_b	χ_a	μ	ϱ
(20)	0*	12	0	4	2	8
(11)	8	8	0	8	8	8
(02)	12	0*	0	4	8	2.

Die gesternten ω, θ sind direkt ermittelt, die andern ergeben sich aus ϱ', μ'' der obigen Tabelle; χ_a ist Summe der Ordnung und Klasse 1, 3; 4, 4; 3, 1 der Kongruenzen, welche dem festen b in bezug auf diese Signaturen korrespondieren.

Folglich korrespondiert, in bezug auf (30), (21), (12), (03), einer festen Gerade eine Regelfläche vom Grade 2, 8, 8, 2.

Zweitens, in $b_s a_p$ sei (B, β) der Büschel von b_s, $\mathfrak{A}$ der Punkt von a_p.

$b_s a_p$

	τ	χ_b'	χ_a'	χ_b''	χ_a''	ϱ'	μ''
(10)	18	0	6	6	12	12	18
(01)	30	6	12	4	6	24	20;

χ_b', χ_b'' sind ω, θ bei $b_f a_p$, χ_a', χ_a'' sind ω, θ bei $b_s a_s$ (in Nr. 248);

denn die Inzidenz mit $\bar{b}$ macht b fest, die mit $\bar{a}$ verweist a in einen Büschel.

		$b_s a_p$				
	ω	θ	χ_b	χ_a	μ	ϱ
(20)	0*	18	1	5	3	12
(11)	12	20	4	8	12	16
(02)	24	10*	3	5	16	9;

hierin sind χ_b, χ_a die Ordnung der Kongruenz, die der fest gewordenen b korrespondiert, der Grad des Komplexes, der einem Büschel von a entspricht.

Was für $b_s a_p$ und (30), (21), (12), (03) gilt, gilt für $b_s a_e$ und (03), (12), (21), (30).

Daher entspricht, in bezug auf (30), (21), (12), (03), einem Strahlenbüschel eine Kongruenz (3, 9), (12, 16), (16, 12), (9, 3). Daraus folgt, daß, wenn in dem einen Raum der Strahl einen Bündel oder ein Feld durchläuft, durch die jeweilige korrespondierende Regelfläche ein Komplex vom Grade 3, 12, 16, 9, bzw. 9, 16, 12, 3 entsteht.

Der reichhaltigste Fall ist der nächste: $k + l = 4$, wo die Inzidenzbedingungen sind: b_f, $b_s a_g$, $b_p a_p$, $b_p a_e$. 250

1)

			b_f				
	τ	χ_b'	χ_a'	χ_b''	χ_a''	ϱ'	μ''
(20)	0	0	0	0	12	0	6
(11)	0	0	8	0	8	4	4
(02)	0	0	12	0	0	6	0;

hier sind χ_a', χ_a'' die ω, θ bei $b_f a_g$; daß die τ null sind, ist leicht zu ersehen.

		b_f				
	ω	θ	χ_b	χ_a	μ	ϱ
(30)	0*	6	0	2	1	4
(21)	0	4	0	8	4	6
(12)	4	0	0	8	6	4
(03)	6	0*	0	2	4	1;

χ_a ist der Grad der Regelfläche, die einer festen Gerade korrespondiert.

In bezug auf (40), (31), (22), (13), (04) korrespondieren einer Gerade des einen Raums 1, 4, 6, 4, 1 Geraden im andern. Die eindeutige Verwandtschaft bei (40) und (04) haben wir schon gefunden.

2) Bei $b_s a_g$ haben wir den Büschel (B, β) und die Gerade $\mathfrak{a}$.

$b_s a_g$

	τ	χ_b'	χ_a'	χ_b''	χ_a''	ϱ'	μ''
(20)	30	0	10	12	42	20	42
(11)	48	8	32	8	32	44	44
(02)	30	12	42	0	10	42	20;

χ_b', χ_b'' sind ω, θ für $b_f a_g$; χ_a' (wo wieder $\bar{a}$ und $\mathfrak{a}$ zu treffen sind) ist die Summe von ω für die Signatur selbst und von θ für die duale, beidemal bei $b_s a_p$ und χ_a'' die von θ für die Signatur selbst und ω für die duale, wieder bei $b_s a_p$.

$b_s a_g$

	ω	θ	χ_b	χ_a	μ	ϱ
(30)	0*	42	2	12	7	28
(21)	20	44	8	28	28	40
(12)	44	20	8	28	40	28
(03)	42	0*	2	12	28	7;

χ_b ist der Grad der Regelfläche, die einer Gerade b korrespondiert; χ_a ist Summe der Ordnung und Klasse der Kongruenz, welche einem Strahlenbüschel entspricht.

Demnach erzeugen die Geraden, die den Strahlen eines Büschels korrespondieren, bei (40), (31), (22), (13), (04) eine Regelfläche vom Grade 7, 28, 40, 28, 7; dies ist zugleich der Grad des Komplexes, der einem Strahlengebüsche korrespondiert.

3)

$b_p a_p$

	τ	χ_b'	χ_a'	χ_b''	χ_a''	ϱ'	μ''
(20)	0	0	0	6	6	0	18
(11)	36	12	12	18	18	30	38
(02)	60	24	24	20	20	54	40;

die χ_b', χ_a' sind die ω, die χ_b'', χ_a'' die θ bei $b_s a_p$ (oder $a_s b_p$); denn z. B. $\bar{b}$ scheidet aus dem Bündel $\mathfrak{B}$ (von b_p) einen Büschel aus.

	ω	θ	χ_b	χ_a	μ	ϱ
(30)	0*	18	3	3	3	12
(21)	0	38	12	12	12	31
(12)	30	40	16	16	31	36
(03)	54	20*	9	9	36	19;

darin ist $\chi_b = \chi_a$ die Ordnung der Kongruenz, welche einem Strahlenbüschel korrespondiert.

4) $b_p a_s$

	τ	χ_b'	χ_a'	χ_b''	χ_a''	ϱ'	μ''
(20)	30	10	0	24	18	20	36
(11)	52	20	12	12	20	42	42
(02)	30	18	24	0	10	36	20;

χ_b', χ_b'' sind ω, θ bei $b_s a_s$, oder θ, ω bei $b_s a_p$ und der dualen Signatur; χ_a', χ_a'' sind ω, θ bei $b_p a_s$ (oder $b_s a_p$).

	ω	θ	χ_b	χ_a	μ	ϱ
(30)	0*	36	9	3	6	24
(21)	20	42	16	12	24	35
(12)	42	20	12	16	35	24
(03)	36	0*	3	9	24	6;

χ_b ist die Klasse, χ_a die Ordnung der Kongruenz, welche einem Strahlenbüschel entspricht.

Aus $b_p a_p$ ergibt sich durch Dualität $b_e a_e$ und aus $b_p a_e$ durch Vertauschung der Räume $b_e a_p$.

Durchläuft also der Strahl in dem einen Raume einen Bündel oder ein Feld, so beschreiben die in bezug auf (40), (31), (22), (13), (04) korrespondierenden Strahlen Kongruenzen (3, 6), (12, 24), (31, 35), (36, 24), (19, 6) bzw. (6, 19), (24, 36), (35, 31), (24, 12), (6, 3).

Die weiteren Probleme sollen etwas kürzer dargestellt werden. 251
Bei $k + l = 5$ liegen die Inzidenzen b_s und $b_p a_g$ vor, woraus durch Dualität $b_e a_g$ folgt. Die Werte von τ sind:

		(30)	(21)	(12)	(03)
τ	b_s	0	0	0	0
	$b_p a_g$	0	60	100	60.

Ferner, die χ_b', χ_b'' für b_s sind die ω, θ für b_f, die χ_a', χ_a'' für b_s und die χ_b', χ_b'' für $b_p a_g$ sind die ω, θ für $b_s a_g$, die χ_a', χ_a'' für $b_p a_g$ sind die Summe der ω, bzw. der θ für $b_p a_p$ und $b_p a_e$.

		(40)	(31)	(22)	(13)	(04)
b_s	ω	0*	0	10	24	24
	θ	24	24	10	0	0*
$b_p a_g$	ω	0*	0	50	108	96
	θ	48	92	90	40	0*;

χ_b ist bei b_s die Zahl der einem Strahle entsprechenden Strahlen, χ_a bei b_s, χ_b bei $b_p a_g$ der Grad der Regelfläche, die einem Büschel kor-

respondiert, χ_a bei $b_p a_g$ Summe von Ordnung und Klasse der Kongruenz, die einem Bündel entspricht.

Die Werte von μ, ϱ liefern dann folgende Sätze:

Liegen die Signaturen (50), (41), (32), (23), (14), (05) vor, so gibt es in jedem der beiden Räume einen Komplex vom Grade 4, 16, 28, 28, 16, 4, dessen Geraden korrespondierende im andern Raume haben; denjenigen Geraden dieses Komplexes, welche eine Gerade treffen, und daher eine Kongruenz (4, 4), ..., bilden, entsprechen Geraden, die eine Kongruenz (8, 16), (32, 64), (78, 98), (98, 78), (64, 32), (16, 8) erzeugen, und einem Kegel oder einer Kurve jenes Komplexes entspricht eine Regelfläche vom Grade 8, 32, 78, 98, 64, 16, bzw. 16, 64, 98, 78, 32, 8.

Bei $k + l = 6$ haben wir b_p, wozu b_e dual ist, und $b_g a_g$.

		(40)	(31)	(22)	(13)	(04)
τ	b_p	0	0	0	0	0
	$b_g a_g$	0	120	200	120	0;

χ_b', χ_b'' bei b_p sind die ω, θ bei b_e, χ_a', χ_a'' diejenigen bei $b_p a_g$; hingegen bei $b_g a_g$ ist $\chi_a' = \chi_b'$ die Summe von ω für die betreffende Signatur und von θ für die duale bei $b_p a_g$, $\chi_a'' = \chi_b''$ umgekehrt.

Demnach:

		(50)	(41)	(32)	(23)	(14)	(05)
b_p	ω	0*	0	0	30	66	60
	θ	36	58	50	20	0	0*
$b_g a_g$	ω	0*	0	100	240	260	144
	θ	144	260	240	100	0	0*;

χ_b, χ_a bei b_p sind der Grad des obigen Komplexes und Ordnung der ebenfalls dort genannten Kongruenz, bei $b_g a_g$ ist $\chi_b = \chi_a$ die Summe der Ordnung und der Klasse dieser Kongruenz.

Wir dualisieren für b_e und erhalten: Liegen die Signaturen (60), (51), (42), (33), (24), (15), (06) vor, so besteht in jedem der beiden Räume eine Kongruenz (6, 10), (24, 40), (53, 73), (78, 78), (73, 53), (40, 24), (10, 6) von Geraden, welche noch korrespondierende haben; und der Regelfläche vom Grade 6 + 10, 24 + 40, ... der Geraden dieser Kongruenz, welche eine gegebene Gerade treffen, entspricht eine Regelfläche vom Grade 24, 96, 226, 296, 226, 96, 24.

Bei $k + l = 7$ haben wir nur die Lagenbedingung b_g.

Für alle Signaturen (50), ... ist $\tau = 0$; ferner χ_a', χ_a'' sind ω, θ bei $b_g a_g$, χ_b' ist die Summe von ω für die Signatur selbst und von θ für die duale bei b_p, χ_b'' umgekehrt.

Daraus folgt:

		(60)	(51)	(42)	(33)	(24)	(15)	(06)
b_g	ω	0*	0	0	60	160	192	120
	θ	120	192	160	60	0	0	0*;

χ_b ist Summe von Ordnung und Klasse der im vorangehenden Falle erhaltenen Kongruenz, χ_a Grad der dort erhaltenen Regelfläche.

Demnach besteht, wenn die Signaturen (70), (61), (52), (43), (34), (25), (16), (07) vorliegen, in jedem der beiden Räume eine Regelfläche vom Grade 20, 80, 176, 256, 256, 176, 80, 20 von Geraden, die korrespondierende haben.

Endlich, bei $k + l = 8$ ist keine Lagenbedingung vorhanden.

Für die Signaturen (60), ... ist durchweg $\tau = 0$; $\chi_a' = \chi_b'$ und $\chi_a'' = \chi_b''$ sind die eben notierten ω, θ. Es ergibt sich:

	(70)	(61)	(52)	(43)	(34)	(25)	(16)	(07)
ω	0*	0	0	0	60	160	192	120
θ	120	192	160	60	0	0	0	0*.

$\chi_a = \chi_b$ ist der Regelflächen-Grad des vorigen Falls. Und so erhält man als letztes Ergebnis:

In bezug auf (80), (71), (62), (53), (44), (35), (26), (17), (08) gibt es 20, 80, 176, 256, 286, 256, 176, 80, 20 Paare korrespondierender Geraden a, b.

Es möge noch ein Beispiel der Berechnung von τ mitgeteilt werden. Wir wählen:

$$(11)\quad \begin{matrix} A_1 A_2 A_3 A_4 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \\ B_1 B_2 B_3 B_4 \beta_1 \beta_2 \beta_3 \beta_4 \end{matrix}$$

mit $b_p a_e$. Es sei aus dem Punkte $\mathfrak{B}$ von b_p die Gerade b gezogen, welche $B_1 B_2$ und $\beta_1 \beta_2$ trifft, so daß $(b, B_1 B_2)$ die singuläre Ebene σ_b und $(b, \beta_1 \beta_2)$ der singuläre Punkt S_b ist. Es muß dann σ_a durch $A_3 A_4$ gehen, S_a auf $\alpha_3 \alpha_4$ liegen; a muß in der Ebene α von a_e und in σ_a liegen und durch S_a gehen; wodurch a, σ_a und S_a eindeutig bestimmt sind. Dies gibt 36 Kombinationen.

Zweitens gehe b von $\mathfrak{B}$ nach dem Punkte $\beta_1 \beta_2 \beta_3$, der dadurch S_b wird, und σ_b von b nach B_1, also muß σ_a durch A_2, A_3, A_4 gehen; ihr Schnitt mit α ist a und deren Schnitt mit α_4 ist S_a. Dies gibt 16 Kombinationen; man erhält: $\tau = 36 + 16 = 52$.

In bezug auf (10) und (20) fanden wir in Nr. 240 und 242 252
einen Komplex 4. Grades, eine Kongruenz (7, 11) von Koinzidenzgeraden c, in welchen korrespondierende Geraden a und b sich vereinigen. Auch diese Untersuchung läßt sich für alle Signaturen von

$k+l=1$ bis $k+l=4$ mit Hilfe der jetzigen Methode durchführen. Eine Koinzidenzgerade c kann nur vier Bedingungen unterworfen werden, also neben der Projektivitätsbedingung in den drei ersten Fällen noch den Lagenbedingungen c_s; c_p, c_e; c_g. Wir stellen wiederum, unter Aufgabe einer Projektivitätsbedingung, einfach unendliche Systeme von Projektivitäten $\Pi_{e,p}$ zwischen zwei Ebenenbüscheln um c und zwei Punktreihen auf c her und begnügen uns mit einem Schritte rückwärts. Die Bedeutung von μ, ϱ, ω, θ sei dieselbe wie oben; $\bar{a}$ und $\bar{b}$ seien wie dort gegeben, $\chi_a = \chi_b = \chi$[1]) sei die Zahl der Fälle, daß c eine Gerade treffe: $\bar{a}$ oder $\bar{b}$. Wir haben dann:

$$1)\quad 2\mu = \omega + 2\chi, \qquad 2)\quad 2\varrho = \theta + 2\chi.$$

$$(00)\quad \begin{matrix} A_1 A_2 A_3 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \\ B_1 B_2 B_3 \beta_1 \beta_2 \beta_3 \end{matrix};$$

der Büschel von c_s sei (C, γ); $\chi = 1$. Es sei c der Strahl von (C, γ), welcher $B_1 B_2$ trifft, so ist $\sigma_b = (c, B_1 B_2)$, $\sigma_a = c A_3$; es gibt sechs Kombinationen, also $\omega = 6$, ebenso $\theta = 6$; daher $\mu = \varrho = 4$. In bezug auf (10) und (01) erzeugen die Koinzidenzgeraden c einen Komplex 4. Grades, wie wir schon wissen.

Es liege

$$(10)\quad \begin{matrix} A_1 A_2 A_3 A_4 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \\ B_1 B_2 B_3 B_4 \beta_1 \beta_2 \beta_3 \end{matrix}$$

vor und zunächst c_p; der zugehörige Punkt sei $\mathfrak{C}$; $\chi = 4$, weil vier Strahlen des Komplexes durch $\mathfrak{C}$ gehen und eine Gerade treffen. Der Strahl c aus $\mathfrak{C}$, welcher $A_1 A_2$ und $B_3 B_4$ trifft, liefert die singulären Ebenen $\sigma_a = (c, A_1 A_2)$, $\sigma_b = (c, B_3 B_4)$; wir erhalten: $\omega = 6$. In dem Büschel von $\mathfrak{C}$ nach $\alpha_1 \alpha_2$ befinden sich vier Strahlen c jenes Komplexes; auf jedem ist $(c, \alpha_1 \alpha_2)$ der singuläre Punkt S_a und $c\beta_3$ der S_b. Da wir sechs solche Büschel haben, ist $\theta = 4 \cdot 6 = 24$; demnach $\mu = 7$, $\varrho = 16$. Und bei (0, 1) ist $\omega = 24$, was sich ähnlich wie eben $\theta = 24$ ergibt, aber $\theta = 14$; denn wir haben sechs Strahlen von der Art $(\mathfrak{C}, \alpha_1 \alpha_2, \beta_3 \beta_4)$ und acht von der Art $(\mathfrak{C}, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)$. Daher ist jetzt $\mu = 16$, $\varrho = 11$. Da der Fall c_e dual ist, also $\mu = 11$, $\varrho = 16$ bei (1, 0) und $\mu = 16$, $\varrho = 7$ bei (0, 1), so ergibt sich:

In bezug auf (20), (11), (02) bilden die Koinzidenzgeraden c eine Kongruenz (7, 11), (16, 16), (11, 7).

Nun sei

$$(20)\quad \begin{matrix} A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \\ B_1 B_2 B_3 B_4 B_5 \beta_1 \beta_2 \beta_3 \end{matrix}$$

gegeben, dazu c_g, die Gerade dieser Bedingung sei $\mathfrak{c}$. Dann haben

1) Also mit etwas anderer Bedeutung von χ.

wir Geraden c aufzusuchen von der Art $(A_1 A_2 A_3,\ B_4 B_5,\ \mathfrak{c})$; deren gibt es $2 \cdot 10$; also ist $\omega = 20$. Ferner gibt es in der eben erhaltenen Kongruenz (7, 11) $7 + 11$ Geraden, welche $\alpha_1 \alpha_2$ und $\mathfrak{c}$ treffen; daraus folgt: $\theta = 6(7 + 11) = 108$. Und χ ist auch $7 + 11$. Also ist $\mu = 28$, $\varrho = 72$. Folglich bei (02): $\mu = 72$, $\varrho = 28$[1]).

Das Ergebnis ist: Bei (30), (21), (12), (03) bilden die Koinzidenzgeraden c eine Regelfläche vom Grade 28, 72, 72, 28. Auf der Regelfläche 28. Grades liegen die zwölf Punkte A_i, B_i siebenfach.

Endlich bei (30) ist $\chi = 28$, $\omega = 20$, weil es so viele Schnittlinien von der Art $(A_1 A_2 A_3,\ B_4 B_5 B_6)$ gibt; $\theta = 6 \cdot 28 = 168$, weil die sechs Geraden $\alpha_1 \alpha_2, \ldots \beta_1 \beta_2, \ldots$ je von 28 Geraden der Regelfläche 28. Grades getroffen werden; daher $\mu = 38$, $\varrho = 112$.

Bei (21) ist $\chi = 72$, $\omega = 2 \cdot 10 \cdot 4 = 80$, weil der zu (01) gehörige Komplex 4. Grades von Strahlen c in jeden der $2 \cdot 10$ Strahlenbüschel wie den in der Ebene $A_1 A_2 A_3$ um den Spurpunkt von $B_4 B_5$, vier Strahlen sendet; endlich $\theta = 6 \cdot 18 + 8 \cdot 7 = 164$, weil es erstens in der Kongruenz (7, 11) von Strahlen c, die zu (20) gehört, immer $7 + 11$ Strahlen gibt, welche zwei Geraden wie $\alpha_1 \alpha_2$, $\beta_3 \beta_4$ treffen, und zweitens aus jedem der acht Punkte von der Art $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$ sieben Strahlen an jene Kongruenz gehen. Daraus folgt: $\mu = 112$, $\varrho = 154$. Nun wissen wir auch über (12) und (03) Bescheid und haben:

Bei (40), (31), (22), (13), (04) gibt es 38, 112, 154, 112, 38 Koinzidenzgeraden c.

Daraus können wir für (30) und (40) die uns noch fehlenden 253
Involutionssätze ableiten; wir fanden (Nr. 240 und Nr. 242) bei drei, vier Punktepaaren einen Komplex 3. Grades, eine Kongruenz (3, 7) von Strahlen, welche nach ihnen Ebenenpaare in Involution senden.

Nunmehr lassen wir bei (30) A_6, B_6 mit B_5, A_5 identisch sein, dann zerspaltet sich die oben gefundene Regelfläche vom Grade 28 in die (selbst noch weiter zerfallende) Regelfläche vom Grade $7 + 11$ der die $A_5 B_5$ treffenden Geraden aus der Kongruenz (7, 11) für $A_1, \ldots A_5$, $B_1, \ldots B_5$ und eine Regelfläche 10. Grades, welche wiederum Involutionen liefert. Also:

Bei fünf Punktepaaren $A_1 B_1, \ldots A_5 B_5$ gibt es eine Regelfläche 10. Grades, deren Erzeugenden Ebenenpaare in Involution nach ihnen senden.

Wenn bei (40) A_7, B_7 mit B_6, A_6 identisch sind, so gehören zu den 38 Geraden c auch die 28 die $A_6 B_6$ treffenden Erzeugenden

---

1) Das genügt, wenn auf die Kontrolle verzichtet wird; bei (11) ist $\chi = 16 + 16 = 32$, $\omega = \theta = 6 \cdot 2 \cdot 4 + 8 \cdot 4 = 80$; $\mu = \varrho = 72$.

der Regelfläche 28. Grades für $A_1 \ldots A_6$, $B_1 \ldots B_6$; die 10 übrigen lehren:

Es gibt 10 Geraden, welche nach sechs gegebenen Punktepaaren Ebenenpaare in Involution senden.

Aber diese Involutionssätze ergeben sich wesentlich einfacher durch folgende Überlegung.

In jedem einfach unendlichen System von Involutionen von Ebenenpaaren, die nach gegebenen Punktepaaren gehen, sei wiederum μ die Anzahl derjenigen, bei denen noch nach einem weiteren gegebenen Punktepaare gepaarte Ebenen gehen, ω die Anzahl der ausgearteten (parabolischen) Involutionen und χ die Anzahl der Axen, welche eine gegebene Gerade treffen, so ergibt sich, indem ähnlich mit zwei Geraden $\bar{a}$, $\bar{b}$ gearbeitet wird, die Relation:

$$2\mu = \omega + 2\chi.$$

Es seien zwei Punktepaare gegeben; wir lassen eine Gerade durch einen Büschel laufen, jedesmal ergibt sich eine Involution. Ersichtlich ist $\chi = 1$; ferner $\omega = 4$, da vier Strahlen des Büschels Verbindungslinien von Punkten aus verschiedenen Paaren treffen; also ist $\mu = 3$, und wir haben den Komplex 3. Grades für drei Paare.

Lassen wir nun eine Gerade einen Kegel desselben durchlaufen, so ist $\chi = 3$, aber $\omega = 0$, weil keine Kante des Kegels in einer der acht Ebenen durch drei Punkte aus verschiedenen Paaren liegt; also ist $\mu = 3$. Durchläuft hingegen die Gerade eine Komplexkurve, so ist wiederum $\chi = 3$, diesmal aber $\omega = 8$, denn die Schnittlinien der Ebene der Kurve mit jenen acht Ebenen liefern parabolische Involutionen und berühren daher die Komplexkurve; folglich ist $\mu = 7$; wir haben die Kongruenz (3, 7) bei vier Punktepaaren.

Diejenigen Geraden dieser Kongruenz, welche eine Gerade $\mathfrak{c}$ treffen, erzeugen eine Regelfläche 10. Grades; also ist $\chi = 10$, und wiederum $\omega = 0$; daher $\mu = 10$; wir haben die Regelfläche 10. Grades bei fünf Punktepaaren. Und bei dem System, zu dem ihre Erzeugenden führen, ist auch $\chi = 10$, $\omega = 0$, $\mu = 10$; damit sind die 10 Geraden bei sechs Punktepaaren erhalten.

Wenn eine Gerade durch einen Punkt eines von den gegebenen Paaren geht, so wird die Bedingung für dieses Paar, wegen der Unbestimmtheit der einen Ebene, von selbst erfüllt. Daraus folgt:

Der Komplex 3. Grades enthält die ganzen Bündel um die sechs Punkte der drei Paare, und zwar einfach.

An die Kongruenz (3, 7) kommt von jedem der acht Punkte ein Kegel 3. Ordnung, derjenige nämlich, der zum Komplex 3. Grades gehört, welcher sich bei den drei andern Paaren ergibt.

Auf der Regelfläche 10. Grades sind die 10 Punkte dreifach.

§ 37. Sätze über projektive Strahlenbüschel im Raume.

Zwei windschiefe Geraden u, v liefern ∞^2 Strahlen, welche 254
beide treffen: wir nannten in Nr. 238 den Inbegriff derselben ein Strahlennetz und u, v die Leitgeraden desselben. Von einem beliebigen Punkte kommt ein Strahl dieses Netzes, von jedem Punkte aber auf u oder v ein Strahlenbüschel; ebenso liegt in einer beliebigen Ebene eine Gerade des Netzes, in jeder Ebene aber durch u oder v ebenfalls ein Strahlenbüschel. Die Kongruenz dieser ∞^2 Strahlen hat daher die Ordnung und Klasse 1 und heißt deshalb auch lineare Kongruenz. Sie ist in sich dual, wir bezeichnen sie durch $[uv]$, analog wie das Gebüsche der Strahlen, welche u treffen, durch $[u]$ und die Regelschar der Geraden, welche u, v, w treffen, durch $[uvw]$. In dem Netze $[uv]$ schneiden sich die beiden Gebüsche $[u]$, $[v]$ und eine dritte Gerade w scheidet aus ihm die Regelschar $[uvw]$ aus.

Wenn nun zwei Strahlenbüschel (A, α), (B, β) beliebig im Raume liegen und projektiv aufeinander bezogen sind, so liefern je zwei entsprechende Strahlen a, b als Leitgeraden ein Strahlennetz $[ab]$, und diese ∞^1 Strahlennetze erzeugen einen Komplex. Die Strahlen desselben, die von einem Punkte O ausgehen, sind die Schnittlinien entsprechender Ebenen der beiden projektiven Ebenenbüschel, durch welche die gegebenen projektiven Strahlenbüschel aus O projiziert werden; also entsteht ein Kegel 2. Grades, und ähnlich ergibt sich eine Kurve 2. Grades durch die Strahlen des Komplexes in einer Ebene. Der Komplex ist 2. Grades.

Wir erkennen ihn aber sofort als einen tetraedralen Komplex. In der Tat, die beiden Büschel erzeugen auf der Schnittlinie $\alpha\beta$ ihrer Ebenen zwei konjektive Punktreihen; seien C, D deren Koinzidenzpunkte und X, X' die durch beliebige entsprechende Strahlen eingeschnittenen Punkte, so ist $(XX'CD)$ konstant (Nr. 71); sei x irgend ein Strahl des Komplexes, der diese beiden Strahlen trifft, dann ist ersichtlich $x\,(X, X', C, D) \equiv X\,(A, B, C, D)$; so zeigt sich, daß dieses Doppelverhältnis konstant ist; das Tetraeder ist $ABCD$ und hat eventuell zwei imaginäre Ecken C, D. Die Ebenen α, β sind zwei Seitenflächen ACD, BCD des Tetraeders.

Das Erzeugnis zweier projektiver Strahlenbüschel (A, α), (B, β) im Raume, d. h. der Inbegriff aller Strahlennetze, welche zwei entsprechende Geraden derselben zu Leitgeraden haben, ist ein tetraedraler Komplex, von dessen Tetraeder die Scheitel A, B der Büschel zwei Ecken und die Ebenen β, α die Gegenebenen sind[1]).

---

1) Diese einfache Erzeugung des tetraedalen Komplexes hat wohl Hirst gefunden: On the complexes generated by two correlative planes, in den Collectanea mathematica zu Ehren Chelinis (1881).

Diese Erzeugung haben wir schon in Nr. 238 gefunden; denn die dortigen Strahlen a', a'' durchlaufen die Büschel (A_1, α_2), (A_2, α_1) projektiv.

255 Wenn aber die beiden Büschel (A, α), (B, β) einen Strahl c gemeinsam haben und dieser Strahl sich selbst entspricht, so löst sich offenbar vom Erzeugnisse das Strahlengebüsche $[c]$ ab, und es bleibt, als eigentliches Erzeugnis, ein Komplex ebenfalls 1. Grades, aber allgemeiner als dieser spezielle $[c]$. Der Strahl c, in allen erzeugenden Strahlennetzen befindlich, gehört zum Komplexe.

Wir werden später erkennen, daß jeder lineare Komplex so erzeugt werden kann (Sylvester's Erzeugung)[1]. Hier wollen wir zeigen, wie er aus fünf Strahlen, die zu ihm gehören sollen, konstruiert werden kann. Dazu beweisen wir folgenden Hilfssatz (vgl. Anm. zu Nr. 237):

Wenn eine Gerade g die Seiten BC, CA, AB eines Dreiecks in A_1, B_1, C_1 schneidet und G auf ihr liegt, so ist:

$$A_1 B_1 C_1 G \barwedge G(A, B, C, g).$$

Wir projizieren die Punktreihe auf g aus C auf AB und zwar G nach C_2, so ist:

$$A_1 B_1 C_1 G \barwedge BAC_1 C_2 \barwedge ABC_2 C_1 \barwedge G(A, B, C, g).$$

Nun seien g, g_1, g_2, g_3, g_4 die fünf gegebenen Strahlen; wir legen durch g zwei Ebenen α, β, welche g_1, g_2, g_3, g_4 in A_1, A_2, A_3, A_4; B_1, B_2, B_3, B_4 schneiden; A_{ik} sei der Schnitt von $A_i A_k$, B_{ik} der von $B_i B_k$ mit g. Auf dieser Gerade seien zwei Projektivitäten festgelegt:

$$A_{23} A_{13} A_{12} \barwedge B_{23} B_{13} B_{12}, \quad A_{24} A_{14} A_{12} \barwedge B_{24} B_{14} B_{12}.$$

Sie haben (Nr. 209) außer dem gemeinsamen Paare $A_{12} B_{12}$ entsprechender Punkte noch ein zweites Paar $A_0 B_0$, welches linear konstruiert werden kann; denn z. B. B_0 ist der zweite Koinzidenzpunkt, neben B_{12}, zweier konjektiver Punktreihen, in denen zwei Punkte B und B' entsprechend sind, die in jenen Projektivitäten je demselben Punkte A korrespondieren. Also ist:

$$A_{23} A_{13} A_{12} A_0 \barwedge B_{23} B_{13} B_{12} B_0, \quad A_{24} A_{14} A_{12} A_0 \barwedge B_{24} B_{14} B_{12} B_0;$$

schneiden wir das Dreieck $A_1 A_2 A_3$ mit g, so ist nach dem Hilfssatze:

$$A_{23} A_{13} A_{12} A_0 \barwedge A_0(A_1, A_2, A_3, g),$$

und ähnlich ergeben die Dreiecke $A_1 A_2 A_4$, $B_1 B_2 B_3$, $B_1 B_2 B_4$ drei Projektivitäten; daher ist:

$$A_0(A_1, A_2, A_3, A_4, g) \barwedge B_0(B_1, B_2, B_3, B_4, g);$$

1) Comptes rendus Bd. 52, S. 741, 1861.

und wir haben in den projektiven Büscheln (A_0, α), (B_0, β) mit dem gemeinsamen sich selbst entsprechenden Strahle g diejenigen, durch welche der lineare Komplex erzeugt wird[1]).

Es mögen hier kurz noch zwei Kongruenzen angeführt werden. 256
Wenn im Raume ein Ebenenbüschel u und ein Strahlenbüschel (S', σ') vorliegen, welche projektiv sind, so enthält jede Ebene ξ des ersteren einen Strahlenbüschel um den Schnitt mit dem entsprechenden Strahl x' des zweiten. Die Strahlen aller dieser Büschel treffen die Axe u, aber auch den Kegelschnitt in σ', der durch den gegebenen Strahlenbüschel und den durch den Ebenenbüschel eingeschnittenen entsteht und dessen Punkte die Scheitel der Büschel in den ξ sind; er geht durch $u\sigma'$. Also handelt es sich um die Kongruenz der Geraden, welche einen Kegelschnitt und eine ihn schneidende Gerade treffen; sie ist ersichtlich 1. Ordnung 2. Klasse. Die beiden Leitlinien bilden zusammen eine Ausartung der kubischen Raumkurve; und zur vollen Doppelsekanten-Kongruenz 1. Ordnung 3. Klasse derselben wird unsere Kongruenz durch das Strahlenfeld in der Ebene des Kegelschnitts vervollständigt.

In dualer Weise liefern eine Punktreihe und ein Strahlenbüschel, welche projektiv sind, ∞^1 Strahlenbüschel aus den Punkten der Punktreihe je in der Ebene nach dem entsprechenden Strahle des Büschels. Die Kongruenz ist 2. Ordnung 1. Klasse, und ihre Strahlen treffen den Träger der Punktreihe und berühren den Kegel 2. Grades, welcher durch den gegebenen Strahlenbüschel und den aus seinem Scheitel die Punktreihe projizierenden erzeugt wird. Der Tangentialebenen-Büschel dieses Kegels bildet mit dem Ebenenbüschel um jene Gerade eine Ausartung des Torsus 3. Klasse der Schmiegungsebenen einer kubischen Raumkurve, und zur vollen Kongruenz 3. Ordnung 1. Klasse der Schmiegungsaxen derselben wird unsere Kongruenz durch den Strahlenbündel um den Scheitel des Kegels vervollständigt.

Wenn drei projektive Strahlenbüschel (A, α), (B, β), (C, γ) 257
gegeben sind, so entsteht durch die Treffgeraden von drei homologen Geraden, welche je eine Regelschar bilden, eine in sich duale Kongruenz 3. Ordnung 3. Klasse.

Die drei projektiven Punktreihen, welche durch die Büschel in eine Ebene geschnitten werden, besitzen dreimal drei entsprechende Punkte auf einer Gerade (Nr. 200); das sind die drei Strahlen der Kongruenz in der Ebene. Die Trägerflächen jener Regelscharen gehen durch die Scheitel und berühren die Ebenen der Büschel; die Ordnung und Klasse der Kongruenz sagen aus, daß von ihnen drei durch einen Punkt gehen und drei eine Ebene berühren. Von jedem der drei Scheitel kommt an die Kongruenz ein Kegel 2. Grades, derjenige

1) Briefliche Mitteilung von L. Klug (April 1902).

nämlich, der zum tetraedralen Komplexe gehört, den die beiden andern Büschel erzeugen, und ebenso liegt in der Ebene eines jeden der Büschel ein Kegelschnitt von Komplexstrahlen, vom tetraedralen Komplexe der beiden andern Büschel herrührend; so daß diese drei Punkte und drei Ebenen für die Kongruenz singulär vom 2. Grade sind; man nennt für eine Kongruenz einen Punkt, eine Ebene vom Grade h singulär, wenn sie nicht mit einer endlichen Anzahl von Kongruenzstrahlen inzidieren, sondern mit ∞^1, die einen Kegel h^{ter} Ordnung erzeugen bzw. eine Kurve h^{ter} Klasse umhüllen.

Je zwei der drei Strahlenbüschel besitzen zwei Paare sich schneidender homologer Strahlen; tun es z. B. a, b aus (A, α), (B, β) und ist c der homologe Strahl aus (C, γ), so zerfällt die Regelschar $[abc]$ in die beiden Strahlenbüschel aus dem Punkte ab in der Ebene nach c und in der Ebene ab um den Spurpunkt von c. So ergeben sich zwölf der Kongruenz angehörige Strahlenbüschel, und ihre Scheitel und Ebenen sind singulär 1. Grades für die Kongruenz[1]).

Nach Nr. 247 ist die Regelfläche der Strahlen dieser Kongruenz, welche eine Gerade treffen, vom Grade $3+3=6$. Den dortigen Beweis, welcher das Prinzip der speziellen Lage benutzt, wollen wir aber, für unseren Fall, durch einen allgemeinen Beweis ersetzen.

Der zu (A, α), (B, β) gehörige tetraedrale Komplex hat mit einer beliebigen Regelschar ϱ vier Geraden gemein. Ein Strahl b des Büschels (B, β) trifft zwei Geraden von ϱ, den beiden von ihnen getroffenen Strahlen von (A, α) sind zwei Strahlen b' von (B, β) homolog, welche wir dem b zuordnen. Zu einem b' ist ein a' homolog, und die beiden ihn treffenden Geraden von ϱ schneiden zwei Strahlen von (B, β), welche die dem b' korrespondierenden b sind. Die vier Koinzidenzstrahlen führen zu den gemeinsamen Strahlen.

Jetzt seien wieder drei projektive Büschel (A, α), (B, β), (C, γ) gegeben und zwei Geraden l, m; einem Strahle c von (C, γ) sind a, b in den anderen Büscheln homolog, die beiden Treffgeraden von a, b, l, m schneiden zwei Strahlen c' von (C, γ), die dem c zugeordnet werden; gehen wir von einem Strahle c' aus, so haben wir die Regelschar $[c'lm]$, welche mit dem zu (A, α), (B, β) gehörigen tetraedralen Komplexe vier Geraden gemein hat; diese treffen die vier Strahlen c von (C, γ), welche dem c' entsprechen. Die sechs Koinzidenzen dieser Korrespondenz [4, 2] beweisen, daß es in der Kongruenz der Geraden, welche homologe Strahlen von allen drei Strahlen-

1) Roccella, Sugli enti geometrici dello spazio di rette (Piazza Armerina, 1882); Sturm, Journ. f. Math., Bd. 101. S. 188.

büscheln treffen, 6 gibt, welche l und m schneiden, oder daß diejenigen, welche l schneiden, eine Regelfläche 6. Grades erzeugen.

Wenn nun vier projektive Strahlenbüschel $(A, \alpha), \ldots, (D, \delta)$ gegeben sind, so entsteht durch die Treffgeraden der Quadrupel homologer Strahlen eine Regelfläche 8. Grades.

Wir stellen, um dies zu beweisen, in einem der Büschel (D, δ) eine Korrespondenz her. Ein Strahl d desselben führt zu einer Regelschar, die sich auf die drei homologen Strahlen a, b, c stützt; die beiden Geraden derselben, welche die beliebige Gerade l treffen, begegnen zwei Strahlen d' des (D, δ), die wir dem d zuordnen. Die Geraden der zu (A, α), (B, β), (C, γ) gehörigen Kongruenz (3, 3), welche l treffen, erzeugen eine Regelfläche 6. Grades, so daß 6 den Strahl d' schneiden. Seien a, b, c die homologen Strahlen aus den drei ersten Büscheln, auf welche eine dieser sechs Geraden sich stützt, und d der entsprechende in (D, δ), so ist dieser einer der sechs dem d' zugeordneten Strahlen d. Die acht Koinzidenzen dieser Korrespondenz [6, 2] lehren, daß acht Geraden, welche homologe Strahlen der vier Strahlenbüschel schneiden, der l begegnen.

Die Kongruenz (3, 3) zeigt, daß mit jedem der vier Scheitel und jeder der vier Ebenen der Büschel drei Erzeugenden inzidieren; und man sieht, wie z. B. ein Strahl von (D, δ) der Regelfläche 8. Grades in dem dreifachen Punkte D, auf den drei Erzeugenden in δ und in den beiden Punkten begegnet, in denen er von den Treffgeraden des Quadrupels, zu dem er gehört, geschnitten wird.

Das System der Regelscharen, welche die zu (A, α), (B, β), (C, γ) gehörige Kongruenz erzeugen, ist projektiv zu dem Büschel (D, δ), und diese Projektivität geht über auf das System der Kegelschnitte, das sie in die Ebene δ einschneiden und von dem drei durch einen Punkt gehen. Sie erzeugen die Kurve 5. Ordnung, in welcher diese Ebene von der Regelfläche 8. Grades, außer in den drei Erzeugenden, geschnitten wird; auf einer Gerade rufen sie eine Korrespondenz [3, 2] hervor.

Fügen wir noch einen fünften Strahlenbüschel (E, ε) hinzu, ebenfalls projektiv zu den früheren, so ergibt sich zwischen ihm und dem System von Punktepaaren, welche die Treffgeraden der Quadrupel des vorigen Falls auf der Schnittkurve mit der Regelfläche hervorrufen, eine Projektivität, aus welcher im Büschel (E, ε) eine Korrespondenz [8, 2] entsteht; deren 10 Koinzidenzen beweisen, daß es bei fünf projektiven Strahlenbüscheln zehn Quintupel homologer Strahlen gibt, welche eine Treffgerade besitzen[1]).

1) Setzen wir die Sätze der Liniengeometrie als bekannt voraus, daß ein Komplex p^{ten} Grades mit einer Kongruenz (m, n) eine Regelfläche vom Grade $p(m+n)$ und mit einer Regelfläche q^{ten} Grades pq Geraden gemein hat (Liniengeometrie, Bd. I, Nr. 35, 36), so bestätigen wir die obigen Ergebnisse. Der zu

258 Gegeben seien sechs Geraden a_1, a_2, a_3, a_4; $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}'$; wir wollen wissen, wie viele Strahlenwürfe möglich sind, deren Ebenen mit $\mathfrak{a}$, deren Scheitel mit $\mathfrak{a}'$ und deren Strahlen mit a_1, a_2, a_3, a_4 bzw. inzidieren, und welche zu einem gegebenen Wurfe G^4 projektiv sind. Wir ziehen zunächst nur a_1, a_2, a_3 heran und haben drei Regelscharen $[\mathfrak{a}\mathfrak{a}'a_1]$, $[\mathfrak{a}\mathfrak{a}'a_2]$, $[\mathfrak{a}\mathfrak{a}'a_3]$. Jedem Punkte $\mathfrak{A}'$ auf $\mathfrak{a}'$ entsprechen drei Punkte $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3$ auf $\mathfrak{a}$, eingeschnitten durch die drei von $\mathfrak{A}'$ ausgehenden Geraden der Regelscharen. Diese vier Punkte $\mathfrak{A}', \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3$ durchlaufen projektive Punktreihen. Konstruiert man jedesmal $\mathfrak{A}_4$ auf $\mathfrak{a}$ so, daß $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4 \barwedge G^4$, so fragt es sich, wie oft $\mathfrak{A}'\mathfrak{A}_4$ die a_4 trifft oder was für eine Regelfläche durch $\mathfrak{A}'\mathfrak{A}_4$ entsteht.

Dem $\mathfrak{A}'$ entspricht ein Punkt $\mathfrak{A}_4$. Es sei nun $\mathfrak{A}_4$ fest auf $\mathfrak{a}$, so gehören zu jedem $\mathfrak{A}_1$ eindeutig ein $\mathfrak{A}_2$, ein $\mathfrak{A}_3$ und dann ein $\mathfrak{A}_1^*$, so daß $\mathfrak{A}_1^*\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4 \barwedge G^4$; umgekehrt, wenn $\mathfrak{A}_1^*$ gegeben ist, so bewegen sich $\mathfrak{A}_2^*$, $\mathfrak{A}_3^*$, für welche $\mathfrak{A}_1^*\mathfrak{A}_2^*\mathfrak{A}_3^*\mathfrak{A}_4 \barwedge G^4$ ist, in konjektiven Reihen. Diese haben mit den von $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$ beschriebenen zwei Paare gemeinsam (Nr. 209); d. h. wir haben zwei Paare $\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3$, für welche $\mathfrak{A}_1^*\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4 \barwedge G^4$ ist. Diesen gehören, vermöge der obigen Projektivitäten, zwei $\mathfrak{A}_1$ zu; also entsprechen jedem $\mathfrak{A}_1^*$ zwei $\mathfrak{A}_1$. Die Korrespondenz zwischen $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_1^*$ ist [2, 1]; die drei Koinzidenzen lehren, daß es zu $\mathfrak{A}_4$ drei Tripel $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3$ gibt, so daß $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4 \barwedge G^4$, und also drei dem $\mathfrak{A}_4$ entsprechende Punkte $\mathfrak{A}'$. Daher ist die Korrespondenz zwischen $\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{A}_4$ eine [3, 1], und folglich erzeugt $\mathfrak{A}_4\mathfrak{A}'$ eine Regelfläche 4. Grades mit $\mathfrak{a}'$ als einfacher, $\mathfrak{a}$ als dreifacher Leitgerade (Nr. 164) und trifft a_4 viermal.

Es gibt demnach vier Strahlenbüschel $(A, \alpha)(a_1, a_2, a_3, a_4)$, welche zu einem gegebenen Wurfe G^4 projektiv sind und bei denen der Scheitel A auf $\mathfrak{a}'$ liegt, die Ebene α durch $\mathfrak{a}$ geht und die vier Strahlen den Geraden a_1, a_2, a_3, a_4 begegnen.

Oder: Die Punkte A in den Ebenen α durch $\mathfrak{a}$, für welche:

$$(A, \alpha)\ (a_1, a_2, a_3, a_4) \barwedge G^4,$$

erzeugen eine Fläche 4. Ordnung. In jeder Ebene α durch $\mathfrak{a}$ befindet sich ein erzeugender Kegelschnitt, seine Punkte senden nach den Spuren von $a_1, \ldots$ Würfe, die zu G^4 projektiv sind (Nr. 224); ferner umhüllen die Ebenen α durch einen Punkt A auf $\mathfrak{a}$, für welchen diese Projektivität statthat, einen Kegel 2. Grades, da sie von den

---

(A, α), (B, β) gehörige tetraedrale Komplex und die zu (A, α), (C, γ), (D, δ) gehörige Kongruenz (3, 3) haben den Kegel der Kongruenz aus A, die Kurve in α und die zu $(A, \alpha), \ldots (D, \delta)$ gehörige Regelfläche 8. Grades gemein, der zu (A, α), (E, ε) gehörige Komplex mit dieser Regelfläche die drei Erzeugenden durch A, die in α und die 10 Treffgeraden, die zu $(A, \alpha), \ldots (E, \varepsilon)$ gehören. — Hinsichtlich der Regelfläche 8. Grades vgl. E. Weiß, Anzahlbestimmungen für das Strahlennetz (Diss. von Breslau, 1907), S. 7.

Ebenen $A\mathfrak{a}_1, \ldots$ in Würfen geschnitten werden, welche zu G^4 projektiv sind. An ihn gehen von $\mathfrak{a}$ zwei Berührungsebenen; folglich befindet sich jeder Punkt von $\mathfrak{a}$ auf zwei von den erzeugenden Kegelschnitten; also ist er und die Gerade $\mathfrak{a}$ doppelt auf der Fläche 4. Ordnung. Die Geraden a_1, a_2, a_3, a_4 enthält sie ersichtlich einfach. Wir haben acht Geraden a', welche $\mathfrak{a}$ und drei von den Geraden $a_1, \ldots$ treffen; eine von ihnen treffe etwa $\mathfrak{a}$, a_1, a_2, a_3; in der Ebene α von $\mathfrak{a}$ nach dieser Gerade a' zerfällt der Kegelschnitt in die a' und eine zweite Gerade a''. Für jeden Punkt A der a' fallen drei von den vier Strahlen in a' zusammen; die Projektivität zu G^4 wird dadurch erfüllt, daß sie ausartet, wobei a' singulär im Büschel (A, α) ist und in G^4 das vierte Element. Wird dann auf a' der Punkt A_4' so bestimmt, das $a'(a_1, a_2, a_3, A_4') \barwedge G^4$, so ist die Gerade von A_4' nach der Spur von a_4 die zweite Gerade a''.

So ergeben sich für unsere Fläche 4. Ordnung mit einer Doppelgerade $\mathfrak{a}$ die sechzehn Geraden, welche ihr infolge dieser Doppelgerade zukommen müssen und diese treffen[1]).

Unsere Fläche ist aber ein bemerkenswerter Spezialfall dadurch, daß sie noch vier gegen die Doppelgerade windschiefe Geraden besitzt.

Dual: Die Ebenen α durch Punkte A von $\mathfrak{a}'$, für welche die obige Projektivität gilt, umhüllen eine Fläche 4. Klasse; alle Ebenen durch $\mathfrak{a}'$ sind doppelte Berührungsebenen derselben und von jedem Punkte auf dieser Gerade kommt ein Berührungskegel 2. Grades.

Nehmen wir an, daß $\mathfrak{a}$ die a_4 treffe: in A_4, so löst sich von der Fläche 4. Ordnung die Ebene $\mathfrak{a}a_4$ ab; die übrig bleibende Fläche 3. Ordnung ist der Ort der Punkte A in Ebenen α durch die den Punkt A_4 enthaltende Gerade $\mathfrak{a}$, für welche:

$$(A, \alpha)\ (a_1, a_2, a_3, A_4) \barwedge G^4.$$

Lassen wir $\mathfrak{a}$ auch noch a_3, in A_3, treffen, so sondert sich noch eine Ebene ab, und es bleibt eine Fläche 2. Grades als Ort der Punkte A in den Ebenen α durch A_3A_4, für welche:

$$(A, \alpha)\ (a_1, a_2, A_3, A_4) \barwedge G^4.$$

Aber das ist unmittelbarer einzusehen. Denn der Ort der Geraden a', welche a_1, a_2 treffen und für die:

$$a'(a_1, a_2, A_3, A_4) \barwedge G^4$$

ist, ist eine durch a_1, a_2, A_3, A_4 gehende Regelschar; für jeden

1) Wir werden uns mit ihr beschäftigen.

Punkt A auf a' und seine Verbindungsebene α mit $A_3 A_4$ gilt die obige Projektivität.

259 Kehren wir aber zur kubischen Fläche zurück. Es seien nun a_1, a_2, a_3, a_4, a und A_5, sowie ein unikursales Gebilde G^5 von fünf Elementen in bestimmter Anordnung gegeben; durch A_5 sei $\mathfrak{a}$ gezogen. Wir konstruieren die Fläche 3. Ordnung, welche der Ort der Punkte A in Ebenen α durch $\mathfrak{a}$ ist, für die:

$$(A, \alpha)\,(a_1, a_2, a_3, A_5) \;\overline{\wedge}\; G^4_{(4)},$$

wo $G^4_{(i)}$ aus G^5 durch Weglassung des i^{ten} Elements entsteht. Weil sie a dreimal trifft, so umhüllen die Ebenen α durch die Punkte A auf a, für welche die obige Projektivität gilt, einen Kegel 3. Klasse mit der Spitze A_5, indem durch $\mathfrak{a}$ drei gehen. Die Ebene $A_5 a$ ergibt sich bei den beiden Schnittpunkten der a mit einem gewissen Kegelschnitt in ihr durch die Spuren von a_1, a_2, a_3 und durch A_5; also ist sie doppelte Berührungsebene, während $A_5(a_1, a_2, a_3)$ einfache sind. Dieser Kegel hat mit dem zu a_1, a_2, a_4, a, A_5 und $G^4_{(3)}$ gehörigen die Berührungsebenen $A_5(a, a_1, a_2)$ gemeinsam, daher noch drei weitere. Sie bestimmen auf a drei Punkte A, und wir erhalten:

Die Punkte A in Ebenen α durch A_5, für welche:

$$(A, \alpha)\,(a_1, a_2, a_3, a_4, A_5) \;\overline{\wedge}\; G^5$$

ist, erzeugen eine Fläche 3. Ordnung.

Denn bei diesen Büscheln (A, α) stimmen die Projektivitäten:

$$(A, \alpha)\,(a_1, a_2, a_3, A_5) \;\overline{\wedge}\; G^4_{(4)},$$
$$(A, \alpha)\,(a_1, a_2, a_4, A_5) \;\overline{\wedge}\; G^4_{(3)}$$

überein.

Die Geraden a_1, a_2, a_3, a_4 und der Punkt A_5 sind einfach auf der Fläche, wie leicht einzusehen ist. In der Regelschar $[a_1 a_2 a_3]$ gibt es eine Gerade a^0, für welche $a^0(a_1, a_2, a_3, A_5) \;\overline{\wedge}\; G^4_{(4)}$ ist; denn konstruiert man in der Leitschar die Gerade a_5', für welche $a_1 a_2 a_3 a_5' \;\overline{\wedge}\; G^4_{(4)}$ ist, so ist a^0 in der Ebene $a_5' A_5$ gelegen. Nun sei durch a^0 die Ebene α_4 so gelegt, daß $a^0(a_1, a_2, a_3, \alpha_4) \;\overline{\wedge}\; G^4_{(5)}$. Aus einem beliebigen Punkte A von a^0 werde in α_4 der a_4 treffende Strahl gezogen und mit A_5 durch die Ebene α verbunden, so ist:

$$(A, \alpha)\,(a_1, a_2, a_3, a_4, A_5) \;\overline{\wedge}\; G^5;$$

folglich liegen die Gerade a^0 und drei ähnliche aus den Regelscharen $[a_1 a_2 a_4]$, ... auf der kubischen Fläche.

Wenn a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, $\mathfrak{a}$, G^5 gegeben sind, so befindet sich (Nr. 226) in jeder Ebene α durch $\mathfrak{a}$ ein Punkt A, für welchen:

$$(A, \alpha)\,(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) \;\overline{\wedge}\; G^5.$$

Auf der Fläche 4. Ordnung, welche zu a_1, a_2, a_3, a_4, $\mathfrak{a}$, $G^4_{(5)}$ gehört, war jeder Punkt A von $\mathfrak{a}$ doppelt; also gehört er zu zwei durch $\mathfrak{a}$ gehenden Ebenen α, und jeder von ihnen gehören auf der zu a_1, a_2, a_3, a_5, $\mathfrak{a}$, $G^4_{(4)}$ gehörigen Fläche 4. Ordnung wieder zwei Punkte A' zu, in denen ihr Kegelschnitt die Gerade $\mathfrak{a}$ trifft. Mithin besteht zwischen den Punkten A und A', die zur nämlichen Ebene α durch $\mathfrak{a}$ in dem einen und dem andern Falle gehören, eine Korrespondenz [4, 4]. Zu den acht Koinzidenzen gehören die Schnitte von $\mathfrak{a}$ mit den beiden Treffgeraden von a_1, a_2, a_3, $\mathfrak{a}$. Für die sechs übrigen Koinzidenzen A und je die zugehörige Ebene α gilt:

$$(A, \alpha)\,(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) \barwedge G^5.$$

Wir erhalten folglich eine Kurve 7. Ordnung durch die Punkte A in den Ebenen α durch $\mathfrak{a}$, für welche:

$$(A, \alpha)\,(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) \barwedge G^5;$$

sie trifft die Gerade $\mathfrak{a}$ sechsmal.

In ihr schneiden sich die beiden Flächen 4. Ordnung, welche zu a_1, a_2, a_3, a_4, $\mathfrak{a}$, $G^4_{(5)}$ und a_1, a_2, a_3, a_5, $\mathfrak{a}$, $G^4_{(4)}$ gehören, außer in der auf beiden doppelten Gerade $\mathfrak{a}$, den Geraden a_1, a_2, a_3 und den beiden Treffgeraden von $\mathfrak{a}$, a_1, a_2, a_3.

Jeder der Geraden a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 begegnet sie viermal, der a_5 z. B. in den Schnitten mit der ersten der beiden eben genannten Flächen.

Dual: Die Ebenen α durch die Punkte A auf der Gerade $\mathfrak{a}'$, für welche die obige Projektivität gilt, umhüllen einen Torsus 7. Klasse, und sechs von ihnen gehen durch $\mathfrak{a}'$.

Da sieben durch einen Punkt $\mathfrak{A}$ gehen, so haben wir:

Die Punkte A in den Ebenen α durch einen gegebenen Punkt $\mathfrak{A}$, für welche die erwähnte Projektivität besteht, erzeugen eine Fläche 7. Ordnung; denn siebenmal fällt A auf $\mathfrak{a}'$.

Nehmen wir, zur Raumkurve 7. Ordnung zurückkehrend, an, daß $\mathfrak{a}$ von a_5 in A_5 getroffen werde, so löst sich von der Kurve 7. Ordnung ein Kegelschnitt ab, der in der Ebene $\mathfrak{a}a_5$ liegt, denn für Punkte A dieser Ebene treffen alle Strahlen die a_5. Die Restkurve 5. Ordnung trifft $\mathfrak{a}$ noch viermal und jede der Geraden $a_1, \ldots a_4$ dreimal.

Der Ort der Punkte A in Ebenen α durch die Gerade $\mathfrak{a}$, auf welcher A_5 liegt, so beschaffen, daß:

$$(A, \alpha)\,(a_1, a_2, a_3, a_4, A_5) \barwedge G^5,$$

ist eine Raumkurve 5. Ordnung, welche $a_1, \ldots a_4$ dreimal und $\mathfrak{a}$ so viermal trifft, daß zwei Schnitte in dem Doppelpunkte

A_5 sich vereinigen; denn die von A_5 ausgehenden Ebenen α, für welche:

$$(A_5, \alpha)\,(a_1, a_2, a_3, a_4) \barwedge G^4_{(5)},$$

hüllen einen Kegel 2. Grades ein und zwei gehen durch $\mathfrak{a}$.

Lassen wir noch a_4 die $\mathfrak{a}$ treffen in A_4, so löst sich ein zweiter Kegelschnitt ab, der A_5 für die Restkurve zum einfachen Punkte macht, und ebenso ist es A_4, in den für die Kurve 7. Ordnung die beiden weiteren Schnitte mit $\mathfrak{a}$ zusammengerückt sind; es ergibt sich:

Wenn $a_1, a_2, a_3, A_4, A_5, G^5$ gegeben sind, so ist der Ort der Punkte A in den Ebenen α durch A_4A_5, für welche:

$$(A, \alpha)\,(a_1, a_2, a_3, A_4, A_5) \barwedge G^5,$$

eine kubische Raumkurve, welche durch A_4, A_5 geht und a_1, a_2, a_3 zu Sehnen hat.

Sie ist den beiden Flächen 2. Grades (Nr. 258) gemeinsam, die zu $a_1, a_2, A_4, A_5, G^4_{(3)}$, bzw. $a_1, a_3, A_4, A_5, G^4_{(2)}$ gehören, außer a_1.

260 Jetzt seien sechs Geraden $a_1, a_2, \ldots a_6$ gegeben, ferner $\mathfrak{a}$ und G^6; so schneide man die zu $\mathfrak{a}, a_1, \ldots a_4$ und $G^4_{(5,\,6)}$ gehörige Fläche 4. Ordnung und die zu $\mathfrak{a}, a_1, a_2, a_3, a_5, a_6$ und $G^5_{(4)}$ gehörige Kurve 7. Ordnung; sie haben gemein sechs Punkte auf $\mathfrak{a}$, welche auf der Fläche doppelt sind, und $3 \cdot 4$ Punkte auf a_1, a_2, a_3, daher sonst noch $4 \cdot 7 - 2 \cdot 6 - 3 \cdot 4 = 4$ Punkte.

Durch $\mathfrak{a}$ gibt es also vier Ebenen α mit je einem Punkte A, so beschaffen, daß:

$$(A, \alpha)\,(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6) \barwedge G^6.$$

Oder: Die Ebenen α der Büschel (A, α), für welche diese Projektivität gilt, erzeugen eine Fläche 4. Klasse und die Scheitel A eine Fläche 4. Ordnung.

Für jene sind die Ebenen durch die a_i einfache Berührungsebenen, für diese die Punkte auf ihnen einfache Punkte.

Wenn a_6 die $\mathfrak{a}$ in A_6 trifft, so gehört $a_6\mathfrak{a}$ zu den vier Ebenen. Die drei übrigen Ebenen sind solche Ebenen α durch $\mathfrak{a}$, welche je einen Punkt A enthalten, so daß:

$$(A, \alpha)\,(a_1, \ldots a_5, A_6) \barwedge G^6.$$

Wir erhalten weiter zwei Ebenen α durch A_5A_6 mit je einem Punkte A, so beschaffen, daß:

$$(A, \alpha)\,(a_1, \ldots a_4, A_5, A_6) \barwedge G^6.$$

Sind $a_1, a_2, \ldots a_5, A_6$ und G^6 gegeben, so konstruiere man die beiden kubischen Flächen von Nr. 259, welche zu a_1, a_2, a_3, a_4, A_6 und $G^5_{(5)}$, bzw. a_1, a_2, a_3, a_5, A_6 und $G^5_{(4)}$ gehören; ihnen sind gemein-

sam a_1, a_2, a_3 und die dort beschriebene Gerade a^0 aus $[a_1 a_2 a_3]$, also noch eine Raumkurve 5. Ordnung.

Der Ort der Punkte A in den Ebenen α durch A_6, für welche:

$$(A, \alpha)\ (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, A_6) \barwedge G^6,$$

ist eine Raumkurve 5. Ordnung, welche durch A_6 geht und jede der fünf Geraden $a_1, \ldots a_5$ dreimal trifft. Die Ebenen α umhüllen einen Kegel 3. Klasse aus A_6, weil durch die obige $\mathfrak{a}$ drei gehen.

Die Fläche 4. Ordnung der Scheitel A in den Ebenen α durch $\mathfrak{a}$, für welche:

$$(A, \alpha)\ (a_1, a_2, a_3, a_4) \barwedge G^4,$$

können wir auch anders definieren. Für jeden Punkt derselben sei der Kegel 2. Grades konstruiert, welcher die Ebenen $A(a_1, a_2, a_3, a_4, \mathfrak{a})$ berührt. Seine Berührungsebene $A\mathfrak{a}$ wird von den vier Berührungsebenen $A(a_1, a_2, a_3, a_4)$ in einem zu G^4 projektiven Wurfe geschnitten; also gilt dies für jede seiner Berührungsebenen. Folglich ist die Fläche 4. Ordnung der Ort der Punkte A, so beschaffen, daß bei dem Kegel 2. Grades, der die fünf Ebenen $A(a_1, a_2, a_3, a_4, \mathfrak{a})$ berührt, der Büschel der vier ersten von diesen Ebenen dem gegebenen Wurfe G^4 projektiv ist.

Jetzt seien wieder fünf Geraden a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 und G^5 gegeben, so konstruieren wir die Fläche 4. Ordnung der Spitzen der Kegel 2. Grades $A(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$, bei denen der Tangentialebenen-Büschel $A(a_1, a_2, a_3, a_4)$ zu $G^4_{(5)}$ projektiv ist, und diejenige der Spitzen der Kegel $A(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$, bei denen der Büschel $A(a_1, a_2, a_3, a_5)$ zu $G^4_{(4)}$ projektiv ist. Auf jener sind a_1, a_2, a_3, a_4 einfach, a_5 doppelt, auf dieser a_1, a_2, a_3, a_5 einfach, a_4 doppelt. Außerdem haben die beiden Flächen gemeinsam die $2 \cdot 3$ Geraden, welche a_4, a_5 und je zwei von den drei Geraden a_1, a_2, a_3 treffen. Es bleibt eine kubische Raumkurve, welche Ort der Punkte A ist, für welche der Tangentialebenen-Büschel $A(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ zu G^5 projektiv ist. Jeder Punkt A dieser Kurve hat ∞^1 Ebenen α, für welche:

$$(A, \alpha)\ (a_1, \ldots a_5) \barwedge G^5$$

ist, nämlich die Berührungsebenen des zugehörigen Kegels 2. Grades $A\ (a_1, \ldots a_5)$.

Eine Ebene durch a_5 schneidet die beiden Flächen in einem Kegelschnitte und einer Kurve 3. Ordnung, welche gemein haben die Spuren von a_1, a_2, a_3, a_4, und zwar ist letztere doppelt auf der Kurve 3. Ordnung. Es bleibt nur ein der kubischen Raumkurve angehöriger

Schnitt. Daraus schließt man, daß die fünf Geraden $a_1, \ldots a_5$ Doppelsekanten dieser kubischen Raumkurve sind.

Umgekehrt, wenn zu einem Punkte A zwei verschiedene Ebenen α, α' gehören, so daß:

$$(A, \alpha)(a_1, \ldots a_5) \barwedge (A, \alpha')(a_1, \ldots a_5) \barwedge G^5,$$

so entsteht sofort ein Kegel 2. Grades $A(a_1, \ldots a_5)$, von dem der Büschel dieser fünf Tangentialebenen zu G^5 projektiv ist; also muß A auf unserer kubischen Raumkurve liegen.

Diese zu $a_1, \ldots a_5$ und G^5 gehörige kubische Raumkurve liegt auf der Fläche 4. Ordnung, welche zu $a_1, \ldots a_6$ und G^6 gehört, wenn $G^5 = G^5_{(6)}$ ist.

Für jeden Punkt A der Kurve nämlich ist der Tangentialebenen-Büschel um den Kegel so projektiv, daß A $(a_1, \ldots a_5)$ den fünf Elementen von G^5 entsprechen; es sei α_6' diejenige Berührungsebene, welche dem sechsten Elemente von G^6 entspricht; wir schneiden sie mit Aa_6 und legen aus diesem Schnittstrahle die zweite Berührungsebene α an den Kegel. Das ist die zu dem Punkte A gehörige Ebene α, durch welche er auf die Fläche 4. Ordnung kommt.

Ferner, jede Berührungsebene eines Kegels $A(a_1, \ldots a_5)$, der seine Spitze A auf dieser kubischen Raumkurve hat, enthält eine ihre beiden weiteren Schnitte mit der Kurve verbindende Doppelsekante, und weil durch jeden Punkt der Kurve zwei Berührungsebenen gehen, also auch zwei dieser Doppelsekanten, so entsteht durch die Zuordnung der Schnittpunkte jeder solchen Doppelsekante eine involutorische Korrespondenz [2] auf der — wie wir wissen, unikursalen — Kurve, in der also auch die Schnitte von $a_1, \ldots a_5$ entsprechend sind. Durch diese fünf Paare entsprechender Punkte ist die Korrespondenz eindeutig festgelegt (Nr. 187); folglich liefern alle unsere Kegel aus den verschiedenen Punkten der Kurve eine und dieselbe Korrespondenz. Zu jeder Berührungsebene eines von diesen Kegeln gibt es bei jedem andern eine durch dieselbe Doppelsekante gehende Berührungsebene. Dadurch sind die Büschel der Tangentialebenen der beiden Kegel in projektive Beziehung gebracht. Das ist dieselbe Projektivität, wie die, welche wir schon haben, in der die nach $a_1, \ldots a_5$ gehenden Berührungsebenen entsprechend sind. Folglich gehen auch die zu den verschiedenen Kegeln gehörigen Ebenen α_6' alle durch dieselbe Doppelsekante[1]).

Wird nun A_6, statt a_6, hinzugefügt, so gibt die Ebene von dieser Doppelsekante nach A_6 in ihrem dritten Schnitte den einzigen Punkt A auf der kubischen Raumkurve, für welchen, wenn α die zweite

1) Wir werden dies später, wenn wir die kollineare Eigenschaft der kubischen Raumkurve erkannt haben, noch auf eine andere Art beweisen.

Tangentialebene aus AA_6 an den betreffenden Kegel 2. Grades ist, gilt:

$$(A, \alpha)(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, A_6) \barwedge G^6;$$

so daß dieser Punkt A der obigen Raumkurve 5. Ordnung angehört.

Wenn nun sieben Geraden $a_1, a_2, \ldots a_7$ vorliegen und G^7, so 261
betrachten wir die Fläche 4. Ordnung der Scheitel der Büschel (A, α), für welche:

$$(A, \alpha)(a_1, a_2, \ldots a_6) \barwedge G^6_{(7)}$$

und diejenige, bei der:

$$(A, \alpha)(a_1, \ldots a_5, a_7) \barwedge G^6_{(6)};$$

der Schnitt besteht aus den fünf Geraden $a_1, \ldots a_5$ und der zu ihnen und $G^5_{(6,7)}$ gehörigen kubischen Raumkurve, und außerdem einer Raumkurve 8. Ordnung, welche der Ort der Scheitel der Büschel (A, α) ist, für welche:

$$(A, \alpha)(a_1, a_2, \ldots a_7) \barwedge G^7;$$

die Ebenen α umhüllen einen Torsus 8. Klasse.

Jene Kurve trifft jede der sieben Geraden $a_1, \ldots a_7$ viermal, a_7 z. B. in den Schnittpunkten mit der zu $a_1, \ldots a_6$ und $G^6_{(7)}$ gehörigen Fläche 4. Ordnung. Ebenso sendet jede dieser sieben Geraden vier Ebenen an den Torsus.

Liegen aber die Geraden $a_1, a_2, \ldots a_6$ und der Punkt A_7 vor, so schneiden wir die zu $a_1, \ldots a_6$ und $G^6_{(7)}$ gehörige Fläche 4. Ordnung und die zu $a_1, a_2, \ldots a_5, A_7$ und $G^6_{(6)}$ gehörige Raumkurve 5. Ordnung (Nr. 260). Sie haben gemeinsam die $5 \cdot 3$ Begegnungspunkte dieser Kurve mit den $a_1, \ldots a_5$, die ganz auf der Fläche liegen, und den einen Punkt, in welchem die Raumkurve der zu $a_1, \ldots a_5$ und $G^5_{(6,7)}$ gehörigen kubischen Raumkurve, welche ebenfalls ganz auf der Fläche liegt, begegnet; es bleiben noch vier weitere gemeinschaftliche Punkte, welche zu dem Satze führen:

Wenn $a_1, a_2, \ldots a_6, A_7$ vorliegen und G^7, so gibt es vier Strahlenbüschel (A, α), so beschaffen, daß:

$$(A, \alpha)(a_1, a_2, \ldots a_6, A_7) \barwedge G^7.$$

Endlich seien acht Geraden $a_1, a_2, \ldots a_8$ gegeben und G^8. Wir stellen dann zusammen die Fläche 4. Ordnung F^4, welche zu $a_1, a_2, \ldots a_6$ und $G^6_{(7,8)}$, und die Raumkurve 8. Ordnung, welche zu $a_1, \ldots a_5, a_7, a_8$ und $G^7_{(6)}$ gehört. Letztere trifft erstere, auf welcher $a_1 \ldots a_5$ ganz liegen, in ihren je vier Begegnungspunkten mit diesen Geraden, ferner noch in vier Punkten, welche sich auf der zu $a_1, \ldots a_5$ und $G^5_{(6,7,8)}$

gehörigen kubischen Raumkurve befinden und sich folgendermaßen ergeben. Diese Kurve liegt auf der Fläche 4. Ordnung F^4. Die Raumkurve 8. Ordnung liegt auf der Fläche 4. Ordnung F_1^4, welche zu a_1, a_2, a_3, a_4, a_7, a_8 und $G^6_{(5,6)}$ gehört, aber weil a_5 ausgelassen ist, so liegt nicht auf F_1^4 die kubische Raumkurve. Von ihren zwölf Begegnungspunkten befinden sich acht auf den Doppelsekanten a_1, a_2, a_3, a_4, welche ganz auf der Fläche liegen. Es sei A einer von den vier übrigen. Weil er auf der kubischen Raumkurve liegt, so fällt in jeder Berührungsebene des zugehörigen Kegels K^2 2. Grades der dem fünften Elemente von G^8 entsprechende Strahl in die Ebene Aa_5 und trifft a_5. Weil der Punkt aber auch auf der Fläche 4. Ordnung F_1^4 liegt, so geht von ihm ein sechsstrahliger Büschel aus, dessen Strahlen die a_1, a_2, a_3, a_4, a_7, a_8 treffen und der zu $G^6_{(5,6)}$ projektiv ist. Seine Ebene α wird von den Ebenen A (a_1, a_2, a_3, a_4) in einem zu $G^4_{(5,6,7,8)}$ projektiven Büschel geschnitten, folglich berührt sie den K^2; denn das kommt im Bündel A nur dessen Berührungsebenen zu. Daher tritt zu den sechs Strahlen noch der dem fünften Elemente von G^8 entsprechende hinzu mit der Eigenschaft, daß er a_5 trifft. Folglich liegt der Punkt A und so jeder der vier Punkte auf der obigen Raumkurve 8. Ordnung. Weil diese Punkte aber, als Punkte der kubischen Raumkurve für $a_1, \dots a_5$ und $G^5_{(6,7,8)}$, nicht bloß eine zugehörige Ebene α haben, so kommen sie auf die Fläche 4. Ordnung F^4 und auf die Raumkurve 8. Ordnung durch verschiedene Ebenen α. Es bleiben daher $4 \cdot 8 - 5 \cdot 4 - 4 = 8$ Begegnungspunkte A; jeder von ihnen hat nur eine zugehörige Ebene α in bezug auf $a_1, \dots a_5$ und $G^5_{(6,7,8)}$. Mithin ist, weil er auf F^4 liegt:

$$(A, \alpha)\,(a_1, \dots a_6) \barwedge G^6_{(7,8)},$$

und weil er auf der Raumkurve 8. Ordnung liegt:

$$(A, \alpha)\,(a_1, \dots a_5, a_7, a_8) \barwedge G^7_{(6)};$$

oder:

$$(A, \alpha)\,(a_1, \dots a_8) \barwedge G^8.$$

Wenn also acht Geraden $a_1, \dots a_8$ und G^8 gegeben sind, so sind acht Strahlenbüschel vorhanden, bei denen:

$$(A, \alpha)\,(a_1, \dots a_8) \barwedge G^8.$$ [1])

1) Man vgl. für die vorangehenden Betrachtungen Math. Annalen, Bd. 12, S. 288–290, 307 und 324 (ohne Beweis), sowie Schuberts Kalkül der abzählenden Geometrie, § 30. A. a. O. steht S. 324 im eben bewiesenen Satze: „6 Strahlenbüschel“. Dies wurde von Schubert richtig gestellt, und von neuem von Montesano, Annali di Matematica, Ser. III, Bd. 1, S. 313.

Wir schließen noch eine Bemerkung über das eine Problem der Trilinearität an. Die drei Gebilde seien u, u', u'', und es seien sieben Tripel gegeben $A_1 A_1' A_1'', \ldots A_7 A_7' A_7''$. Wir beziehen die beiden gegebenen Ebenenbüschel v, v' projektiv auf u, u', wodurch den $A_1, \ldots A_7$, $A_1', \ldots A_7'$ die Ebenen $\alpha_1, \ldots \alpha_7$, $\alpha_1', \ldots \alpha_7'$ entsprechen, stellen die Schnittlinien $a_1 = \alpha_1 \alpha_1', \ldots a_7 = \alpha_7 \alpha_7'$ her und benutzen einen von den ∞^1 Strahlenbüscheln (A, α) (Nr. 261), für welche:

$$(A, \alpha)(a_1, \ldots a_7) \barwedge A_1'' \ldots A_7''.$$

Irgendeine Gerade durch A kann die Axe v'' des dritten Ebenenbüschels sein, der, perspektiv zu diesem Strahlenbüschel, projektiv zu dem Gebilde u'' wird. Macht man nun die drei Ebenenbüschel v, v', v'' trilinear mit Hilfe der Perspektivitätsebene α, so werden vermittelst der drei Projektivitäten (u, v), (u', v'), (u'', v'') auch die drei Gebilde u, u', u'' trilinear, derartig, daß dieser Trilinearität die gegebenen Tripel angehören.

Druck von B. G. Teubner in Leipzig.





